HITP

数学奥林匹克系列

2008·第二辑(文化卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

HITP

数学奥林匹克系列

第二辑(文化卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第二辑,文化卷/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.7

ISBN 978－7－5603－2691－7

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课－中学－竞赛题－研究

Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第056152号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张32.25　字数700千字
版　　次　2008年7月第1版　2008年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－2691－7
印　　数　1～3 000册
定　　价　58.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 卷首语

从本辑开始,《数学奥林匹克与数学文化》开始分设竞赛卷与文化卷,这是对文化价值重估的结果,所以在卷首要多说几句.

提起数学,人们都觉得很重要,中国的数学神童通常是考试考出来的,于是很多人认为数学是应试的工具,只有在考试中才有价值,把它狭隘地理解为一种选拔手段,竞争科目.不单是中国,美国也是如此,美国国家研究委员会在一篇题为《振兴美国数学》的报告中指出:"在中学和高等学校中,数学起着过滤器而不是抽水机的作用;学生被挡住了,而数学人才却没能选拔出来并得到鼓励."(美国国家研究委员会.振兴美国数学—90年代的计划.叶其孝,刘燕,章学诚,蒋定华,译,冷生明,校.世界图书出版公司,1993年,第61页).

的确在以前作为一个社会成员,甚至是社会精英,不懂数学并无大碍,或以为数学好最多是将才,而文科好才能管人、用人,方为帅才.但时代毕竟变了,观念也应该改变.

美国数学专门委员会在1984年的报告中指出:"在现今这个技术发达的社会里,扫除数学盲的任务已经替代了昔日扫除文盲的任务,而成为当今教育的主要目标。"(美国数学的现在和未来.上海:复旦大学出版社,1986)

我国著名数学家曾任武汉大学校长的齐民友教授认为:数学作为一种文化,在过去和现在都大大地促进了人类的思想解放,人类无论是在物质生活上,还是在精神生活上得益于数学实在太多,今后数学还会大大地促进人的思想解放,使人成为更完全、更丰富、更有力量的人.他指出:"历史上已经证明,而且将继续证明,一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的." 他进而说:"没有现代的数学就不会有现代的文化.没有现代数学的文化是注定要衰落的."

1988年夏在布达佩斯举行的国际数学教育大会上，美国著名数学教育家 L. A. Steen 作了"面向新世纪的数学"的报告，他强调要"振兴中学后数学教育"。他说："对于中学后数学教育，最重要的任务是使数学成为一门对于怀着各种各样不同兴趣的学生都有吸引力的学科，要使大学数学对众多不同的前程都是一种必不可少的预备。"同年在天津南开数学研究所召开了"21世纪中国数学展望学术讨论会"，程民德教授作了长篇主题报告，他说："环顾世界，所有的经济大国和科技大国，必然也是数学强国。"

也许有人会说，当前中国可能是世界上最重视数学的国度了，我们的练习册堆积如山，我们的模拟题汇集似海，我们总结的解题技巧多如牛毛，我们的知识点梳理密不容针。但是这并不是数学。

M·克莱因指出："数学学科并不是一系列的技巧，这些技巧只不过是它微不足道的方面。它们远不能代表数学，就如同调配颜色远不能当做绘画一样。技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物。如果我们对数学的本质有一定的了解，就会认识到数学在形成现代生活和思想中起重要作用这一断言并不是天方夜谭。"

法国近代重要哲学家马勒伯朗士(Nicolas Malebranche)在总结他所认识的真理观时指出：

"有两种真理，一种是必然的真理，另一种是偶然的真理。所谓必然的真理，就是其本性持久不变的真理，按着上帝的意志捕获的真理——所有其他的真理都是偶然的真理：数学、大部分物理学和伦理学都含有必然的真理；历史学、语法学、特殊的权利和习俗，以及其他依赖人类意志变化的学问，都只能包含偶然的真理。"(马勒伯朗士.论寻找真理.第一卷.巴黎：哲学图书出版社，第16-17页.)

数学作为人类思维的有效形式与手段，渗透至其他一切领域是有其必然性的。

斯宾诺莎曾代表了近代启蒙思想家的共同立场，从他的著作中我们不难看出，他们所谓的"理性"并不是狭隘的认识论概念，而是含有各种各样的"公"之义，它是认识论，也是方法论、伦理学、政治学、文学、科学、历史、经济学等。每个人出让给社会的自然权利构成了某种类似于乌托邦的东西，或者说，它是人类想象力的最大成就，由于近代数学成为科学王国的国王，这样的乌托邦也被称为"公理"(斯宾诺莎的伦理学就是由许多这样的公理组成的)。

李文林先生曾举了两个例子说明数学对观念与制度形成的重要影响：法国大革命形成两部基础文献《人权宣言》和《法国宪法》，是资产阶级民主革命思想的结晶。《人权宣言》开明宗义指出：

"组成国民议会的法国人民的代表们……决定把自然的，不可剥夺的和神圣的人权阐明于庄严的宣言之中，以便——公民们今后以简单而无可争辩的原则为根据的那些要求能经常针对着宪法与全体幸福之维护。"

而后来(1791年)公布的《法国宪法》又将《人权宣言》置于篇首作为整部宪法的出发点。

无独有偶，美国独立战争所产生的《独立宣言》开头也说：

"我们认为下述真理乃是不言而喻的：人人生而平等，造物主赋予他们若干固有而不

可让与的权利，其中包括生存权、自由权以及谋求幸福之权."

把大家认为"简单而无可争辩的原则"和"不言而喻的真理"作为出发点，按照数学的语言这就是从公理出发.显然，领导法国大革命和美国独立战争的思想家、政治家们都接受了欧几里得数学思维的影响.另外，有记载说美国南北战争时期的总统林肯相信思维能力像肌肉一样也可以通过严格的锻炼而得到加强……为此他想方设法搞到了一本欧几里得的《几何原本》并下决心亲自证明其中的一些定理，1860年他还自豪地报告说他已基本掌握了《几何原本》的前六卷.（李兆华.汉字文化圈数学传统与数学教育.北京：科学出版社，2004，第184页）

苏黎世数学家斯派泽(Speiser)曾对数学与埃及美术之间做出了值得注目的评论：

"如果你真想准确地判断埃及的数学水准，你无需去看他们算术书中的计算或他们测量系统中的初等几何.你只要分析一下那些覆盖在他们庙宇或雕塑上的令人惊异的纹样，你就能领略到活在这些民众心中的高度的数学精神."

我们时常抱怨我们的城市建筑风格单一，美术界缺乏国际大师，索斯比拍卖行艺术品价格不高，甚至音乐水准不高等.要大力发展美育教育，其实这些可能都是一些表象，深层的原因中肯定有数学的成分在内.

我们习惯于孤立地看待数学、文学与艺术，有时加以贬损，有时以科学主义的名义将其无限抬高，其实它们是相通的.

孙小礼教授指出："过去，在我国学术界，常常强调数学与艺术的区别，以为在数学中运用的是逻辑思维，而在艺术中则运用形象思维.事实上，形象思维对于数学同样是非常重要的，而且是必不可少的，而逻辑思维规律对于艺术也是必要的，是必须遵守的.数学和艺术确实有许多相通之处和共同之处，例如数学和艺术，特别是音乐中的五线谱，绘画中的线条结构等，都是用抽象的符号语言来表达内容.有人说，数学是理性的音乐，音乐是感性的数学."

美国当代数学家哈尔莫斯(P.R.Halmos)说："数学是创造性的艺术，因为数学家创造了美好的新概念；数学是创造性的艺术，因为数学家像艺术家一样的生活，一样的工作，一样的思索；数学是创造性的艺术，因为数学家这样对待它."

数学家与文学家、艺术家在思维方法上有共同之处，都需要抽象，也都需要想象、幻想，例如数论中有一个重要方法叫筛法.为什么起这样一个名字，这其中要有一点想象力，因为最初从自然数中寻找素数是将全部自然数都写到纸草上(注意不是草纸，这是一种由尼罗河岸边生长的一种植物制成的早期的纸)，然后逐次将合数烧去，由于最初纸草被紧固在木框上，再烧一些小洞，很像筛子，故而起名为筛法，后期是将蜡平涂在木板上，再将1及合数用香点一个小黑点，也很像筛子，所以延用至今.至于幻想马克思和列宁早已注意到了.马克思在讨论微分学，特别是切线问题时曾写道："所有的妙处只是通过两个三角形相似性才显示出来，并且辅助三角形的两个边是由 dx 和 dy 构成的，因此它们比点(point)还小，所以在这种情况下要敢于把弦等同于弧，或者反过来把弧等同于弦.此外，在第一种方法中，也只把两条直角边相互比较，并且也可对斜边的性质赋予幻想."列宁则说："有人以为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在

数学上也是需要幻想的,甚至没有它就不可能发明微积分."

数学理论虽以逻辑的严密性为特征,但是新概念的提出,新理论的创立则需要借助于直觉、想象和幻想.数学史上的众多成就都证实了这种规律性.著名数学家庞加莱说:"没有直觉,数学家便会像这样一个作家:他只是按语法写诗,但是却毫无思想."

庞加莱还说过这样一段名言:"科学家研究自然,是因为他爱自然,他之所以爱自然,是因自然是美好的.如果自然不美,就不值得理解;如果自然不值得理解,生活就毫无意义.当然,这里所说的美,不是那种激动感官的美,也不是质地美和表现美;不是我低估那种美,完全不是,但那种美与科学不相干.我说的是各部分之间有和谐秩序的深刻的美,是人的纯洁心智所能掌握的美."(北京大学学报.哲学社会科学版.1993年第1期)

美学当然是现代人多少应该感兴趣的学科,而数学之美又是其中较高层次之美,它虽然不具有表面的功利性,但对人深层的影响还是很大的,它的作用有些像宗教的说教.有人说多做善事会福虽未至但祸已远离,总做坏事则会祸虽未至但福已远离;同样可说:学了数学雅虽未至但俗已远离,不学数学则俗虽未至但雅已远离.1998年美国《数学情报》(《Mathematical Intelligencer》)曾刊出数学上24个著名的定理。让读者给每一个定理打分,评出最美的定理,统计结果,第一名为18世纪瑞士大数学家欧拉(I. Euler,1707—1783)给出的公式

$$e^{i\pi}+1=0$$

这个公式让数学上最重要的五个常数1、0、π、e、i团聚了。

海德格尔说人应该诗意地栖居,我们说人特别是现代人应同时过两种生活,那就是物质生活和精神生活,物质生活层面讲求舒适,精神生活则讲求理性、秩序与美感,对实现这一目的学习数学有益。

"为什么我需要学这个?"这是中学数学教师最害怕学生问的问题.传统的回答是:"因为在你工作的时候需要掌握这种技能。"但这种回答其实是不诚实的,因为即使班上有些学生将来会成为工程师,他们也并不是提这种问题的学生.更诚实的回答似乎应该是:"因为你需要这种知识去参加大学入学考试。"但是明显带有嘲笑挖苦的意味.托马斯·杰斐逊有一句关于数学的名言——"思考的能力就像身体的组织,可以通过练习不断地加强和改进."(帕特里夏·克莱因·科恩(patricia Cline Cohen).善于计算的人民:美国早期数学能力的传播(A Calculating people: The spread of Numeracy in Early America).纽约:劳特里奇出版社,1999,第132页)和我们关于为什么学习数学有着如此重要性的观念更为接近,但是我们承认,这种观点很难激励那些对数学缺乏兴趣的十几岁的青少年.([美]德里克·尼德曼,戴维·博伊姆.数学密码.庄莉,译.上海:上海世纪出版集团,2006,第3页)

对于一个心智健全的少年他有着成为各类天才的可能,而人才成长的规律告诉我们成才的第一步是立志,他首先要有这种志向,而为发达而数学显然是得不偿失的.所以靠外在吸引是行不通的,俗话说攻心为上.为了吸引更多的潜在数学天才学习数学.必须要晓之以数学真之理,动之以数学美之情.上海交通大学科学史系纪志刚教授在《让我们播种数学》一文中指出:"一个把数学仅仅看成是工具的教师,他只会给出大量的公式和呆

板的例题;一个把数学仅仅看成是逻辑体系的教师,他只会依循一种有条不紊却异常枯燥乏味的定义—公理—定理的方式去讲授;一个把数学看成仅仅是智力游戏的教师,他会偏爱刁钻的难题而忽视基本功夫;一个认为数学除了包含以上各方面之外还有更丰富内涵的教师,他的教学才会别具一格。"

本卷的目的之一就是通过文化的传播,使更多的数学教师别具一格。

庞加莱说:"数学有三个目的.它必定提供了一种研究自然的工具,但这并非一切:它具有哲学的目的,我敢坚持,它还有美学的目的.它必定能帮助哲学家揣摩数、空间、时间的概念.尤其是,数学行家能由此获得类似于绘画和音乐所给予的乐趣.他们赞美数和形的微妙和谐;当新发现向他们打开了意想不到的视野时,他们惊叹不已;他们感到美的特征,尽管感官没有参与,他们难道不乐在其中吗?只有少数有特权的人才能充分享受其中的乐趣,这是真的,对所有最杰出的艺术家来说,情况难道不也是这样吗?

"这就是为什么我毫不犹豫地说,为数学而数学是值得的,为不能应用于物理学以及其他科学而研究数学是值得的.即使物理学的目的和美学的目的不统一,我们也不应该牺牲两者中的任何一个.

"可是另外还有:这两个目的是不可分割的,得到其一的最好办法是对准另一个或者至少从来也不丧失对于它的洞察,这就是我在陈述纯粹科学及其应用之间的关系的本性时正准备试用证明的东西."(庞加莱.科学的价值)

过去,国人之间最大的不敬就是一句:"真没文化."在今天我们的老师的老师读过了《范氏大代数》,我们的老师读过了那汤松的《实变函数》,我们自己可能早已读过了韦伊的《代数几何基础》,而我们的子女也开始参加各种奥林匹克数学竞赛,但小心这一切并不能保证我们就有文化!我们不能没文化.

刘培杰

2008.7

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

第二辑(文化卷)

目　录　CONTENTS

特　稿　Special Features

1　高斯——数学王者　科学巨人

数学与哲学　Mathematics and Philosophy

116　几何学的起源

135　从原逻辑思维与计数的关系看原逻辑思维

域外高手　Master Extraterritorial

162　数学赞

164　一道美国奥赛题的探讨

194　一道 IMO 预选题的探讨

216　一道联赛题与 Garfunkel - Bankoff 不等式

科学随笔　Science Column

265　"随机时代"的精英处境与信仰危机

271　孤独虞美人——数学·诗歌·艺术断想

科普名篇　Popular Science Renowned

276　现代通信、密码与代数组合论

281 斯蒂夫·库克和利奥尼德·莱文：好办法难找

293 素因子分解与计算机

301 素性判断的一个重大进展

中国古代数学史 History of Mathematics in Ancient China

305 世界最古的几何学

317 开立方程序是如何由几何分割产生的

318 十三世纪的中国多项方程

360 从勾股比率论到重差术

370 刘徽的方程理论

数学游戏 Mathematics Game

384 从华罗庚教授研究过的一个数学魔术谈起

388 游戏在数学教育中的作用

数学前沿 Mathematics Forefront

393 Hilbert 的第十六问题：多少个环？

405 股票市场中的非线性动力学模型

课外活动 Extracurricular Activities

412 S 先生和 P 先生的新谜题（摘要）

数学新闻 Mathematics News

418 汉密尔顿致丘成桐代理律师的信

业界信息 Internal Information

421 首届数学文化节

科普天地 Popular Science World

431 "道同志合"荐好书——一封田廷彦的来信

432 科普作品概览

民科天地 Amate Urcareer

466 一封读者来信

469 胡楨与哥德巴赫猜想

479 蒋春暄黎鸣现象和中国民间数学

数海钩沉 Research on the Figures

491 函数的定义

493 由拣石子得到的定理

高斯——数学王者　科学巨人

沈永欢

如果上帝有一天突发奇想，把古往今来名垂青史的大数学家召集起来举行殿试，结果会怎样?最近一百多年的数学家比较一致的看法会是：阿基米得、牛顿和高斯应当位列三甲．这三位都在纯粹数学和应用数学两大领域掀起创造狂澜，他们在伟大数学家中处于最伟大的同一档次．我们这些平凡之人似乎不应当试图再去分出状元、榜眼和探花．

高斯1777年生于德意志不伦瑞克，生前就已头顶"数学之王"的桂冠．当时的德意志虽然经济落后、政治保守，但在文化上却处于德意志文化史上最辉煌的时期．高斯诞生时，文学巨人歌德已开始创作《浮士德》；而在高斯诞生7年之前，乐圣贝多芬也来到世间．有趣的是，这两位在各自领域中也都位居前三名：通常把莎士比亚、但丁和歌德列为欧洲诗剧作家前三位；而除了瓦格纳的狂热崇拜者外，音乐家和音乐爱好者大多同意贝多芬、莫扎特和巴赫是他们心中的音乐顶峰．

高斯生活在一个迅猛变化的时代，一个政治和社会发展的非常时期．革命与反动迭起，战争与和平交替．当他12岁时，法国大革命爆发；随着拿破仑称帝和入侵德意志，神圣罗马帝国在高斯29岁时寿终正寝；高斯38岁时拿破仑倒台，神圣同盟建立，普鲁士崛起；刚过70岁，1848年革命席卷欧洲大陆主要国家．同时，高斯生活的时代也是第一次工业革命的时代，工农业生产、科学技术和人们的日常生活都发生了深刻的变化，其影响极其广泛持久．

1　德国情势

如果按"国家"的通常定义，即占有一定地域，拥有一个不依赖于外部势力的权威政府的有组织社会，那么在高斯诞生时，并没有"德国"这样一个"国家"，有的是"德意志"，在其地域里大大小小邦国林立．当然也有一个"帝国"，即"神圣罗马帝国"．16世纪宗教改革运动后，它陷入天主教邦国与新教邦国之间的内部斗争．在一系列冲突之后，爆发了三十年战争(1618～1648)．战争使德意志满目疮痍，使它成为一个几乎没有军队、没有岁入、没有政府机关的"三无帝国"．诚如伏尔泰所说，它既不是神圣的和罗马的，也不是什么帝国．歌德在《浮士德》第一部第五场(写于高斯诞生前3年)中就借大学生之口发出这样的感慨：

"亲爱的神圣罗马帝国,
怎样才能撑得住?"[1]

在第二部第一幕第二场"皇帝的宫殿"中,他更辛辣地讥讽了这个帝国君不君、臣不臣、分崩离析、互相残杀的情景.[2]

三十年战争后德意志拥有主权的邦国的数目,由于计算方法不同而差别很大,大致在300到2 000之间.不算南部和莱茵兰的"帝国骑士",大约有300个能做某些独立行动的邦国:自由市、修道院长、主教和大主教、伯爵、侯爵、公爵,以及仅有的一位国王即波希米亚国王.其中级别最高的是7位"选帝侯",即莱茵河的特殊伯爵,萨克森公爵,勃兰登堡侯爵,波希米亚国王和科隆、美因茨、特里尔的大主教."帝国"以合法的形式维系邦国之间的联合.

高斯出生的不伦瑞克,据传说其前身是由撒克逊公爵布罗诺和丹克瓦尔德兄弟于861年建立的小镇.他们在奥克河边建造了一座城堡,取名为不伦瑞克.亨利(雄狮)公爵11世纪后半叶定居于此使城镇大大扩张.亨利的领地包括不伦瑞克和吕内堡的大部,后归其孙奥托公爵.腓特烈二世于1235年赠以不伦瑞克－吕内堡公爵称号,以不伦瑞克为首府.后经无数次分合,到1671年鲁道尔夫·奥古斯特公爵征服不伦瑞克,使它大大繁荣,成为仅次于莱比锡和法兰克福的贸易中心.1690年城里开设剧院,莱辛的《爱米丽亚·迦洛蒂》就是1772年在此首演的.1735年开始,卡尔一世公爵统治此地,文化和经济又有发展,建立了卡洛琳学院,即现在的不伦瑞克理工大学的前身.1736年它成为不伦瑞克－沃尔芬比特尔邦首府,1750年时人口两万.如同德意志其他小邦国一样,不伦瑞克－沃尔芬比特尔邦的经济支柱是农业,它是政府财政收入的主要来源.它也曾试图仿照法国和普鲁士搞工业,但不成功.王室还颁布了几道法令,禁止使用机械织布机,以保护组织得很好的纺织行会.坚固的古老社会秩序似乎毫无动摇,也似乎没有根本变革的迹象,但这只是像剧烈暴风雨到来之前的窒闷天气.这期间取得真正进步的领域不多,国民教育是其中之一.尽管义务教育尚未严格推行,但大多数人都会读会写并会做四则运算,有些地方甚至还教基本的拉丁文.随着类似卡洛琳学院的一批学校的建成,教会失去了教育中的部分领地,在新教各邦中也失去了对大学的控制.

卡尔一世于1780年去世,由长子费迪南德公爵继位.按当时标准,费迪南德算得上有文化素养、有能力、有远见.他的老师就是卡洛琳学院的奠基者,以启蒙运动和理性基督教精神教育费迪南德.费迪南德于1766年游历英格兰、法兰西和意大利,研究文化和艺术.他与狄德罗和米拉波通信,任命莱辛为沃尔芬比特尔图书馆馆长.七年战争中他建立军功,成为腓特烈大帝最喜欢的侄子.

从经济上看,费迪南德公爵的开明专制主义对不伦瑞克好处不大,它未能缩小甚至还扩大了正在上升的第三阶层——未来的资产阶级同大多数贫困的农工和学徒之间的差距.像18世纪德意志其他邦国一样,不伦瑞克在18世纪中财富并未增加,生产力没有多少发展.中产阶级财富的提升是以社会其他群体的下降为代价实现的.

不过从文化上看,当时德意志正处于启蒙运动和古典人文主义这一德意志文化史上

最光辉灿烂的时期.一般认为这个时期起于莱辛诞生的 1729 年,终于歌德逝世的 1832 年.这一百多年中德意志文化科学界英才辈出,群星璀璨,德意志音乐、德意志诗歌、德意志哲学、德意志科学声誉远播全球,永远成为人类文明不朽的纪念碑.

这是一个反抗文化领域中猥琐、褊狭和市侩作风的时期.歌德就曾自豪地说:"你们可以像为布吕歇尔(在 1813 年 10 月莱比锡战役中率普鲁士军队打败拿破仑的将军 —— 引用者)塑像一样为我树立一座纪念碑,他把你们从法国人手中解放出来,我把你们从市侩作风中解放出来."[3]

这个时期促成了从宗教和来世价值标准到世俗和现世观念的重大转变.它崇拜人,崇拜作为个体的个人和作为集体的人类,认为充分实现每个人的个性是社会的最高目标,推崇人性中自强不息的一面.歌德的《浮士德》第一部于 1790 年出版,整部作品完成于他去世前一年,好像是古典人文主义的终曲.第一部反映了狂飙突进时期的某些叛逆性格,第二部则展开了不断前进、无尽追求人生完美的信念,这正是现代文明最突出的特征之一.

总的来说,这一时期的作家和思想家都不大关心政治,但有着人类大同和世界公民的观念,以"世界公民"的称号而自豪.席勒说:"我作为一个不替任何君王服务的世界公民写作.我早就丢掉祖国,用它来换取全世界."[4] 拿破仑战争时期,德意志民族主义已占支配地位,但歌德仍拒绝让他写仇恨法国的诗歌的要求.1830 年埃克曼对歌德说:"人们都责怪您,说您当时没有拿起武器,至少是没有以诗人的身份去参加斗争."他回答说:"我心里没有仇恨,怎么能拿起武器 …… 本来没有仇恨,怎么能写表达仇恨的诗歌呢 …… 我并不仇恨法国人 …… 对我来说,只有文明和野蛮之分才重要."[5] 关于普遍和平和人类兄弟友爱的观念是古典人文主义的根本理想之一.席勒的《欢乐颂》表达了这种观念,而贝多芬在《第九交响曲》中则把它谱成世代传唱的激动人心的乐曲.

在 18 世纪,科学从形而上学的桎梏和神学的浪漫主义中解放了出来,取得了空前崇高的地位.数学方面,代数学得到扩展和系统化,解析几何原理得到比较一般的表述,画法几何初露端倪,微积分学迅速发展并被用来解决几何、力学和物理学中的问题,建立了函数的一般理论,提出了方程和无穷级数理论;力学方面,一些基本原理得到了概括,数学分析系统地应用于力学问题,流体力学研究有所进展,气体分子运动论开始出现;天文学方面,在牛顿力学的基础上构造了庞大的动力学体系,三体问题得到研究,望远镜有了改进,发明了消色差透镜和量日仪,康德和拉普拉斯提出了太阳系起源的理论;物理学方面,各个分支中都取得可观进步,尤其是电和磁的研究进步飞快;化学、气象学、地质学、地理学、大地测量学、生物学、医学等都有很大进展;技术方面也取得了巨大进步,农业上发明了打谷机和切草机,纺织工业中发明了纺织辊、水力纺纱机、各种新式织机和新的漂染方法,道路桥梁建造大有进步,火车、蒸汽车和轮船开始出现,酸和碱开始大规模生产,还出现了煤气照明灯.

当然也要指出,在古典人文主义中发展起来的唯心主义哲学所提出的精神世界与现实世界的分裂,对德意志的自由主义和民主主义运动产生了麻痹作用.另外古典人文主义传统的体现者最关心美学和美的领域,这种唯美主义在精神上必定是贵族的,因而必

定会加强反民主潮流.

2　贫寒之家

高斯这个姓在不伦瑞克北部很普遍,拼法不下七八种,有 Gauss,Gooss,Goos 等.由于博赫搜寻了教堂纪事和账簿,到 20 世纪 20 年代末,已经有了关于高斯祖先的精确资料[6].高斯的家谱与名门望族无缘,他的曾祖父欣里希·高斯住在弗尔肯罗德,结婚3次,生有 12 个子女.高斯的祖父于根是欣里希第三位夫人所生的第二子.

新公民记录本显示,高斯祖父于1739年1月23日提交申请,定居不伦瑞克.他在离开弗尔肯罗德前结婚.在不伦瑞克市政厅的记录中,于根登记的身份是零工,以泥瓦匠和屠宰工应招.

1739 年,于根住进骑士街 10 号的房子.与房东订的契约规定于根每年应付给房东 5 塔勒(德意志 15 至 19 世纪的银币,1 塔勒值 3 马克)100 芬尼;房东去世后此房即归他所有.房子很狭小,附近居民称它为"姜饼片".夫妻俩在此生育了 3 个儿子,1 个女儿.1751 年于根买下位于文登格拉本街 100 号(后改为威廉街 30 号) 的房子,议定售价 900 塔勒.他当时付了400塔勒,其余500塔勒作为向市长的抵押贷款.于根 1774 年7月5日去世,死于肺痨.

特稿

高斯的父亲格布哈德·迪特里希是于根的长子,生于1744年.格布哈德1768年结婚,结婚时太太带来了 150 塔勒的嫁妆.1769 年,长子约翰·格奥尔格·海因里希出生.1775 年他同两兄弟达成分家协议,房子作价给他,他则相应付一笔钱给两兄弟.他从市长那里抵押借贷了 125 塔勒,加上积蓄,付清了该给的钱.

格布哈德的第一任妻子殁于1775年,时年 30 岁,死于肺痨.1776 年,他与邻近村庄的石匠女儿多萝特娅·本察结婚,她带来了 100 塔勒的嫁妆.多萝特娅生于 1743 年,没有上过学校,不会写,也几乎不能读.1777 年4月30日,未来的数学王者、科学巨人卡尔·弗里德里希·高斯出生于格布哈德的小屋之中.

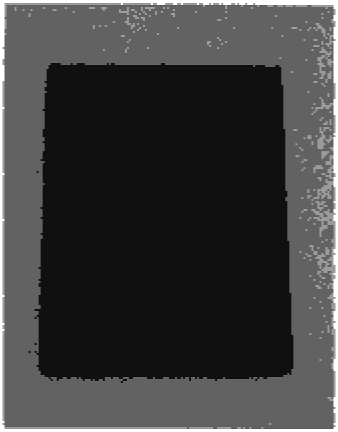
格布哈德的头衔是水工师傅,但干过许多活计.他当过园丁,照管过运河,做过砌砖工.他最后的职业是园艺,也协助一个商人打理他在不伦瑞克和莱比锡的事务.他能写会算,所以也在一家公司管管账.格布哈德诚实正派,受人尊重.他坚持不懈地劳作,使家境有所改善,不过生活从来没有达到舒适的水平.他在家里很粗暴,对孩子很严厉,下手很重.高斯后来说其父"在许多方面值得尊敬,也确实受人尊重,但在家里却独断专横,粗野而无教养".[7]

高斯的母亲婚前当过 7 年女仆.从高斯口中我们得知她与高斯父亲婚后生活不甚愉快,"主要因素是物质生活条件,同时也是由于两人性格不合."高斯说他母亲是一位"非常杰出的女性"[8],小时他对母亲比对父亲要亲密得多.高斯是多萝特娅唯一的儿子,顽固的父亲曾力图让高斯走他的老路,亏得母亲总是站在高斯一边,想方设法呵护他,终于战胜了他的父亲.我们真得对这位伟大的女性鞠躬致敬,没有她可能就不会有后来的高斯,数学发展的损失就会难以估量.高斯 19 岁时,多萝特娅曾问高斯的好友 W·波尔约她

儿子会不会有出息．当她听到回答说高斯会是"欧洲最伟大的数学家"时，不禁涕泪滂沱．从此儿子一直是她的骄傲．她身体很好，虽然最后4年失明，但活到97岁高龄．高斯很孝顺母亲，当母亲失明后，他不让别人照料她，只由他一人侍候，在她病时一直护理着她．母亲同爱子在格廷根住宅中一起生活了22年，于1839年仙逝．



1886年时高斯出生地的照片
此建筑于1944年10月毁于空袭



现在威廉街30－34号悬挂的
作为高斯出生地的纪念铜牌

不伦瑞克属于新教地区，尽管那时宗教在日常生活中仍起很大作用，但高斯的双亲宗教倾向不甚强烈，不像他们所属那个阶层的多数人那样狂热笃信基督教．

在高斯的长辈中，值得一提的是高斯的舅父即多萝特娅的弟弟约翰·弗里德里希·本察．他聪颖非凡，机敏能干，专心致志于编织，竟然无师自通，达到艺术织锦的水平．聪明的舅舅在外甥身上发现了类似的特点，尽自己所能以好奇的观察来唤醒孩子敏捷的逻辑能力．随着舅舅的不时指点，两人感情不断加深．本察于1809年英年早逝，使高斯十分伤心，哀叹"一位天生的天才就这样去了！"[9]

3　心算神童

对于高斯的童年和少年时代，我们只知道少量典型的有意思的事情．这方面的主要来源是高斯本人，他在晚年时喜欢回忆他的童年．很多轶事已难于证实，比较可靠的当是萨托里乌斯写的《回忆高斯》[10]和《高斯》[11]．萨托里乌斯是格廷根大学地质学教授，高斯的学生和挚友，高斯葬礼上的第二位致悼词者，所说所写应当是比较可靠的．

高斯幼年时就显得智力超常，问了家里人字母的发音后，在上小学前已自己学会阅读．他的心算能力更是异乎寻常．他父亲夏天时干砌砖活，手下有一些砖瓦工，每到星期天得发工资．一天他父亲算完准备发钱时，突然听到3岁的小高斯尖声说："爸爸，您算错了，应当是……"这里高斯说了一个数．核对下来，孩子说得一点不错．后来高斯常开玩

笑说自己在会说话之前就已会算数.

高斯还回忆过童年时有一次险些丧命.那时他家边上有一条小河连着奥克河,春天河水暴涨,水冲到他家小屋旁,一下把正在玩耍的小高斯冲进河里,亏得正巧有一个工人在那里,把他救了起来.我们也得感谢这位无名氏,没有他见义勇为,高斯就会小命不保,数学就会蒙受不可弥补的损失.

高斯7岁时进圣·卡塔琳纳小学.学校由一位名叫比特纳的人掌管.教室潮湿低矮,地板高低不平,一边能看到教堂两座高高的哥特式尖塔,另一边则对着马厩和贫民窟.教室里坐着上百名学生,比特纳手执教鞭走来走去.一次他布置了一道算术题,让孩子们把1到100这100个数加起来.老师刚说完题,小高斯就把石板放到讲桌上,用不伦瑞克方言说:"就是它!"老师嘲讽地瞟了他一眼,但当算得最慢的学生交上石板,他一块一块翻到最后高斯的石板时,惊讶地发现上面只写着正确答案"5 050".问他答案怎么来的,他回答说:"1加100得101,2加99也得101,3加98还得101,一共有50对101,所以得5 050."后交的孩子一步一步往后加,都算错了,挨了鞭子.高斯年老时对此事津津乐道,非常得意.这件事也使比特纳意识到这个9岁孩子天赋非凡,自掏腰包从汉堡定购了较好的算术教科书送给高斯.孩子很快学完了这本书,比特纳只得说:"他已超过我,我再也没有东西可教他了!"

幸运的是比特纳有一位助手巴特尔斯,对数学极感兴趣.他很快发现了高斯的天才,与高斯产生了热烈的友情.两人一起学习,互相帮助,扩充手头拥有的代数和分析入门书上的证明.这样,高斯在11岁时已独立掌握一般形式的二项式定理,开始了解无穷级数理论.比特纳和巴特尔斯还请高斯父亲去学校讨论如何进一步教育孩子的问题.父亲问怎样才能让小高斯获得继续学习的机会,回答是争取地位很高的人物的资助.顽固的父亲终于让步,答应孩子再也不用每晚织出规定数量的亚麻.据说小高斯回家知道这事后就立即把纺车搁到后院,后来把它砍了当引火柴.

1788年,由于比特纳的帮助,高斯进了国民学校.该校教学老式,课程即使按当时标准也很陈旧,而且不太平衡,过分强调古代语文尤其是拉丁文.不过这倒使高斯打下了坚实的拉丁文基础,还学会了运用高地德语(即路德翻译《圣经》所用的德语).高斯很用功,冬天晚上,为了节省,父亲总是让孩子早早上床睡觉.小高斯就在芜菁中间挖个洞,塞进粗布卷,倒上一点油作为灯,在阁楼上凭借着这暗淡的"灯"光苦读到半夜,直到又冷又困才睡.

巴特尔斯于1788年进入卡洛琳学院.他向不伦瑞克的几位显贵人物特别是学院的数学、物理和自然史教授齐默尔曼介绍了高斯的才能.齐默尔曼地位很高,1786年被授予枢密顾问头衔,后来还是费迪南德公爵的私人顾问.齐默尔曼看出高斯在科学上前程远大,建议费迪南德公爵召见高斯.

据说听差到高斯家时,开门的是高斯的哥哥约翰.他眼泪汪汪,不肯让听差进门.当得知要见的是他弟弟,那个"老把鼻子钉在破书上的小饭桶",这才让进门.高斯后来举世闻名时,兄长还是终年辛劳、默默无闻的工人.这位仁兄后来说:"早知如此,我现在就会是教授了.本来是让我去的,但我不想去那城堡."

4 学院三载

十四岁的高斯初次晋见费迪南德公爵时有点腼腆，显得局促不安.公爵很快看出了高斯的才能.高斯回家不几天后，国务大臣就送来一份对数表.1791年6月28日，公爵办公厅颁发命令，"支付齐默尔曼顾问官5塔勒，为一位名叫高斯的青年购置数学设备."从管家的账本上看，每年还给高斯10塔勒，另外还支付齐默尔曼别的相应开销.齐默尔曼对高斯的帮助和影响持续到拿破仑摧毁不伦瑞克－沃尔芬比特尔邦的1806年.从高斯与奥尔伯斯的通信中可以看出，高斯对齐默尔曼一直心怀尊敬和感激，两人的友谊持续到齐默尔曼去世(1815年).

由于得到公爵资助，高斯于1792年2月18日注册于卡洛琳学院.在第462名下，登记着不伦瑞克的Johann Carl Friedrich Gauss.此后他从未再用Johann之名，所有论著都用Carl Friedrich Gauss的大名.1792年6月12日，正式规定前面说到的"款项在其就读卡洛琳学院期间不间断地予以支付".公爵还额外从自己手里拨给高斯不少钱.



卡洛琳学院

高斯入学时，学院声誉已臻顶峰.这类学院其实就是预科学校，介于现代的高级中学和综合性大学之间.未来的政府官员、建筑师、工程师、机械师、商人、农场主等可以在此得到培训，以适应将来职业和生活的需要.卡洛琳学院讲授的课程有古典和现代语言，哲学，通史、教会史和文学史，统计学，国家法和教会法，数学，物理学和自然史，解剖学，德文诗词和雄辩术，美学，绘画，音乐，舞蹈，击剑，骑马，玻璃抛光，车工实习等.学院不只着

眼于实用，而是重在培养学生成为新文化的载体．学院聘请了一批名师，学术界盛赞学院培养的青年以其知识广博、勤勉努力和道德完善而显著区别于他人，学院被认为是优秀青年的摇篮．

高斯入学时的科学和文学修养已远远超过同龄人．他熟练掌握了初等几何、代数和分析知识，经常在学到之前已发现这些学科中的一些重要定理．他脑中蕴藏着大量算术信息，具有很深的数论洞察力．他广泛进行计算，列出表格，观察计算结果．这使他非常熟悉许多个别的数，并提高了自己的计算能力．

高斯在卡洛琳学院勤奋地学习古代和现代语言，同时也刻苦钻研高等数学，认真研读牛顿、欧拉和拉格朗日的著作，尤其为牛顿的伟大精神所吸引．他对牛顿很敬仰，也很熟悉牛顿的方法．这时他已确立了终生的探索模式：通过广泛的经验考察作出猜想，得到新的省悟，再把它用来指引进一步的实验和考察．通过这种模式，他独立发现了关于行星距离的波得定则和有理指数的二项式定理，发现了素数分布规律即现称的素数定理，产生了非欧几何的想法，发现了数论中的二次互反律，独立发明了最小二乘法，研究了算术－几何平均．

特稿

波得定则是太阳与行星之间距离的经验公式．提丢斯于1766年提出此公式，但到柏林天文台台长波得于1772年公布后才为公众熟知．以 n 表示行星序号，a_n 表示第 n 个行星到太阳的距离（天文单位，地球与太阳之间的距离为1天文单位），则现在把该定则表述为

$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^{n-2}$$

对水星取 $n = -\infty$．这样，对水星（$n = -\infty$）、金星（$n = 2$）、地球（$n = 3$）、火星（$n = 4$）、木星（$n = 6$）、土星（$n = 7$），分别得0.4，0.7，1.0，1.6，5.2，10.0，而它们到太阳实际距离（天文单位）顺次为0.39，0.72，1.00，1.52，5.20，9.54，符合得很好．高斯独立发现此定则表明他很早就对天文学有浓厚兴趣．后来在 $n = 5$（$a_5 = 2.8$）处发现小行星带，其中发现的第一颗小行星谷神星同高斯有密切关系（按2006年8月24日国际天文学联合会大会的决议，现在应称谷神星为矮行星），我们会在后面“一算成名”这节中详细叙述这件事；$n = 8$（$a_8 = 19.6$）处发现天王星；但对海王星，$n = 9$，$a_n = 38.8$，而实际距离为30.06，此定则失效．

二项式定理讨论的是 $(1+x)^\alpha$ 的展开式．当 α 为自然数时，中国宋代杨辉（约公元13世纪中叶）已经得到，就是著名的“杨辉三角”．法国的帕斯卡于17世纪中叶对此也有深入研究．但当 α 不是自然数时，展开二项式就得无穷级数

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

高斯以前的数学家对此就没有进行细致的分析，以致还产生过（$x = -2$，$\alpha = -1$）

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

这样的“悖论”．高斯和巴特尔斯一起探讨这个问题时，对 α 不是自然数时的所谓“证明”很不满意．对于数学证明，高斯后来在致奥尔伯斯的信中作过生动的解释：“对于证明这个词，我指的不是律师所用的含意，他们把两个一半的证明合成一个整个的证明．我指的

是数学家所用的含意，对于他们 1/2 的证明等于 0！对于证明要求任何怀疑都成为不可能。"[12] 高斯对 a 为有理数的情形给出了一个证明，其崭新之处在于确定(用现代语言)右边的无穷级数收敛的条件，这样他就成为数学分析严格化的最早开拓者，随同柯西和魏尔斯特拉斯等人的工作，使得其后的数学分析与牛顿、欧拉和拉格朗日时代的数学分析迥然不同.

在卡洛琳学院学习期间，高斯不断进行算术试验. 有一次，他通过巧妙的展开和插值，用两种方法把一个平方根求到 50 位. 他 14 岁时在公爵派人送来的对数表的最后一页上，用德文写着

$$\text{Primezahlen unter } a(=\infty)\, a/\ln a$$

这当然就是著名的素数定理：小于给定正整数 a 的素数个数当 a 趋于 ∞ 时渐近于 $a/\ln a$，勒让德此前已接近于发现这个规律. 1792 至 1793 年间，高斯通过考察以一千个相邻整数为一段中的素数个数，作出了更精确的发现：对于大的 a，素数的"平均分布密度"是 $1/\ln a$. 奇怪的是高斯把这条优美的定理留给自己珍藏，不予发表. 直到五十六七年之后，1849 年 12 月 24 日，他才在致恩克的信中提及此事[13]. 至于这一定理的严格证明，则要等到一个世纪之后：1896 年，阿达玛和 C · J · 普森各自独立地证明了素数定理.

在学院的最后一年里，高斯硕果累累. 他发现了"欧几里得几何不真的假定"下成立的某些结果. 这是非欧几何的肇始，我们在下面专有一节讨论.

高斯通过归纳发现了后来被他称为"算术宝石"的二次互反律. 欧拉已归纳地接近过这一命题；勒让德曾试图证明它，但忽略了一个难点. 高斯同时引进了他在数论概念和记号方面的革命性发明 —— 同余. 他首次给出了二次互反律的严格证明，有关详情我们将在后面叙述.

高斯还发明了"最小二乘法"，这种方法能使不可避免的观测误差对计算结果的影响尽可能减少. 1750 年前后，某些间接的天文观测导致一些观测方程，从而提出了如何由此得到"最可能的解"这一问题. 英国的辛普森于 1757 年首次提出正、负误差应当是等可能的. 拉普拉斯于 1774 年提出，从 n 个观测方程中确定 q 个未知量应基于这样的条件：偏差的代数和为零且偏差的绝对值之和为最小. 由此他能把 n 个方程减为 q 个，从而解出 q 个未知量. 这一方法被用于从子午线弧段的测量确定地球的形状. 勒让德于 1805 年发表了这一方法并提出了"最小二乘法"这个名称. 高斯于 1795 年导出了误差概率律，独立开发了最小二乘法. 但他发表较晚，首次发表是在《天体沿圆锥曲线之绕日运动理论》的第二篇第三章中(在后面"天文著作"一节中对此书有比较详尽的讨论).

高斯在卡洛琳学院期间还研究了算术 - 几何平均，不过有关情况大多只能从他手写的一些注记中获得一鳞半爪，很可能最早的兴趣来自他对此进行的数值计算. 算术 - 几何平均的定义如下：给定两个正数 m,n，其算术平均为 $m'=(m+n)/2$，几何平均为 $n'=\sqrt{mn}$. 不断进行这两种平均，即令 $m''=(m'+n')/2$，$n''=\sqrt{m'n'}$，…，得到两个数列 $m',m'',\cdots;n',n'',\cdots$，它们有相同的极限 $M(m,n)$，高斯称它为 m,n 的"算术 - 几何平均". 这个名称出现于一个笔记中，施莱辛格认为写作时间很可能早于 1797 年，绝对不会晚于 1798 年. 这个笔记中讨论了 $M(1,1+x)$ 的级数展开，还计算了它的反函数，建立

了两种级数的联系.后来的笔记还讨论了算术－几何平均与椭圆积分的联系.

高斯在卡洛琳学院时结识了一些年青人并建立了深厚友谊,其中有埃森伯格和伊德.埃森伯格的父亲是该院教师,曾翻译过莎士比亚的一些剧本,受到当时德意志最著名的诗人的赞赏.他是高斯的终生挚友,后来成为普鲁士政府的高官.伊德后来成为数学家、天文学家,在俄国一所大学执教,可惜英年早逝.还有一位梅耶霍夫,几年后帮助高斯润色其《算术研究》的拉丁文.

5　大学攻读

1795年8月21日,费迪南德公爵办公厅发布命令,"对即将赴格廷根的名为高斯的大学生每年支付158塔勒作为奖学金,并为他提供免费伙食."1795年10月11日,高斯离开不伦瑞克,10月15日在格廷根大学注册入学.格廷根位于不伦瑞克以南约105千米,属汉诺威邦,对不伦瑞克而言它已是"外国",因此高斯去格廷根有点违反费迪南德公爵的意愿,后者想让他进当地的海尔姆斯台特大学.但公爵仍慷慨资助高斯,1801年起每年的资助提高到400塔勒,1803年更是提高到600塔勒,此外还提供免费公寓.高斯后来说,他想去格廷根的主要原因是那里有很好的图书馆.

德意志在同一时代建立了3所大学——哈雷大学、格廷根大学和埃朗根大学.格廷根大学于1737年由英格兰国王和汉诺威选帝侯乔治二世创建并给予慷慨资助,很快就在德意志大学中处于领先地位,直至19世纪末.它从建校伊始就强调学术独立和思想自由,是一个活跃的文化科学中心.该校当时占有显著地位的学科是语言、神学、法律和医学.德意志各地尤其是西部和南部出身显贵的青年,只要有志于文化和学术的,都云集此地.外国尤其是英国也很关注格廷根,也有来自北欧的学生.校园里弥漫着自由研究和独立探索的气氛,在这样的环境中高斯当然如鱼得水.

格廷根大学拥有不少名教授,高斯入学时最有名的是海涅,一位纯粹的古典主义者,认为古代语文和古典文学作品是训练心智真善美的手段.听他课的不仅有学语文学的,还有全校各系的学生特别是学法律的学生.

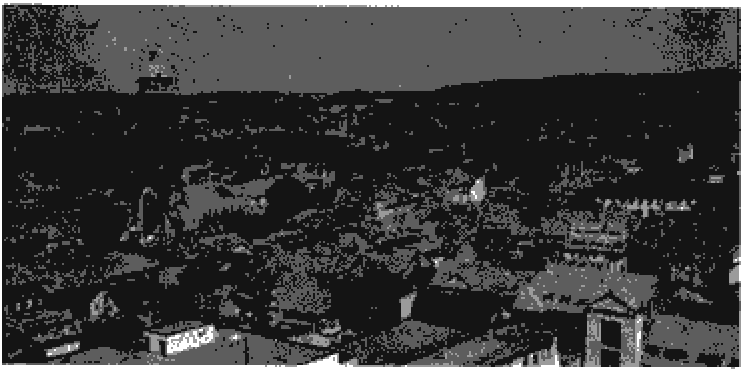
年青的高斯初到格廷根时住在戈特马尔街11号.一开始他拿不定主意将来搞语文学还是搞数学.成为语文学家生活前景更有保障,前程更加辉煌,所以有一段时间他听海涅的课.事实上海涅的课也确实比数学教授卡斯滕纳的课更有吸引力.卡斯滕纳1756年成为格廷根大学数学教授,著有《数学史》(4卷),这是出自著名学者的第一本数学史著作;还有关于代数、几何和流体力学等的论著.他写的论文和书籍并不出色,作为数学家整体来看比较平庸.可以想到以高斯的数学天才,对他肯定不满意.高斯晚年时还提到过卡斯滕纳.1845年12月22日他在致舒马赫的信[14]中写道:"卡斯滕纳具有天生的突出理解力,不过十分奇怪,他是在数学之外的所有问题上具有这种能力.他甚至在一般地谈论数学时也具有这种能力,但在数学之内,这种能力却常常完全丧失."物理学教授利赫滕贝格也对高斯有吸引力,因为后者称他为"格廷根最耀眼的光彩".

1796年3月出现了戏剧性转折.作为系统研究分圆方程的副产品,高斯得出可用直

特
稿



高斯时代的格廷根大学



现在的格廷根旧市中心鸟瞰

尺圆规作出的正多边形的条件，并得以宣布正 17 边形能用直尺圆规作出（见下节“出手不凡”）. 这是两千年来尺规作图问题的首次重大突破，也使高斯决心投身数学和自然科学. 高斯把自己的发现告诉了卡斯滕纳，但后者毫不关注，甚至加以嘲讽. 由于卡斯滕纳炫耀过自己的诗集，所以高斯就称他为“诗人中最好的数学家，数学家中最好的诗人”[13]（这似乎从富斯的一句话演化而来，富斯说欧拉的《音乐新理论原理》“对音乐家而言几何学过多而对几何学家而言则音乐过多”）. 不过公平地说，卡斯滕纳也不是对高斯毫无影响，他是有经验的教师，不错的数学史家，对平行公设也有兴趣，似乎也有平行公设独立于欧几里得几何其他公理的想法，这对 W · 波尔约和高斯可能起过作用.

高斯在格廷根大学贪婪地阅读数学经典著作和期刊以及其他学科的许多书刊. 由于大学图书馆很好地保存了学生借书的记录，使我们能知道高斯在大学期间（除一个学期外）读些什么. 下面是高斯读大学 3 年里借阅图书的分类统计（多卷本著作和科学期刊一卷均作一本，1795 ～ 1796 下学期的借书登记单佚失）.

学期 \ 本数 \ 门类	科学总论	数学	天文学	力学和物理学	历史和哲学	文学和语言学	音乐	科学期刊	其他	合计
1795 ~ 1796 上学期		1	2		1	15		16		35
1796 ~ 1797 上学期	3	6	9	1		4		23	1	47
1796 ~ 1797 下学期	3	6	1	3	1	5	1	13	2	35
1797 ~ 1798 上学期		3	1	1	1	1	3	41	1	52
1797 ~ 1798 下学期		1	2	1	3	4		13		24
合计	6	17	15	6	6	29	4	106	4	193

可以看出，高斯读书面很广，文理兼及，数量颇多，平均每月读 8 本．从所读书目看，他开始时确实还没有选定自己的未来．

高斯非常重视选读经典著作．数学方面，光欧拉的书就读了 6 本，包括其著作集、《微分学原理》、《积分学原理》、《音乐新理论原理》等；还读了牛顿和费马的著作集．力学方面，读了拉格朗日的《分析力学》以及克莱罗、拉朗德的著作．这为他当时和以后的研究打下了坚实基础．文学方面，他读了古罗马政治家、演说家、哲学家西塞罗和古希腊作家卢奇安的著作，还读了法国作家勒萨日的《吉尔·布拉斯》，英国作家理查逊的《克拉丽莎》，意大利诗人梅塔斯塔齐奥的著作集，席勒的《塔里娅》等．他甚至还读过关于钢琴的书．

高斯很关注科学的最新进展．在其所读的书中，期刊占了一半以上，可见他在当大学生时已十分关心科学各个部门的发展情况，为其研究开辟了广阔的视野．

高斯在 3 年大学生涯中取得了丰硕的研究成果．下面是一张按时间顺序开列的不完全清单．

1795 年 10 月，应用自己开发的最小二乘法．

1796 年 3 月 30 日，发现圆内接正 17 边形能尺规作图．

4 月 8 日，证明 -1 是所有形如 $4n+1$ 的素数的二次剩余，是所有形如 $4n+3$ 的素数的二次非剩余．作出二次互反律的第一个证明．

4 月 29 日，推广二次互反律．

6 月 22 日，开始研究二元二次型．

7 月 10 日，发现每个正整数是 3 个三角形数之和．

7 月 27 日，开始二次互反律的第二个证明．

1797 年 1 月 8 日，开始研究双纽线函数．

2 月 4 日，关于 2 作为二次剩余或二次非剩余的素数特征的定理的第二个证明．

3 月 21 日，作出关于双纽线的重大发现．

7 月 22 日，证明两个最高次项系数为 1 的有理系数多项式之积，其所有系数不可能全是整数．

10 月 1 日，发现证明代数基本定理所依据的原理．

1798 年 4 月，作出关于二次型的发现．



高斯 1796 ~ 1798 年在格廷根的住所

高斯在格廷根大学求学时交友很少. 和他私交较好的有前面提到过的伊德, 他也得到了费迪南德公爵资助, 比高斯晚半年入学, 读了 5 年. 伊德于 1803 年去莫斯科当数学教授, 不幸因不适应俄国气候而于 1806 年去世. 1797 年, 前面提到过的埃森伯格也从不伦瑞克来格廷根求学, 使高斯多了一个老熟人.

在高斯的朋友小圈子中还有布兰德斯, 他后来是布雷斯劳大学和莱比锡大学数学教授; 艾赫霍恩, 攻读法律, 后任普鲁士宗教大臣; 本岑贝格, 高斯后来帮助过他写关于重力、空气阻力和地球转动的论著.

高斯那时最亲密的朋友是 W · 波尔约, 匈牙利一个古老贵族的后裔. 波尔约年幼时安静内向, 极少与小学同伴一起玩耍, 但特别喜爱语言、诗歌和算术, 被视为神童. 1796 年 9 月他陪同一位男爵来格廷根, 很快与高斯结下深厚友谊. 他后来写道:

"我们来到格廷根 …… 逐渐与那时是那里的大学生高斯熟悉起来. 时至今日, 尽管已远不能同他相比, 但我仍是他的朋友. 他极度谦逊, 从不显山露水. 不像同柏拉图相处三天就能看出他的伟大, 同高斯相处甚至几年仍不能认识到他的伟大. 我未能弄清怎样才能打开这本静谧的'无题之书'并读懂它, 这是怎样的耻辱 …… 热爱数学(没有外在表露)和道德一致把我们紧密联结在一起. 我们经常外出散步, 常常一两个小时不开口, 但两人心里都知道对方在想什么."[16]

高斯也说过 W · 波尔约是唯一能理解他关于数学基础的观点的人. 两人初次邂逅时, 波尔约向高斯提到他关于直线的定义以及证明欧几里得第五公设的几种途径, 高斯听后大喜, 说出这么一句话: "你是天才! 你是我的朋友!" 高斯还送给波尔约他作出正 17 边形可以尺规作图发现的拍纸簿作为纪念. 1797 年两人一起步行到不伦瑞克. 波尔约拜访了高斯父母, 前面说到高斯之母听到波尔约盛赞高斯后喜极而泣, 就是这时发生的事.

1798 年 9 月 28 日高斯回不伦瑞克, 波尔约留在格廷根直到次年 6 月. 波尔约曾动情地谈到他们分别的情形:

"离别时我哭得像个孩子. 我禁不住往回走, 但最终还是控制住自己. 从最后一座能看到格廷根的小山顶, 我又一次回头凝视. 这个离别景象永远刻在我心头."

“我于1799年5月25日陪他爬上面向不伦瑞克的一个小山顶.再也不能相见的感觉难以用言语形容,即使用眼泪汪汪这样的话也不能表达;未来之书闭上了.我们几乎无言地痛苦地握手告别.我们之间的区别在于,他在命运和荣耀之神带领下回不伦瑞克,而渺小得多的我,虽然问心无愧地平静地回格廷根,嗣后却只能作为许多价值不大的人组成的队伍的一员继续为真理献身.”[17]

两人尔后再未谋面,但仍不断鸿雁往返.两人之间的书信(包括分别前的)共有48封,其中W·波尔约写给高斯的有26封,高斯写给W.波尔约的有22封.高斯最后一封信写于1848年4月20日.

6　出手不凡

在1796年4月的《文献通报》上,刊载着下列通告[18]:

“粗通几何学的人都熟知,多种正多边形,即正3角形、正4边形、正5边形、正15边形以及不断加倍上述图形边数的正多边形,都能几何作图.

“这在欧几里得时代已经得到;一般地说,看来此后初等几何领域没有什么进一步的发展;至少据我所知,在这方面还没有超越上述限制的成功努力.

“因此我想……发现除了上述这些正多边形外,还有许多正多边形,例如正17边形,能够几何作图,是值得关注的.这一发现实际上只是一个较大的总括性理论的特殊结果,这一理论现在尚未完成,一旦完成即将公布于世.

卡尔·弗里德里希·高斯

在格廷根攻读数学的大学生

“应当提出,高斯先生年方十八岁,在此地即在不伦瑞克致力于哲学、古典文学和高等数学,各方面都取得同样成就.

E.W.A.齐默尔曼,教授

1796年4月18日”

这是高斯发表的第一篇东西.他后来谈到在格廷根大学研读欧拉和拉格朗日的著作时说:“我满怀激情和活力,变得生气勃勃,踏着他们的足迹,我感到充满了勇气,决心把这门广阔的学科推向前进.”[19] 他作出这个伟大发现是在1796年3月30日,这从根本上决定了他未来的方向.那一晚的情景一直活生生地铭刻在他心底.高斯作出这个发现之时,也是拿破仑率领他的“意大利方面军”离开巴黎出发之日.正是通过意大利战役,拿破仑的声誉才如日中天.高斯常向朋友提及这一点,认为这有特殊意义.

从上述通告我们首先可以看出,高斯非常清楚自己发现的意义.高斯曾向W·波尔约表示,要在自己的墓碑上饰以正17边形.这表明他十分珍爱自己的这一发现,为它感到自豪.但后来在不伦瑞克建高斯纪念碑时,石匠说所有人都会把刻的正17边形看做圆,因此在纪念碑基座背面刻了17点的星形.这使人联想起阿基米得墓碑上刻着球内切

于圆柱面的图形.雅各布·伯努利也曾要求在其墓碑上镌刻对数螺线 $r = a^{\theta}$,并刻上墓志铭"EADEM MUTATA RESURGO"("世事虽变兮余如初").W·波尔约曾说,在高斯墓上不应当建纪念碑,只应当种一颗苹果树,以纪念3个苹果.第一个指伊甸园的禁果,第二个指据说导致牛顿发现万有引力的苹果,第三个指高斯的发现.可能波尔约不知道,正是高斯辛辣地嘲讽了这第二个苹果:"蠢呀!一个好管闲事的笨伯去问牛顿他是怎么发现万有引力定律的,牛顿看到他得与一个只具儿童智力水平的人打交道,又想摆脱烦恼,就说一只苹果掉下来,打在他鼻子上.那人听完非常高兴,心满意足地走了."[20]

从上述通告我们还可以看出,高斯并不是用直尺和圆规"具体地"作出正17边形,事实上也没有什么资料可以使我们追溯高斯究竟是怎样得到这个结论的,但《算术研究》(后面会有一节专门介绍此书)第七篇完整系统地解决了分圆问题,即通过根式求解一般方程

$$x^n - 1 = 0$$

的可能性这个问题.从通告的语气中,我们有理由认为高斯那时已经基本开发出这个"总括性理论",而正17边形能尺规作图只不过是它的一个简单推论.另外,高斯于1819年元月6日致格林的信[21]中对做出这个发现的情形有这样的描述:"在不伦瑞克度假期间,我通过算术推理集中精力分析(方程 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$)所有根之间的联系,这一天起床之前,我清楚地找到了这种联系,使得我能把它特别应用到17边形并能立即从数值上进一步加以肯定."

学过平面几何的人都知道,二次方程的根可以通过直尺、圆规作出.高斯在《算术研究》第七篇第354目中列了一张 $n = 17$ 情形的表,从这张表可以设想,高斯关于正17边形能够尺规作图的基本思想,就是把用直尺圆规作出

$$x^{17} - 1 = 0$$

除1之外的根这个问题,转化为一系列二次方程的求解问题,从而断定它能用直尺圆规作出.

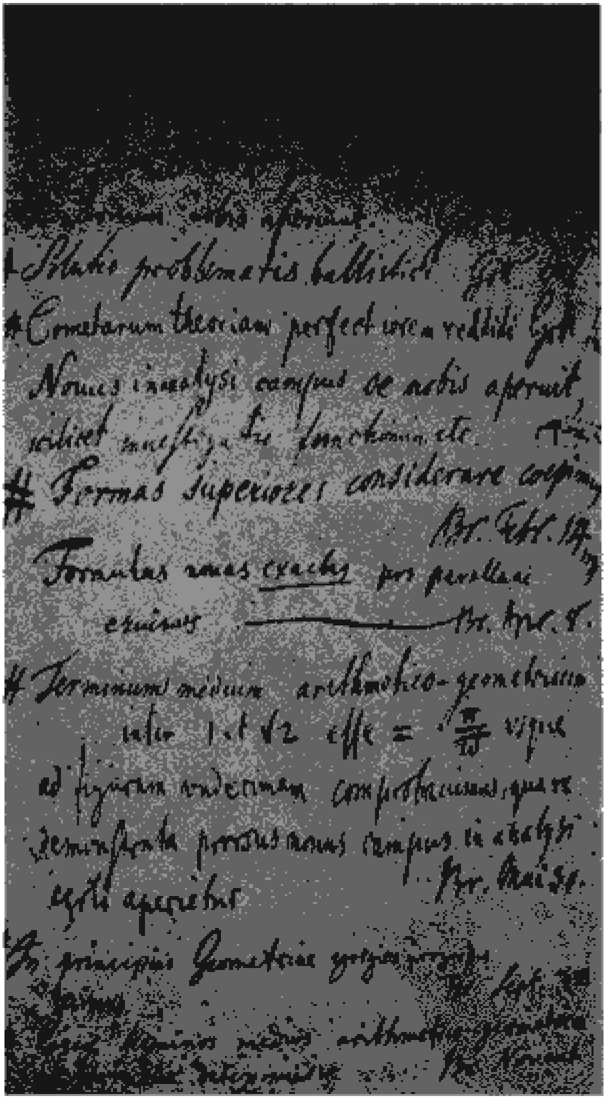
这实际上是现代极其流行的"存在性证明".顺便说一下,在德国第一个提供正17边形的具体作图方法的是厄金格尔,他于1825年向格廷根王家学会提交了相应论文.

7 科学随记

正是在发现正17边形能够尺规作图的那个夜晚即1796年3月30日夜晚,高斯开始以速记甚至近于密码的方式记下他的一些想法和发现.这就是被称为"Wissenschaftliches Tagebuch"("科学日记"),"Mathematisches Tagebuch"("数学日记")或"Notizenjournal"("日志")的资料.它们总共有22张对折的八开纸,但其中8个半张是空白的.从高斯记录的断续情形以及写下的内容和方式看,笔者认为称它为"科学随记"可能更加贴切."随记"虽然篇幅不算很大,但却称得上是数学发展中最奇特的文献,也是科学发展中最珍贵的文献之一.

这本"随记"直到高斯去世43年后即1898年才为数学家所知晓.本来这份资料存放

在高斯的一个孙子手里，1898 年格廷根王家学会把它借出来供专家研究评论．后来高斯的孙子同意把它保存在高斯档案中，这些档案主要存放在不伦瑞克和格廷根．1901 年，克莱因在纪念格廷根科学协会建立 150 周年专刊上首次把它发表．[22]《高斯全集》第十卷上编刊载了它的摹印本，还附有几位专家对其内容所作的详尽分析．[23]



"科学随记"第 7 张的右页

1976 年，"科学随记"的德文译本出版[24]．2005 年更出了此书的增订第 5 版[25]，篇幅

大大增加.最前面是比尔曼写的历史导引;在第25到63页中,把高斯写的摹印在左边,右边则是印刷体的拉丁文;在第65到131页中,左边是拉丁文本,右边则是德文译文,后面还有武辛和诺伊曼写的评注.

"科学随记"共有146条,第一条记于1796年3月30日,写的是正17边形能够几何作图.1796年记得最多,共有44条.1797年记了26条.以后逐年递减,但从1796年到1801年具有一定的连续性.后来就很不连贯,例如1802到1804年一条都没有记;最后一条记于1815年1月2日.随记中也有一些不属于自然科学的内容.

"随记"中有两条很难揣摩.1796年10月21日有这样密码式的一行:

"Vicimus GEGAN."

这一天高斯脑海里涌现了什么?1799年4月8日写的是

REV. GALEN

这又是什么意思?看来这两条的意义已无法猜透.幸运的是,其余144条的意思都已经弄清楚.总起来说,"随记"涉及的重要论题有

- 正17边形的几何作图
- 连分数展开
- 分解一个数为平方数或三角形数之和
- 二次互反律
- 分圆问题
- 双纽线
- 某些积分之值与某些级数之和
- 几何基础
- 力的平行四边形
- 彗星和行星的运动
- 确定复活节日期的公式

这里没有必要详细讨论各条内容,不过有些条可以抽出来说明一下.

1796年7月10日写的是

"EYPHKA! Num = $\triangle + \triangle + \triangle$."

前面用的是阿基米得洗澡时发现浮力定律光着身子出来高呼的"Eyphka!"("我发现了!")后面说的是每个正整数是3个三角形数(即形如$n(n+1)/2$的数)之和.此命题也可表述为形如$8n+3$的数是3个平方数之和,其证明并不简单.

1796年4月8日写的是:

"Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum."

熟谙拉丁文的人认为这表明高斯当时的拉丁文尚未达到经典水平.很多数学家认为此条说的是并非每个小于给定素数的数都是模该素数的二次剩余.这不是一个深刻的结论,高斯此前应当已经知道这一点.不过也有人认为这说明高斯在这一天已证明出二次互反律.

关于三次和四次互反律的研究,"随记"中似乎有点混乱.1807年1月21日、2月15日、2月22日和2月24日写的4条表明他于1806至1807年的冬季发现了这方面的主要结果(可能有些并无证明),这与他1807年4月30日致热尔曼的信一致.但按照他发表的关于四次剩余的第一篇论文,高斯在1805年已得到这些主要结果.

1813年10月23日(这天他最小的儿子出生)写的第一百四十四条说到,在7年毫无成果的努力之后,他获得了四次剩余理论的一般基础.

1797年3月19日和3月21日写的两条十分重要.前一条谈到了用于分割双纽线的方程,后一条说可以用直尺和圆规把双纽线分为5等份.这两条看来漫不经心的注记表明高斯在1801年之前已相当了解椭圆函数的性质并已发现它的双周期性.从1800年5月6日至6月3日写的4条则表述了这一领域的一些一般概念.要知道,椭圆函数理论是19世纪数学的主要领域之一,雅可比和阿贝尔这两位伟大数学家二十多年后才发现椭圆函数的双周期性并开发其一般理论.这是高斯在椭圆函数理论上的优先权的铁证,而有些同时代的数学家当时并不相信高斯心中早已建起这一理论.1800年时高斯才23岁,他只要及时发表椭圆函数的双周期性,即可扬名天下,但他却一直没有发表.

这里自然产生一个问题:高斯为什么瞒着他的伟大发现?鲍尔在其所著《数学简史》中说,高斯曾在1800年把他第一部杰作《算术研究》的大部分呈交巴黎科学院,但"被拒绝发表,并被评审者不公正地嘲笑为毫无价值;高斯深受伤害,他嗣后不想发表自己的研究也许应部分地归于这一不幸事件".[26] 这一说法颇有传奇色彩,后来有些书也沿袭了这种说法,例如M·克莱因的名著《古今数学思想》[27].不过这个说法靠不住.法国科学院官员在1935年仔细查阅了科学院有关记录,结论是该书稿从未到过科学院,更谈不上拒绝了!

其实高斯本人对此作过间接解释.首先,高斯说他进行科学研究只是出于内心深处的需要,是否发表只占据第二位.他在1808年致W·波尔约的信[28]中就曾写过:"能获得最大乐趣的不是知识,而是学习的实践;不是占有,而是取得它的劳作.每当我澄清和详尽地论述了一个主题之后,我就离它而去,为的是再进入黑暗之中."其次,他还曾对友人说过,他在20岁之前,新想法成群结队,纷至沓来,汹涌澎湃,势不可挡,以至难于控制,甚至没有时间记下来,只能用快捷的方式写下一部分.可以想见,"随记"这种方式很适合当时的情形,很可能有些东西还没有写下.最后,由于高斯写作要发表的论著时总是精雕细刻,十分苛求,因此他的写作速度不算快.他说:"……我写得慢.这主要是因为除非我能以尽可能少的话说清楚,我就决不会满意.写得短比写得长要花多得多的时间."[29]

1801年4月6日写的一条也有些意思,它涉及高斯发明的计算每年复活节在何月何日的公式.高斯在1800,1802,1807和1816年发表过4篇文章讨论这个问题.由于1800年那篇是高斯发表的第三篇论文[30](第二篇是下节的主题,即他的博士论文),同时也由于这是表明高斯天才计算能力的有趣小例子,我们在下面对此作一比较详细的介绍.

复活节是基督教的重大节日,纪念耶稣在十字架上受刑死后于第三天复活.公元325年,尼斯会议决定复活节应为3月21日(春分节)当天或其后满月后的第一个星期日;如

果此满月恰发生于星期日，则复活节定为下一星期日．开始时复活节恰为犹太逾越节，为避免相重，查士丁尼教宗时代的教会决定调整日历，使两个节日极少重合．按此规定，复活节可能在3月22日至4月25日之间．一般人显然只能凭日历或教堂通告得知本年哪天是复活节，自己是算不出来的．高斯于1800年想出了确定1582年至2000年每年哪天是复活节的简单办法．假设要确定复活节日子的年份为公元 N 年，先按下表选定 m，n：

年份	m	n
1582 ~ 1699	22	2
1700 ~ 1799	23	3
1800 ~ 1899	23	4
1900 ~ 2000	24	5

分别以 a，b，c 记 N 除以4,7,19的余数，以 d 记 $19c+m$ 除以30的余数，再以 e 记 $2a+4b+6d+n$ 除以7的余数，则 N 年的复活节是3月 $(22+d+e)$ 日(如果 $d+e\leqslant 9$) 或4月 $(d+e-9)$ 日(如果 $d+e>9$)．由此不难算出，例如，2000年的复活节应为4月23日．

高斯没有发表上述公式的严格证明，最早的严谨证明是汉布格于1896年发表的．

8　博士论文

1798年10月，高斯首次去海尔姆斯台特，主要目的是解决学位问题．高斯于是在年底致W·波尔约的信中谈到费迪南德公爵希望他成为哲学博士，但他想推迟这件事直到写完《算术研究》之后．他在11月29日致W·波尔约的信[31]中说到在海尔姆斯台特受到普法夫和图书馆工作人员的很好接待，说“普法夫正如我期望的那样，正确无误地显示出他的天才，决不丢下什么，直到尽可能把所有东西都挖出来为止”．他还谈到普法夫“非常大度地允许我使用他的藏书”．1799年年底高斯曾再赴海尔姆斯台特以利用那里的图书馆，同样受到热情接待．他在普法夫住所里租了一间房子，不间歇地奋发研究，只是在黄昏时才出来同普法夫一起散步，谈论数学．

1799年7月，海尔姆斯台特大学哲学系同意授予高斯博士学位，并可免去大部分繁文缛节．由于费迪南德公爵的资助，高斯的学位论文得以在8月付印(铜版印刷)．高斯的博士论文题为《单元有理整代数函数皆可分解为一次或二次实式之定理的新证明》[32]，这是通称的“代数基本定理”的第一个严谨的证明．

“代数基本定理”这个名称是高斯起的，它断言 n 次实(或复)系数代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

恒有 n 个复根(重根按其重数计算个数)，其等价表述就是 n 次多项式可分解为一次或二次多项式之积．这条定理历史颇为悠久．

1608年，罗思提出，n 次方程至多有 n 个根．1629年，吉拉德首次提出 n 次方程有 n 个根，但他只举了一些例子，没有给出证明．笛卡尔在《几何学》最后一篇即第三篇中提出

"如果一多项式在 c 处为零，则它恒能被 $(x-c)$ 整除" 这一重要定理，并阐述了现称的"笛卡尔符号规则". 莱布尼茨于 1702 年提出是否每个实多项式可分解为一次或二次因子之积的问题. 他的答案是否定的，并举了

$$x^4+a^4=(x+a\sqrt{i})(x-a\sqrt{i})(x+a\sqrt{-i})(x-a\sqrt{-i})$$

这个例子. 大概他认为 $\sqrt{i}$，$\sqrt{-i}$ 不能写成 $\alpha+\beta i$ 的形式，没有看出

$$\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

欧拉在 1742 年明确写下了实多项式可分解为一次或二次因子之积这一定理，但说他不能完全证明. 他严格证明了 $n\leqslant 6$ 的情形；对一般情形也提出了一些想法. 1748 年，达朗贝尔发表了一个证明，其基本想法是适当选取自变量的值，使多项式的绝对值达到极小. 证明中用了一个辅助命题，此命题直到 1851 年才由皮瑟证明，而且还用到了代数基本定理！拉格朗日于 1772 年提出了一个基于根的置换的证明，可是证明过程中得求助于假设的根. 拉普拉斯于 1795 年试图以不同方法证明基本定理，其方法涉及多项式的判别式，可是他仍假定多项式的根"在理论意义上存在".

特稿

高斯在 1799 年 12 月 16 日致 W · 波尔约的信[33] 中说到，他的博士论文中大约只有 1/3 的篇幅用于证明基本定理，其余部分"的主要内容是历史情形和对其他数学家就同一论题所写著作的批评 …… 还有对主导现今数学的浅薄所作的种种评论". 高斯的批评集中在一点，就是先前所有"证明" 都预先假定方程的根存在，再指明可以用复数得到这些根. 他的批评当然一针见血！他在论文第一节中所作的历史性的批判性的评论，为嗣后此类表述树立了典范.

高斯证明的基本路线如下. 考虑实多项式

$$X=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Lx+M$$

证明它存在一次实因式意味着证明它有实根 $(r>0)$，存在不可分解的二次因式意味着证明它有复根 $r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$，从而相应的二次因式可写为

$$x^2-2xr\cos\varphi+r^2$$

把 $r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$ 代入方程 $X=0$，分出实部、虚部，可得

$$U=r^m\cos m\varphi+Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi+\cdots+Lr\cos\varphi+M=0$$

$$T=r^m\sin m\varphi+Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+\cdots+Lr\sin\varphi=0$$

他把这两个方程解释为极坐标系中的曲线方程，设法证明这两条曲线至少有一个交点.

考虑这两条曲线同半径为 R 的圆的交点. 高斯证明，对于充分大的 R，以原点为中心，以 R 为半径的圆恰与曲线 $U=0$ 有 $2m$ 个交点，也恰与 $T=0$ 有 $2m$ 个交点，而且每个第一类交点位于两个第二类交点之间. 接着他说，"易见" 如果 R 变大或变小一点儿，这 $4m$ 个交点也变动得很小(用现代语言，就是这些交点的坐标是 R 的连续函数). $T=0$ 对应于 $\varphi=\pi$ 的分支是负 x 轴，他把所说圆与负 x 轴的交点记为 0，然后按顺时针方向依次记所说交点为 $1,2,\cdots,4m-1$. 奇数表示与曲线 $U=0$ 的交点，偶数表示与曲线 $T=0$ 的交点.

接着高斯断言，如果代数曲线的一个分支进入某区域，它必定在某处离开该区域. 对

此他写了下面的脚注："看来能很好地证明一条代数曲线既不会突然中断(超越曲线 $y = 1/\log x$ 会发生这种情形)，也不会在绕一个点转无穷次后近于消失(如代数螺线那样)．据我所知无人怀疑此点．不过如果任何人需要，我承担在别的场合提供不容置疑的证明．"从现代标准看，需要严格证明这个断言．应当说这是高斯证明中的一个欠缺．

基于上述断言，每个偶数点必由曲线 $T = 0$ 的一个分支与至少另一个偶数点连接，每个奇数点必由曲线 $U = 0$ 的一个分支与至少另一个奇数点连接．这样就能证明曲线 $U = 0$ 与曲线 $T = 0$ 有交点．假定两者没有交点，点0与点 $2m$ 由 x 轴相连，点1不能与 x 轴另一侧的点相连而与该轴不相交(其实高斯在这里又用了几何直观而没有给出严格证明)．因此，如果点1与奇数点 n 相连，则必有 $n < 2m$．同样，如果点2与点 n' 相连，必有 $n' < n$．由于 n' 为偶数，$n' - 2$ 也是偶数．依次往下，会有一个点 h 与点 $h + 2$ 相连．于是，在点 $h + 1$ 处进入所说圆的分支必定会与连接点 h 与点 $h + 2$ 的分支相交．这与先前的假定矛盾，因此曲线 $U = 0$ 与曲线 $T = 0$ 必有交点．

从当时标准看，这的确是一个相当严格的证明，说它是代数基本定理的第一个证明是当之无愧的．高斯证明中依赖于直观的两处，由奥斯特洛夫斯基于1920年给出了严格证明[34]．

高斯后来在1815年，1816年又提供了代数基本定理的另外两个证明[35][36]．1849年庆祝他的学位论文发表50周年时，他又提交了一个证明，不过它只是先前证明的另一形式．高斯喜欢对重要定理给出新的证明．下面在介绍他的《算术研究》时我们还要谈到这一点．

9　算术探讨

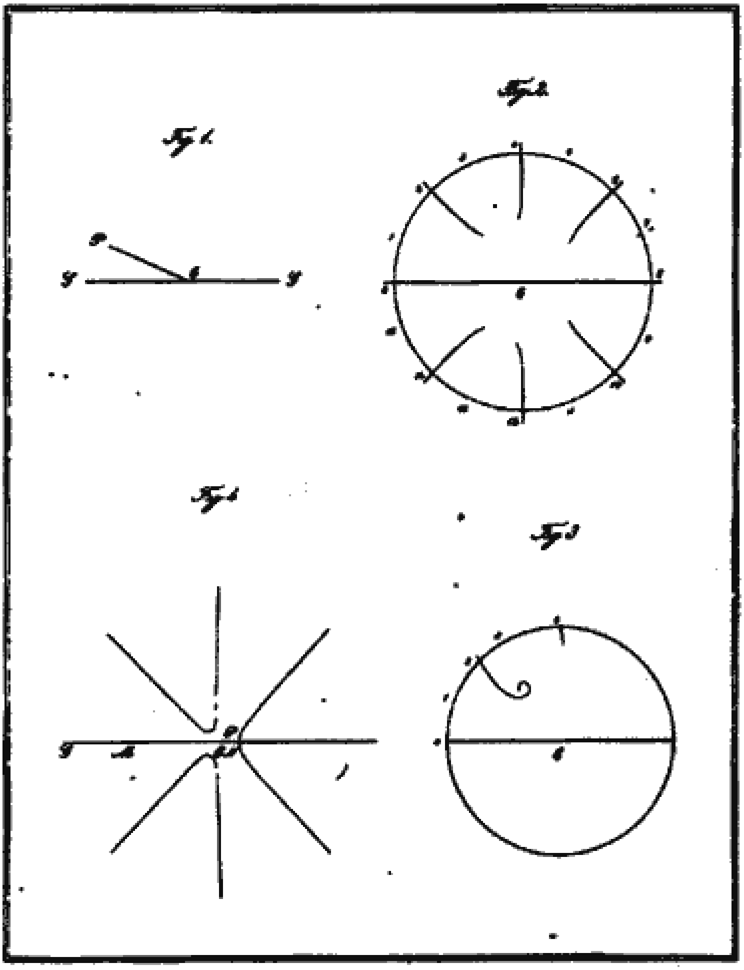
《算术研究》[37] 是高斯的第一部杰作，也有人认为是他的最伟大的著作．有关此书的最初信息来自他于1797年底写给齐默尔曼的两封信，信中谈到他正在写作《算术研究》．此书前四篇的草稿写于1796年或更早，1797年即在格廷根大学就读的第二年写出定稿．第五篇最早的草稿写于1796年夏，修改几次后，于1798至1799年的冬季加进了三元二次型，完成定稿．最后两篇可能完成于1800年上半年．费迪南德公爵资助该书出版．印制进程中曾因篇幅超过预想，导致经费不够，工作停顿．公爵得知后追加了所需资金，使该书得以于1801年出版．高斯在该书献辞中激动地写道：

"最仁慈的王子，我谨以至诚、至忠、至悦、至爱，向您敬献本书，感谢您慨允以您崇高的姓名为此书增光添彩．如无您的恩惠为我开启通向科学之门，如无您从不间断的资助鼓励我迄今的研究，我就不可能完全献身于我本性倾向的数学科学……您的慷慨大度使延迟出版的所有障碍一扫而空．"

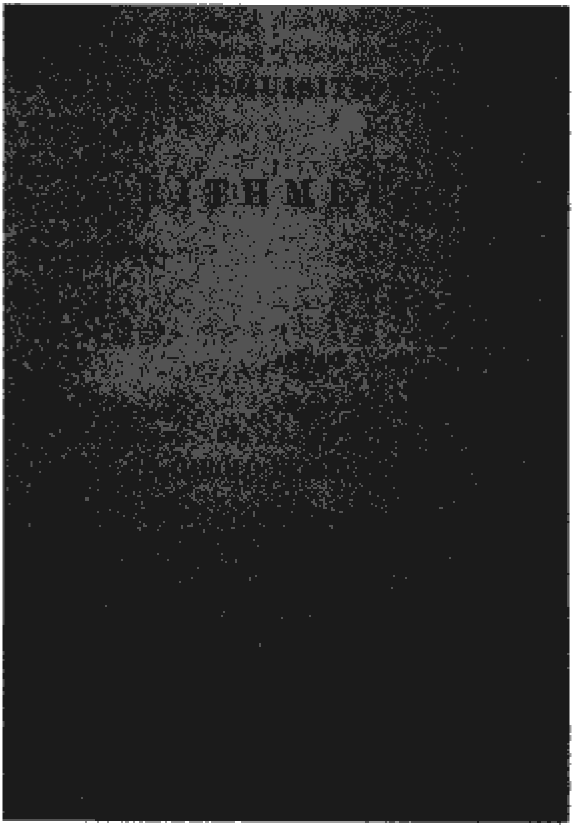
《算术研究》用拉丁文写就．高斯曾请梅耶霍夫修改此书的拉丁文稿．梅耶霍夫在古代和现代语言上受过完善训练，曾得到格廷根大学拉丁文论文大奖，但对数学一窍不通．例如，高斯本人就说过梅耶霍夫连"algorithmus"这个词都不知道．按照高斯的学生M.康托尔的说法，高斯写得一手好拉丁文，如果西塞罗懂数学，除了几处高斯故意使用的习惯

语气外，他也会对高斯写的拉丁文无所指责．高斯也曾谈到梅耶霍夫对这些地方做了修改，至于其他地方是否有改动，现在已不得而知．不过高斯的谦逊和一丝不苟，于此可见一斑．

数论是数学的一个古老分支，欧几里得《几何原本》中就已有素数有无穷多个的严格证明．高斯热爱数论，他有一句众所周知的名言：数学是科学的女皇，数论是数学的女皇．到 18 世纪晚期，数论中已有大量分散的成果，有些结果还很辉煌．高斯的《算术研究》



高斯博士论文中的 4 张图



《算术研究》的封面

系统地总结了在此之前数论中的工作，引进了标准化的概念和记号，解决了其中最难的一些问题，对已有的问题和方法进行了分类，提出了新的方法，为后世数学家研究数论树立了典范，从而开创了数论研究的新纪元.

《算术研究》共7篇.第一篇开宗名义讨论"一般的数的同余"，第一句是"若数 b 和 c 的差被数 a 整除，则称 b 和 c 对于 a 同余；否则称 b 和 c 对于 a 不同余."然后他对"b 和 c 对于 a 同余"引进了记号"$b \equiv c \pmod a$".这是现代数学中无处不在的等价和分类概念出现在代数中的最早的意义重大的例子.第二篇讨论一次同余方程，其中严格证明了算术基本定理、重新证明了已由拉格朗日建立的模为素数 p 时 m 次同余方程

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Mx + N \equiv 0$$

当 p 不整除 A 时不可能有多于 n 个互不同余的解.第三篇讨论幂的同余式，其中用同余式术语给出了费马小定理的一个证明.此篇详细讨论了高次同余式

$$x^n \equiv a \pmod m$$

其中 a 与 m 互素.笔者曾把前三篇与现代初等数论教科书的相应内容作过粗略比较对

照，发现现代教材在用语和记号上与高斯没有大的差别，不由得惊叹高斯著作的深邃和无比旺盛的生命力．笔者曾对一位写过多部数论专著的学者开过玩笑：原来你们开头部分都是从高斯那里抄来的，或许还是从（抄高斯的人）^{n} 那里抄来的！

第四篇“二次同余方程”意义非同寻常，因为第135目到144目包含了二次互反律的第一个严谨证明，其标题为“基本定理的严格证明”．设 p 是素数，a 不是 p 的倍数，如果存在数 x，使得 $x^2 \equiv a(\bmod p)$，就称 a 是 p 的二次剩余，否则称为二次非剩余．用勒让德符号，前者记为 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$，后者记为 $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$．对于不同的奇素数 p, q，二次互反律断言，只要 p 与 q 不同时为形如 $4n+3$ 的素数，则 p 对 q 与 q 对 p 同为二次剩余或二次非剩余，而在 p 为形如 $4n+3$，q 为形如 $4m+3$ 的素数的情形，则 p 对 q 与 q 对 p 二者中有一为二次剩余，另一为二次非剩余．这可用公式简洁地表示为

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{[(p-1)/2][(q-1)/2]}$$

同时还有补充关系式

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$$

$$\left(\frac{2}{q}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$$

特稿

二次互反律实际上解决了二次剩余的判别问题，是同余理论的基本定理，高斯称它为算术中的宝石．它是同余理论的核心，在数论后来的发展中起着重要作用，华罗庚恰当地称它为“数论中的酵母”．

欧拉在1783年的论文《分析短论》中已经陈述了二次互反律，但正如高斯在151目中所说，还没有人像他那样以如此简洁的形式提出这个命题．高斯参考了欧拉的其他著作，还参考了勒让德1785年的著作．他正确地批评这些著作中的证明都不完整．

高斯是在经过了相当长时间的艰苦努力后于1796年春完成第一个证明的．当时他还不能在更一般理论的框架中考察这一定理，因此探索这个证明花费了他巨大的精力．为证明一个关键之点，他整整思考了一年．克罗内克说这个证明是高斯天才的试金石．不少人认为，只是证明二次互反律这一项工作，就足以使高斯位于第一流数学家之列．

高斯一生给出了二次互反律的8个证明．上面说的第一个证明最初等，方法直接，但比较复杂，因而篇幅也比较长．第二个证明出现于《算术研究》第262目，实际得到应追溯到1796年6月7日．这个证明是二次型理论的一部分，形式上比较容易．他于1808和1817年向格廷根王家学会提交了另外4个证明[38][39][40]．第六个证明的重要性在于用了高斯和．第四个证明用了分圆理论，可追溯到1801年5月15日．第五个证明用了高等同余理论．还有两个证明是高斯去世后才发表的[41][42]，它们应当是在1796年9月2日前得到的．

关于对数论中重要定理寻求新证明的意义，高斯曾有过自传式的深刻阐述．他写道：“高等算术的特点在于，它最优美的定理可以通过归纳毫不费力地发现，然而往往它们的证明就在手边什么地方，却要借助深入分析和天赐幸运的合成并经历许多毫无成果

的探索才能得到.这个值得注意的现象源于这一数学分支中不同内容的神奇的错综复杂的联结,也源于这一分支中常常发生的下述情形:许多定理的证明经过多年探求,仍然徒劳无功,后来却以各种不同的方法得到.一旦通过归纳发现了新的结果,首要的考虑就应当是通过任何可能的手段寻求证明.即使在好运到来得到证明之后,在高等算术中也不应当把打算寻求别的证明的探讨看做多此一举,没有意义.因为人们有时一开始并未得到最优美、最简单的证明,这样的证明只有在洞察高等算术各种原理之间神奇的错综复杂的联结后才能得到,而这种联结恰恰是研究它的主要吸引力之所在,往往能导致新定理的发现.因此,为已知定理寻求新的证明通常至少与发现这些定理同等重要."[43]

有人统计[44],到 21 世纪初,二次互反律的证明已经超过 200 种,提供新证明的人中有下面这样一些数学家中耳熟能详的姓氏:柯西,雅可比,狄利克雷,艾森斯坦,刘维尔,库默尔,克罗内克,戴德金,瓦莱 - 布桑,希尔伯特,弗罗贝尼乌斯,斯蒂尔切斯,M·里斯,韦伊.这大概是连高斯也没有想到的.

《算术研究》第五篇是"二次型与二次不定方程",讨论表示式,其中 a,b,c 是整数,它称为二元二次型.问题是求出能为给定的型或型类表示的数,其逆问题是,给定 M 和 a,b,c 或一类 a,b,c,求出能表示 M 的 x,y.欧拉在这方面已得到一些结果,而拉格朗日则做出了一个关键性发现:如果一个数能被一个型表示,则它也能被与之等价的型(指能通过变量替换 $x = \alpha x' + \beta y', y = \gamma x' + \delta y', \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ 互相变换的型)表示.他指出,给定判别式(高斯称它为行列式)$b^2 - ac$,存在有限个型,使得具有相同判别式的型等价于其中之一.高斯在篇幅很大的第五篇中系统建立并大大扩展了二次型的理论.他建立了等价和正态等价的概念,定义了对生型和相邻型.他提出了二次型的合成的概念,给出了二次型 F 是二次型 f 和 f' 的合成的定义,证明如果二次型 f 与 f' 属于同一类,二次型 g 与 g' 也属于同一类,则由 f 和 f' 合成的型与由 g 和 g' 合成的型也属于同一类,即 F 的类由 f 和 f' 的类唯一决定,于是二次型的合成产生二次型类的合成.用现代数学语言陈述,就是具有给定判别式的本原二次型(即 a,b,c 没有公因数的二次型)类连同合成构成一个有限交换群.这些理论是"群"这一重要现代数学概念的来源之一.高斯在这一篇中关于二次型的特征和种的研究,标志着群特征标理论的肇始.这样高斯就成为群论的先驱者之一.他在这一篇中还指出可以用型的理论证明数论中许多定理,包括欧拉和拉格朗日等人已证明的一些重要定理.本篇还讨论了三元二次型.这一篇充满了不少成为以后数学家一系列重要研究起点的论题.

第六篇把前面的理论应用到各种特殊情形,例如 $mx^2 + ny^2 = A$ 的整数解.第 335 目尤其值得注意,高斯在其中提出,他的方法可应用到圆函数(即三角函数)之外的许多其他函数,特别是依赖于积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ 的超越函数,他还注意到这种函数对于双纽线恰如三角函数对于圆那样重要.

第七篇是"分圆方程",不少人认为此篇是《算术研究》的顶峰.篇中讨论代数方程 $x^n - 1 = 0$,n 是奇素数.这个方程是作正 n 边形或把圆分为 n 个相等部分这一几何问题的代数表述.高斯证明,此方程除以 $(x - 1)$ 所得的方程

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

不可分解为低次的有理系数方程之积.然后他证明了一个主要命题:如果 $n-1$ 是 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 之积,则方程 $X=0$ 能通过解次数为 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 的方程来解出.例如,当 $n=17$,有 $n-1=16=2^4$,因此 $x^{17}-1=0$ 能通过解 4 个二次方程解出.由于二次方程的根能用直尺、圆规作图,所以正 17 边形能用尺规作图.更一般地说,如果

$$n = 2^{2^m} + 1$$

且 n 是素数,则正 n 边形能用尺规作图.对于 $m=0,1,2,3,4$,$n=3,5,17,257,65\ 537$,这 5 个数都是素数,因此正 3 边形,正 5 边形,正 17 边形,正 257 边形,正 65 537 边形都能尺规作图.但到 21 世纪初,仍然不知道这种形式的数中有没有其他素数.高斯在最后两目中断言,正 n 边形能用尺规作图当且仅当 $n=2^l p_1 p_2 \cdots p_m$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是如上形式的不同素数.这个命题的充分性易于从高斯先前的论述中导出,但必要性并不显然,高斯也没有给出证明.旺策尔 1837 年首次给出了必要性的证明[45].

《算术研究》当时对于数学家也很难读,它曾被称为"七印封严之书"[46].后来狄利克雷作了详细注释.此书简洁完美的风格多少减慢了它的传播速度,而最终当富有才华的年轻人开始深入研读它时,由于出版商破产,又买不到它了,甚至高斯最喜欢的学生艾森斯坦也从未能拥有一本.有些学生不得不从头到尾抄录全书.狄利克雷有一本,他旅行时带着这本书,睡觉时放在枕头下面.在上床之前,他总要艰苦地读上几段,希望醒来后重读时能完全弄明白.

特稿

按照原来的计划,《算术研究》还有第八篇,高斯打算在该篇中写关于同余的一般理论.他在通信和其他论著中也不止一次提到要续写《算术研究》,但一直未能如愿.后来发现了一些有关的草稿和手稿,它们似乎写于 1797 和 1798 这两年中,其中的观点与后来戴德金和伽罗瓦的观点有紧密联系.

《算术研究》很快为作者赢得了荣誉.拉格朗日毫不吝啬赞美之词,他于 1804 年 5 月 31 日写信给高斯说:"你的《算术研究》已立即把你提到了第一流数学家的行列之中.我认为最后一篇包含最美的分析发现……请相信,先生,没有人比我更真挚地为你的成功喝彩."[47] 即使勒让德,他早于高斯在 1798 年出版了《数论试论》,起初曾怀疑高斯未能公正对待他,但在此书第二版(1808 年)的前言中,也赞扬《算术研究》具有高度价值,内容丰富,很有独创性.

10　一算成名

19 世纪第一天很不平凡:意大利天文学家皮亚齐于 1801 年元旦在巴勒莫发现了后来命名的谷神星.他于 1801 年元月 24 日致信柏林的波得、米兰的奥里阿尼和巴黎的拉朗德,说他发现了一颗很小的没有彗尾和包层的彗星.拉朗德于 2 月把此事通知塞贝格天文台台长察赫,但未指明它的位置,因此察赫只得等待进一步的信息.皮亚齐致波得的信路上走了 71 天,信中说了元月 1 日和 23 日两次观测到的位置.波得立即把有关信息送交给察赫,他是《地球和天体科学进展月报》的编辑.察赫毫不拖延地在《月报》上登载了一

篇详尽的文章，标题为《关于我们太阳系中的一颗长期猜测、现可能已发现的新主要行星之报导》[48].

波得和奥里阿尼很快认定这是一颗运行于火星和木星之间的小行星，并决定建立"由散布在欧洲的24位实践天文学家组成的专门协会"来研究它.在已有数据基础上，法国的布尔克哈特在《月报》7月号上发表了他计算所得的一个椭圆轨道.整个这一期冠以《关于新主要行星之连续报导》的标题.

皮亚齐从元月1日到2月11日的完整观测发表在《月报》9月号上，这样高斯就能得到这些数据.在《月报》10月号上，察赫报告说，从8月中旬到9月底，几乎所有天文学家都试图再找到这颗星，但均以失败告终.这段时间天气不好是一个障碍，另外布尔克哈特计算的椭圆轨道也不可靠.奥尔伯斯也开始计算一个椭圆轨道，但他像布克尔哈特一样错误地假定此行星在发现时离近日点或远日点不远，实际上(如高斯后来所指出的)它差不多处于中点位置.

这段时间高斯住在不伦瑞克，在读到《月报》后，对这颗新行星产生了兴趣.他放下了正在进行的数学和月球理论方面的研究，转而探索这颗行星的轨道."科学随记"第118和119条表明他于1801年九、十月份想出了解决问题的方法.他认为必定有一个椭圆轨道符合皮亚齐41天的观测，由此就能预测它的位置.在他十一月份笔记的第一页上，明确地写着他认为自己已完全解决这个问题.高斯的基本想法是通过平均观测建立该行星到太阳距离和到地球距离之间的方程，这里他用了自己开创的最小二乘法.他后来解释过，从3个观测来计算一个天体的轨道依赖于两个问题的解，首先是以任何一种方法求出近似轨道，其次是修正这一轨道使之尽可能符合已有观测.1801年12月，高斯算出了轨道诸元素，察赫和其他人在这个月按高斯计算的星历表开始寻找谷神星，因天气恶劣未获成功.1801年12月31日到1802年元旦那个夜晚，察赫终于观察到了谷神星.奥尔伯斯也于1802年元旦发现了这颗新星，恰与高斯的星历表相符.察赫写信给高斯报告了这一喜讯，同时高斯也从报纸上得知了奥尔伯斯的发现，并于元月18日写信给奥尔伯斯以求得到他的观察结果，由此开始了两人终生的亲密友谊.

察赫在《月报》1802年2月号上向全世界宣告：由于高斯的计算，谷神星已被重新发现.这个爆炸性消息一下子把高斯推上了全球最高级理论天文学家的位置.由于高斯没有公布他所用的方法，就更加使这件事笼罩着一种令人觉得深不可测的神秘气氛.这位名不见经传的年轻人，一无天文仪器，二无[illegible]帮忙，只靠深邃的内省力和神奇的数学才能，伏案算算就如此精确地定出了一颗已经消失的星星！他本人才真正是一颗耀眼的新星！情形多少有点像十年后拜伦在其长诗《恰尔德·哈洛尔德游记》前两章发表后所说的那样："美好拂晓，一觉醒来，我发现自己已名扬四海."[49]

皮亚齐当然比别人更加高兴.他写道："我要向高斯先生表示最高的赞颂和最深的谢忱，他免去了我们许多痛苦和辛劳；没有他，我的发现就不能得到证实."[50] 波得等许多学者也以类似方式表达了他们的感受.高斯自然也很高兴，但他非常谦虚，说没有牛顿的《原理》(即《自然哲学之数学原理》)，他就不可能建立新方法.他说全部事情中最好之处在于这再次肯定了牛顿的万有引力定律.

俄国对高斯的成就最早做出公开反应:圣彼得堡科学院于1802年1月31日选举高斯为通讯院士.俄国国务大臣冯富斯写信给高斯正式通知此事,两人嗣后不断通信,建立了友谊.1802年9月5日,俄国政府提出聘任高斯为圣彼得堡天文台台长.1803年1月20日,高斯决定谢绝俄国的聘请,留在不伦瑞克.冯富斯给高斯的最后一封信写于1824年3月24日,有意思的是这封信又是通知高斯圣彼得堡科学院对他的提名,不用说这次是要请他当院士.两年后冯富斯去世,高斯对此深感悲痛.

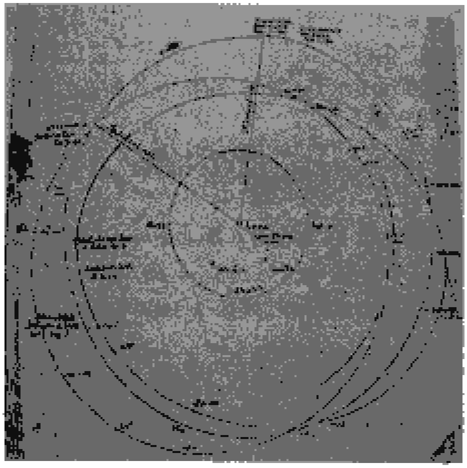
1801年底,费迪南德公爵为使高斯留在不伦瑞克、同时也为了表示对《算术研究》的赏识,把高斯年收入提高到400塔勒.当齐默尔曼告诉高斯这一喜讯时,高斯说:"可是我实在还不配,我还没有为国家做什么事情."[51] 他决定自掏腰包买一台六分仪.1803年1月25日公爵签发了下面的命令:"为本市回绝圣彼得堡聘请的高斯博士每年增加200塔勒,外加4考得(1考得约合3.6立方米 —— 引用者)山毛榉木材和8考得木柴作为木材补贴,每年再发50塔勒作为免费公寓的补偿……"公爵曾打算在不伦瑞克为高斯建一座天文台,由于拿破仑的入侵,此项计划未能实现.

事实上,从"科学随记"("Theoram motos Lunae aggressi sumus")第120条看,在计算谷神星轨道之前,高斯在1801年已开始他在天文学领域中的第一项重大研究,就是关于月球运动的理论.为修正已有的月历表,巴黎科学院于1798年悬奖征解"由大量(数目至少为500)最好的、可靠的新旧观测数据确定月球轨道远地点和向天顶上升交点平均长度的历元".伯格于1800年获奖,他用了3 000多个观测数据.同时拉普拉斯也开始阐述他的月球运动理论.巴黎科学院于1800年再次悬奖,要求得奖者完成:(1)通过对大量优良观测的比较更精密地确定月球变动系数,给出月球长度、宽度和视差的更精密、更完整的公式;(2)由这些公式设计可靠的便于计算的月球表.

巴黎科学院没有为此次悬奖设定时间限制.或许是这一点导致高斯着手搞月球表.他以真实长度为自变量,导出了倒缩短径向量、平均长度(或平均时间)和宽度正切的微分方程,这些方程与欧拉所用的不同,但与克莱罗、达朗贝尔以及后来拉普拉斯、普兰纳等人所用的类似.高斯通过按偏心度和切线斜率之幂的展开近似求解所得微分方程,给出的结果本质上与后来普兰纳于1832年提出的理论一致.但高斯只做完了宽度的扰动就停了下来,原因如他1842年1月23日致舒马赫的信[52]中所说:"1801年夏,我恰恰在进行关于月球的类似研究,但当我刚开始准备性的理论工作……时,皮亚齐谷神星观测的新闻把我推向一个完全不同的方向."高斯的这项工作是他身后在其遗留的笔记中发现的,载于1906年出版的《高斯全集》第七卷中.

重新发现谷神星后不久,命运之神又给高斯带来一次机会.1802年3月28日,奥尔伯斯在观测室女星座时看到一颗亮度大约为7等的星体,它不见于已有的星体目录中.次日的观测使他肯定自己发现了另一颗小行星(他后来把它命名为智神星,这是人类发现的第二颗小行星).4月3日再次观测后,他写信告诉了察赫,后者在次日观测后确信奥尔伯斯正确无误.奥尔伯斯把观测数据寄给年轻的朋友高斯,请他进行计算.高斯于4月18日完成计算,据说只用了3个小时,而且十分精确.关键在于高斯用了新的方法.先前欧拉做类似计算时,别人要用好几个月,他只用3个星期,那时人们就已啧啧称奇.要知道,

欧拉的计算能力也非常惊人，而且如果要推举人类历史上在排行榜上位居第四的数学家，那欧拉是有力的候选人．高斯后来谈到他能在一小时内算出欧拉用老方法得用 3 个整天才能算出的彗星轨道，而高斯对欧拉因计算用眼过度失明时曾说："确实，如果我一直用老方法三天三天地算，我的眼睛可能也会瞎掉．"[53]



高斯手绘的谷神星和智神星轨道图

据说拉普拉斯在高斯确定智神星轨道后曾说："不伦瑞克公爵在他的国家里做的比发现一颗行星还要多：他在一个人身上发现了一颗天上的心灵！" 几年后他还提请拿破仑在法军进入德意志时对格廷根大学予以特别关照，"因为这个时代最重要的数学家住在那里．"[54] 拉普拉斯对高斯评价极高，当洪堡问拉普拉斯谁是德国最伟大的数学家时，后者答道："普法夫．" 洪堡惊讶地问："那么高斯呢？" 拉普拉斯答道："噢，高斯是全世界最伟大的数学家！"[55]



施瓦茨 1803 年画了高斯年轻时唯一一张彩色蜡笔素描像
格廷根天文台展示的是这张像的复制油画

在不伦瑞克的后面几年（1803 ~ 1806），高斯开始从数学家向同时成为天文学家和物理学家过渡．从研读牛顿的《原理》起，高斯就对天文学产生了兴趣，在格廷根读书时已开始天文观测．确定谷神星位置一方面显示出他的才能，另一方面也显示出天文发现远比数学成就更能引起公众巨大的兴趣；再则职业天文学家教学任务比较少，高斯一向对教书不大热心，而且这也能使他有更多时间投入研究．高斯 1803 年 6 月 20 日在致 W·波尔约的信[56] 中吐露："天文学和纯粹数学是两个磁极，我的心灵磁针总是转向这两极．" 这几年中高斯在天文学领域主要研究由木星引力引起的谷神星和智神星的扰动．在高斯档案中保存着许多带有不少计算的剪贴簿，其中还隐含着他打算今后仔细研究的论题．这些论题与他

于椭圆积分和超几何级数的研究有紧密联系. 其中一个有趣的发现是木星与智神星平均运动之比为 7 : 18, 这表明木星对智神星的影响类似于地球对月球运动的影响.

高斯用两种方法计算行星的扰动. 首先是把扰动元展开为级数, 再用所得级数的第一项. 拉普拉斯等已用过这种方法, 但由于高斯熟知并熟练运用许多无穷级数, 所以他做得更好. 在这种方法行不通时, 高斯就运用和发明数值积分. 他往往视情况不同决定用何种方法. 对于谷神星, 高斯还把扰动展开为三角级数, 由此利用三角函数表进行数值积分. 这里他所做的已相当类似于后来傅里叶 1807 和 1811 年关于热传导的论文中所做的著名工作.

11 恋爱结婚

高斯的母亲结婚前曾在一个姓里特的人那儿打工, 里特还是高斯的教父, 高斯小时常去他家玩. 高斯从格廷根回不伦瑞克后, 仍不时到里特家作客, 因为这个家庭气氛融洽, 也有较好的文化氛围. 在这个圈子里, 高斯于 1803 年邂逅了约翰娜 · 奥斯多夫.

约翰娜生于 1780 年 5 月 8 日, 父亲是制革工头, 经济情况在这一行里位于中等水平. 约翰娜虽不十分漂亮, 但生性开朗, 童心未泯, 虽有点调皮, 可非常善良, 对人体贴. 有她在场, 气氛就会愉快欢乐. 高斯 1804 年 6 月 28 日写信给 W · 波尔约说:

特稿

"在这里我相识的人和朋友圈子也扩大了, 最美好的是我同一个了不起的女孩的友谊, 她正是我衷心向往的可作为终身伴侣的女孩. 美丽动人的面容, 能反映出灵魂平和、健康、仁慈, 且多少有点浪漫的眼睛, 身材完美(这很要紧), 谈话时很有才智和理解力(这也重要), 最出色的是一颗祥和、快乐、谦逊、纯洁的天使般不会伤害任何人的心灵. 矫揉造作、轻浮卖弄、激情过度与她无缘. 但在我没有看到能使她获得应得的幸福的前景之前, 我不会对这位造物主创造的秀丽女性放任自己的感情. 单方面的快乐根本不是幸福."[57]

经过一年的相处和追求, 高斯意识到同约翰娜结合应是他个人生活的最高目标. 他于 1804 年 7 月 12 日写信给她, 敞开了自己的心扉. 这封信写得如此情真意切, 诚挚动人, 以致我们忍不住要全文照录:

"我最亲爱的朋友, 请允许我在这封信中对一件重大事情向你倾吐心声, 迄今为止我一直没有恰当机会向你表白.

"我终于以我整个心灵说, 我的内心想望着你沉静的天使般的美德, 我的目光凝视着你高贵的面容, 你的脸庞是一面反映你的美德的真正的镜子. 亲爱的纯洁的灵魂, 你是如此地远离空虚无聊, 以致不能认识到自己的价值, 不知道上天是多么慷慨仁慈地赋予了你什么, 但是我的内心知道你的价值. 我的心已有很长时间属于你, 你不会拒绝吧? 你能把你的心给我吗? 亲爱的, 你能高兴地握住我伸过来的手吗? 我的幸福系于你对这个问题的回答. 确实, 眼下我还不能向你提供富裕和显贵, 然而亲爱的, 我不会看错你美丽的心灵 —— 你肯定像我一样不计较富裕和显贵. 不过我现在有的已经超过我一个人的需要, 即使不考虑未来的前景, 也足够两个年轻人开始过轻松惬意的生活. 我能献给你的最好的

东西是我的心，充满了对你真挚热烈的爱的一颗心。

"问问你自己，我深爱的朋友，这颗心能否使你完全满意？你能否用同样真诚的感情来响应？你是否甘愿与我手挽手共度生命的旅程？快快决定吧！

"我的爱，我用朴实直率的言词把我心中的愿望呈现在你面前．我本来可以用完全不同的言词．我本来可以描绘你的妩媚，它决不会有任何地方不真实，但你会把它看做献殷勤；我可以用炽热的色彩向你描绘我的爱——确实，我只要任凭我的感情自由驰骋就能做到；描绘等待在我前面的是天堂之乐还是郁郁寡欢，就由你接受或拒绝我的渴望而定．但我不想这样做．至少不要玷污了我无私纯真的爱．我不想用诱饵来让你作决定．在关乎你一生的重大问题上，你不应该允许外在的影响．你不应当为我的幸福作出牺牲．你个人的幸福必须由你的决定来指引．是的，最亲爱的人，我忠贞不渝地热烈地爱你，只有同你结合（如果你同意）才能使我幸福．

"最亲爱的人，我向你呈献了我的心，我热烈地、急切地等待着你的决定．"[38]

约翰娜三个月没有回信，原因不是她还不能肯定自己的感情，其实她爱高斯也已有一段时间，但高傲的性格和周围的气氛使她不能立即表达．不过天遂人愿，四个多月后，1804 年 11 月 22 日，两人终于订婚．三天后高斯写信[30] 给 W·波尔约说："三天前，那位天使，那位在这地球上几乎是高居天国的女性，成了我的未婚妻．我极度快乐……噢，她比我好得多！上帝啊，她心中的坚冰终于在我爱情的烈焰中熔化．当她贞洁的身体依偎在我胸口，还有那充满热情的眼睛，温暖柔软光洁的双手，那少女的娇贵的嘴唇，羞怯地纯洁地诉说着爱意，这使我多么快乐！生活在我面前就像是闪耀着新的光彩的永恒的春天……"

1805 年 10 月 9 日，两人在圣卡塔琳纳教堂举行婚礼，一对恋人终成伉俪．

12　公爵之死

1806 年 8 月 21 日，高斯的长子约瑟夫出生．正当高斯在不伦瑞克过着平静愉快生活的时候，德意志的局势却大大不妙．1799 年 11 月，拿破仑发动雾月政变，出任法兰西共和国第一执政．为对付这一年建立的第二次反法同盟，拿破仑采取稳住普鲁士的中立地位、争取俄国退出、全力摧毁奥地利军队的方针，次年奥军大败．1801 年 2 月签订和约，奥地利承认法国对莱茵河左岸、比利时和意大利北部中部地区的占领，普鲁士乘机占领汉诺威．1803 年英法再度开战，1804 年 4 月英俄缔约，5 月拿破仑称帝，8 月弗兰西斯二世宣布成立奥地利帝国．1805 年奥英签订盟约，第三次反法同盟形成．10 月，拿破仑在乌尔姆全歼奥军，11 月攻占维也纳，12 月与奥军在奥斯特利茨决战中大捷．1806 年，拿破仑在德意志建立以杜塞尔多夫为中心的贝格大公国，以其妹夫缪拉元帅为大公．他把符腾堡和巴伐利亚升为王国，把巴登升为大公国．7 月，他更将德意志南部和西部 14 个（后增至 16 个）邦组成"莱茵邦联"，自任"保护人"．接着莱茵邦联退出德意志帝国，使得已存在 9 个世纪之久的神圣罗马帝国终于解体，弗兰西斯二世不得不放弃神圣罗马帝国皇帝称号．

拿破仑在德意志的扩张使保持中立已达10年之久的普鲁士感到极大威胁.威廉三世于1806年1月派费迪南德公爵出使俄国,试探建立联盟.公爵于3月回不伦瑞克后,把高斯年俸提高到600塔勒.高斯在4月30日生日那天得知这一决定,5月他被公爵召见,这是两人最后一次会面.

1806年7月,普鲁士与俄国签订密约.年已70的费迪南德公爵被任命为普军总司令,但他麾下只有57 000人,其中不少人还是刚刚招募未经训练的新兵.10月1日威廉三世向法国发出最后通牒,要求法军撤出莱茵河右岸.10月8日,拿破仑率军离开巴黎.费迪南德指挥普军穿过萨克森缓慢向西移动,企图威胁拿破仑与西欧的交通.拿破仑神速挺进,10月14日在耶拿全歼普军一部,同时达武指挥的法军在耶拿以北20多千米处的奥尔施泰特击溃费迪南德公爵指挥的另一部普军,费迪南德受致命重伤.普军全线瓦解,在俄国尚未行动之前,拿破仑已完全征服普鲁士.10月27日,拿破仑在4位元帅簇拥下进入柏林.11月8日,最后一支普军投降.

费迪南德公爵受伤后即退向家乡.高斯非常伤感地谈到,10月25日早晨,他从住所向窗外看去,只见两匹马拖着一辆车驶出对面城堡的院子,受了重伤奄奄一息的公爵躺在车里.马车驶向阿尔托那,这样至少能使他在自由状态中死去.高斯目睹他的保护人离去,虽然什么也没有说,但巨大的痛苦压在他心头.他憎恨人侵德意志的人;由于他尊敬和深爱的资助人最后陷入如此悲惨的境地,对拿破仑个人的憎恶也不可抑制地从他心中升起.

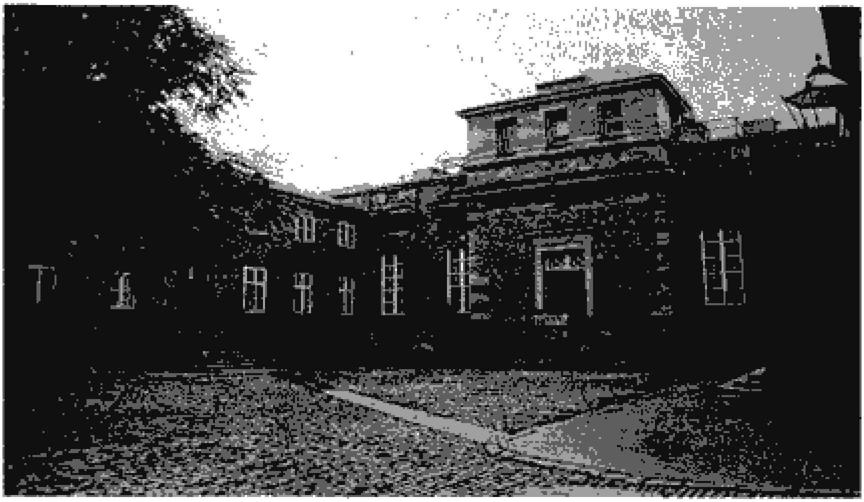
几天后马车抵达阿尔托那.公爵于11月10日死于一家小旅馆里.随着公爵的去世,高斯的经济条件完全改变了.好在由于洪堡等人的奔走,1807年7月9日,高斯收到格廷根大学的聘请.这时他正在不来梅访问奥尔伯斯.在同好友商量之后,他接受了聘请.对高斯来说,格廷根是一个非常合适的工作场所.格廷根大学具有独立地位,不受教会监管和政府干预.它强调自然科学,财政上也很充裕,这使它在德意志各大学中处于首屈一指的地位.还有一点值得重视,就是格廷根王家科学学会(相当于科学院)与格廷根大学联系紧密,这与法国和俄国情况很不相同.



费迪南德公爵

1807年11月21日,高斯一家抵达格廷根.从高斯太太12月6日写给她密友的信中可以看出,哈定教授在他们到来前已经做了周到安排.他们安顿好后每天走访一两户人家;看来高斯在此地很受人尊重.高斯太太虽然未曾涉足上流社会,但她觉得此地人们友善亲切,可以信赖.信中还提到"我的约瑟夫"已变成漂亮小孩,几乎能自己到处跑动,不过跑时让人看着害怕.1808年2月29日,约翰娜生下一个女儿,取名威廉敏,这是为向奥尔伯斯致敬,他答应做孩子的教父.家里人称这孩子为明娜,她长得同母亲十分相像.

实践天文学和理论天文学在19世纪初经历了革命性的进展,但在高斯抵达时,格廷根天文台变化很小.已有建设新天文台的计划,但此时刚刚打好地基.动乱的时局使建成的希望渺茫.高斯去后一段时间在旧天文台工作.



高斯就任台长时的格廷根旧天文台

按照1807年7月签订的和约，普鲁士丧失了易北河以西的全部领土．拿破仑把其中大部分与不伦瑞克、黑森－卡塞尔、汉诺威一部分以及格廷根等合并，建立了威斯特法利亚王国，以其幼弟热罗姆为国王．拿破仑还决定向失败方征收"战争献金"．作为教授和天文学家，高斯被列入应纳贡2 000法郎这一等级．此时高斯刚到格廷根大学任天文台台长，还没有从学校拿到一分钱．这笔钱数目过大，超出了高斯的负担能力．不久奥尔伯斯来信，装有罚金总数，并表达了对此事的愤慨之情．高斯感谢友人的慷慨和同情，但婉言谢绝了赠金．

退回奥尔伯斯赠金后不久，高斯收到拉普拉斯一封短信．信中说拉普拉斯已在巴黎为全世界最伟大的数学家支付了这笔钱，并说他认为能从他朋友肩上除去这个不应有的负担是他的光荣．由于钱已付出，高斯无法退还，但他仍不愿接受．这件事流传了出去，很快高斯收到了法兰克福一位匿名者通过银行汇来的1 000弗罗林．由于没有姓名地址，高斯当然无从退回．这样高斯就偿还了拉普拉斯付的钱．后来他得知这笔款子来自法兰克福大公爵冯达尔贝格，它来自公共资金，主要是作为对高斯工作的赞颂而非私人友谊．

令天文学家兴高采烈的是伟大的1811年彗星不期而至．高斯在8月22日第一次观察到它，由于天气条件不好和旧天文台北面被建筑物阻挡，所以未能立即进行实际观测．但八月初察赫的观测结果已经送到，高斯就根据这些数据计算出它的轨道．彗星重新出现时，欧洲很多迷信的人以敬畏的目光注视着它明亮地在天空扫过，把它看做上天的警告．托尔斯泰在《战争与和平》中有着生动的描写．那是善良的皮埃尔向娜塔莎表达爱情之晚，"在阿尔巴特广场的入口，一大片灰暗的星空展现在皮埃尔眼前．几乎是在这片天空的中央，在圣洁林阴道上方，悬着一颗巨大的明亮的一八一二年彗星(这颗彗星从1811年4月到1812年1月一直能用肉眼看到——校注)，据说这是一颗预示着各种灾难和世界末日的彗星，它周围被撒满了的星斗拱卫着，它不同于众星的是它低垂地面，放射白光，高高地翘起长尾巴……它以无法形容的速

度,沿着抛物线在无限的空间飞驰,忽然间,就像一支射向地球的利箭,在黑暗的天空中剌入它选定的地点就停住了,强劲地翘起尾巴,在无数闪烁的星星中间,炫耀着它的白光."[60] 但对高斯而言,这只是证明他的计算完全正确.

在长期拖延之后,威斯特法利亚政府于1810年决定分5年拨出20万法郎建造新天文台.1816年秋新天文台竣工.它东西长约36米,进深约14米,东西两翼各有向北延伸的作为教授之家的两层楼公寓.高斯于这一年迁入新天文台的西公寓居住,直至去世.



新建的格廷根天文台

13 丧妻再娶

女儿降生给高斯增添了欢乐,他在1808年9月2日写给W·波尔约的信[61]中说:"由于家庭日常生活不变的进程,日子过得很快活.女儿出了一颗新牙或儿子学了一些新词,都会像发现一颗新星或一项新真理那样重要."1809年9月10日,第三个孩子来到人世,取名路德维希,以纪念婚神星发现者哈定.家里人都叫孩子为路易斯,他爸爸还要加上形容词,叫他"可怜的小路易斯".可惜路易斯不幸早夭,于一岁半时去世.

约翰娜生明娜时难产,受了不少罪.生下路易斯一个月后,1809年10月11日,她就与世长辞.高斯极度悲痛,次日写信[62]给奥尔伯斯说:"昨天晚上八时,我阖上了我的天使的双眼,五年来我在这对眼睛中发现了天堂."下葬后不久,高斯去不来梅访问了奥尔伯斯,又去阿尔托那访问了舒马赫,回格廷根时顺路去不伦瑞克同一些老朋友相叙.

1927年,高斯的一个孙子在他祖父的文件中发现了他为已故妻子写的悼词,共有两张半对开纸,上面明显有泪痕.悼词分两部分,第二部分注着10月25日(不来梅).第一部分用粗羽毛笔写就,墨水颜色比第二部分深,但没有注时间地点.悼词中写道:



现在的格廷根天文台



高斯居住的天文台西公寓

“我深爱的灵魂,你看到我的眼泪了吗?只要我称你为我的,除了我的痛苦外,你不知道别的痛苦.你为自己的幸福所需要的只是看到我幸福,此外别无所求.那幸运的日子!我这傻子本来以为这样的欢乐会是恒久的,盲目地以为你这天使的化身会

命定在我整个生命过程中陪我承受各种琐碎的负担,我怎么能配得上你?你不需要尘世的生活来使你变得更好.你来到世间只是为了为我们树立楷模.啊!我是幸运的人,神秘的命运驱使你出现,以你的爱,以你最温柔、最纯洁的爱照亮漆黑一团的道路.我敢把自己与你相提并论吗?亲爱的人,你自己并不知道你是多么地无与伦比.你以天使般的温柔容忍我的过失.啊!如果说已仙逝者仍在我们这些可怜人周边徘徊但我们无法看见,那么不要抛弃我.你的爱会转瞬即逝吗?你会对这可怜的心灵减弱他视为最大财富的你的爱吗?最善良的人啊,一直待在我心灵周围吧!你的神圣安详的心灵帮助你忍受同你亲爱的人的分离,让这颗心同我交流,帮助我越来越配得上你!啊,对于我们爱情的珍贵的产物,有什么可以代替你,代替你慈母的关爱,代替你的训导?只有你才能使我更坚强、更崇高地为他们活着,而不致在悲痛中沉沦.

"10月25日——孤单寂寞,快乐的人群在这里包围着我,我却偷偷躲避.如果有时候他们让我忘了自己的悲痛,那么后来悲痛又以双倍的力量回到我心头.对他们愉快的面容,我毫无回报.我能对你逐渐冷淡吗?这是你不应得到的.甚至明亮的天空也使我更加悲伤.亲爱的,现在你本来应该起床,现在你本来应该挽着我的手臂散步,我的手里则抱着我们可爱的孩子,你本来应该为你恢复健康高兴,为我们各自在对方眼神中看出的幸福感到高兴.我们憧憬着美好的未来.妒忌的恶魔——不,不是妒忌的恶魔,而是不可捉摸的命运,不愿意让这实现.啊!升入天国的灵魂,现在你已经清楚地看到,神秘的力量已经来临,它要砸碎我的幸福.你会不允许在我孤独凄凉的心头注入些许(甚至在你活着的时候你也非常富有的)慰藉和顺从吗?你是这样地爱我.你是多么渴望同我待在一起!我不应该过度悲伤,这几乎是你最后的嘱咐.啊!我怎样才能减少悲痛?啊!求求上帝——他能拒绝你的请求吗?只有一件事,求求上帝,让你无穷无尽的仁慈永远伴随在我身边,帮助我这地上可怜的人尽我所能以你为榜样努力奋斗."[63]

特稿

尽管高斯丧妻后十分悲痛,但为了继续进行科学工作,为了年幼的孩子,为了摆脱无法忍受的孤独,他还是决定尽快再婚.高斯选中了明娜·瓦尔德克,她生于1788年,父亲是格廷根大学的法学教授,属于贵族阶层.明娜是约翰娜在格廷根的最好的朋友.高斯在1810年3月27日给明娜写了求婚信,写信前他征询了明娜父母的意见,得到了他们的鼓励.信中说:

"当我写这封我生活幸福所系的信时,心在激烈地跳动.当你读到它时,就会知道我的愿望.最好的人,你能接受它吗?丧失热爱的配偶半年还不到,我就想再结良缘,会不会使我在你面前处于不利地位?你会不会因此认为我感情不专甚至更坏?

"我希望你不会这样.如果我不能使自己相信,我在你心中有着很好的印象,不会认为我会有使自己感到羞耻的动机,我怎么会有勇气来争取获得你的心?

"我极其尊重你.我不想向你隐瞒,我只有一颗破碎的心奉献给你,在这颗心中那亲爱的灵魂的形象永远不会消逝.不过如果你知道你是这样完美,我的亡妻是怎

样地爱你、推崇你，你就会理解在这个重要时刻，在我问你能否下决心接替她留下的位置这个时刻，我就看见她活生生地站在我面前，对我的愿望许以高兴的笑容，并祝愿我和孩子们快乐幸福.

"但是，我亲爱的人，我不想在你生命的最严肃的事情上诱惑你. 仙逝者会以真挚的欢乐看着我的愿望实现；令堂——我已告诉她，她会告诉你是什么驱使我这样做——和令尊——他通过令堂得知这一切——都赞成我的想法并希望我们由此得到幸福；我——从开始认识起你就对我很亲切——也会由此得到极度的欢乐. 我提这些只是为了恳求你，不必考虑这些，只须想你自己的幸福，只须考虑你自己的心. 你应当拥有完全纯粹的幸福，不应当受到在我禀性之外的任何次要因素的影响. 我还要向你坦陈，不管我在生活的别的方面的要求是多么一般、多么容易满足，但在最狭小、最亲密的家庭关系上，却不能有中间情况，要么极度幸福，要么非常不幸；如果你不能通过同我结合得到完全的幸福，那也不会使我幸福.

"亲爱的人，问问你自己，你是否能给我再多些. 如果你发现你不能，不要犹豫，向我宣布你的判决. 然而，如果你允许我称呼自己比'你最诚挚的朋友'更美丽的词汇，那我就无法用语言来形容我的幸福.

你最诚挚的朋友

卡尔·弗里德里希·高斯"[64]



高斯第二任妻子明娜的肖像

很大程度上由于双亲的影响，明娜接受了高斯. 1810 年 4 月 1 日两人订婚. 1810 年 8 月 4 日，两人在格廷根圣约翰教堂举行了婚礼. 明娜持家有方，对约翰娜所生孩子视如己出，呵护关爱，孩子们也很爱她. 她同高斯生了 3 个孩子：欧根，生于 1811 年 7 月 29 日；威

廉,生于1813年10月23日;女儿特蕾丝,生于1816年6月9日.可惜新婚欢乐没有持续很久,1818年起明娜健康状况下降,得了肺结核,疾病几乎不停,不能参加作为教授夫人的社会活动.明娜于1831年9月12日去世,时年43岁.此前发生的欧根突然移民美国引起的伤感无疑也加速了她病情的恶化.

14 天文著作

1809年,高斯的第二部大著作出版,书名为《天体沿圆锥曲线绕日运动之理论》[65].这本书最初是用德文写的,后应出版商要求译为拉丁文出版.此书的法文节译本出版于1855年,全译本出版于1864年;英译本出版于1857年,1963年出了重印本;德文本出版于1865年.

这部著作的主题不用任何多余的、没有事实根据的假定,从数目最小的观测来确定行星和彗星的轨道.高斯在序言中提到谷神星的例子,它的发现促进了书中所用方法的发展.此书共两卷,上卷是初步材料,下卷是一般问题的解.它是高斯直接从开普勒定律导出计算天体轨道的方法的第一部严格论述.值得注意的是同年在《地球和天文科学月报》九月号上发表的《为确定两颗新发现的主要行星轨道所用方法之概览》[66],林德瑙说他1803年访问高斯时看到过此文手稿.这表明高斯在6年前已提炼出他的主要方法并使之数学化,其主要因素是插值和逐步改进取值.

特稿

此书上卷讨论描绘天体绕日运动的不同参数之间的关系.第一章给出要用到的大多数概念如径向量、近点角、偏心度等的定义,并给出为描绘给定天体在其轨道上给定点处的位置所需的三角公式.这一章中还讨论了如何对对数表进行外插,如何以椭圆和双曲线逼近抛物线.

第二章论述把一个天体的地心轨道确定为3个坐标的函数.高斯从定义诸如黄道、交点等特征参数开始,到确定刻画天体运动的7个要素,推导并讨论了这些要素之间的三角关系式.如同第一章,本章还讨论了辨别不同圆锥曲线的准则.最后高斯建立了在地心坐标系中天体运动的微分方程,并把它用于实际例子.

第三章论述由几个观测即空间中几个点计算轨道的问题,这里的推导都是初等的,级数展开也只有前几项,而且没有讨论收敛性,对连分数展开也是这样处理.这章特别讨论了由两个要素确定轨道并给出了许多例子.

第四章讨论几个观测都与太阳位于同一平面的情形,其中又推导了一些三角关系式.特别有意义的是关于太阳位于顶点的棱锥模型的讨论.

下卷处理此书的主要问题——由实际观测确定天体的轨道.高斯分两步解决这个问题:先从数目最小的三四个观测得到近似解,再借助其他观测数据来改进前一步得到的结果.这卷第一、二两章处理第一步,第三、四两章处理第二步.

第一章讨论对于为确定轨道所必须计算的7个要素,怎样从数目最小的3个观测来近似其中的6个;至于第7个要素质量,则必须单独确定.每次观测得到两个独立参数——黄经和黄纬,这就是3个观测已足够的道理;除非观测轨道位于或非常接近位于

黄道上，此时需要 4 个独立参数. 高斯在本章中导出了这些要素满足的精确方程. 由于这些方程太复杂，高斯考察了不同要素的天文学意义，引进了由两个径向量确定的扇形和三角形面积之比（这是一个具有重大意义的新想法），由此进行迭代，得到数值结果. 最后高斯举了几个例子并讨论了误差限. 本章很长，篇幅占全书 1/4，但用的都是代数和球面三角这样的初等工具.

第二章考虑 4 个独立观测的情形，它涉及天体轨道位于或接近位于黄道上，此时如果只用 3 个观测值，那么观测的微小误差也会产生巨大影响. 高斯还用了灶神星（其轨道接近于黄道）的数值例子.

最后两章论述如何改进用前两章中的方法得到的近似解. 高斯在第三章中首次发表了他的最小二乘法，它是改进轨道计算的最合适、最有效的工具. 他在 §186 中把这一方法的基本原理表述为："观测量与计算所得量之差的平方之和应为最小." 他在计算谷神星轨道时用的其实就是这一方法.

在第四章中，高斯对大行星引起的椭圆轨道的扰动作了一些评注. 他强调这个问题很重要，事实上他对此也思考多年，不过书中并未进行详细讨论.

在数学上值得特别注意的是高斯在这本书中提出了误差的正态分布思想. 这种思想还总结在他 1823 年发表的关于最小观测误差理论的两篇论文中[67][68]，文中阐述了他关于最小二乘法与概率演算之间唯一合适的联系的观点. 他说他的出发点与拉普拉斯相同，但在发展这一理论中用了不同的方式. 1826 年 9 月 16 日，他又递交了两文的增补[69]，此文是他大地测量工作（后文会有介绍）的直接结果.

他认为，对于一个给定的行星，如果我们想以最大的概率找到它的轨道，就应当先弄清楚随着误差增大，误差概率如何变小的数学关系. 他假定一个误差由一些基本误差组成，而观测值的算术平均是要测的量的最可能值. 他确定观测误差概率的公式为

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2}$$

其中 $h = 1/\sqrt{2}(S.D.)$，$S.D. = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2}$ 为标准离差，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ 为 N 个观测值，现在常称正态分布曲线为高斯曲线，其源盖出于此（不过棣莫弗于 1733 年已描绘过这种曲线）. 此后正态分布曲线及其统计应用不断开拓到越来越广泛的领域.

《天体沿圆锥曲线绕日运动之理论》在天文学中是划时代的经典性著作. 有趣的是它正好在开普勒的名著《新天文学》出版 200 周年时出版. 它写得简洁优美，完全可以用作教科书，但又具有独创性和完整性. 大约过了 40 年，书中的方法才成为广大天文学家的共同财富. 书中发表的球面三角学的 4 个公式，现称德朗布尔 – 高斯相似（德朗布尔已于 1807 年发现这些公式，但发表也在 1809 年）.

高斯的书很快得到科学界的高度评价和普遍赞美. 高斯本人也自豪地写过："此书花费了我几年的劳作，对于它的正确性，我给予这样的评价：如果我没有错的话，甚至在几个世纪之后，它仍将得到研究."[70] 冯达尔贝格公爵为此书授予高斯金质奖章，伦敦皇家学会也向他颁发了奖章. 1810 年，法兰西研究院向高斯颁发由拉朗德建立的奖金，以表彰

他"在天文学领域最好的论著和观测". 但高斯不想接受来自法国的钱，因此奖金一直未发. 法兰西研究院的秘书把奖金的一部分买了一台摆钟送给高斯，它一直放在他的房间里. 德国皇家天文学会在高斯去世时发表的讣告中对这本书作了这样的评论："《天体沿圆锥曲线绕日运动之理论》会永远列入伟大著作之列，它的出版构成了它所涉及的学科的一个时代. 书中详尽论述中的原创性和完整性，绝不亚于作者表达上的简明优美的形式. 实际上它还可以用做本世纪德国天文学家所研究的精致的、强有力的方法的教科书."[71]

15　辉煌十年

特稿

在 19 世纪的第二个十年中，高斯在数学各个领域中出现了喷涌想法的第二个高潮，而且这段时间他在不同分支的许多问题上同时工作. 克莱因称这十年为高斯的"英雄岁月". 从发表论著的数量看，这也确实是他最辉煌的十年：1796 ~ 1800，3 篇；1801 ~ 1810，58 篇(部)；1811 ~ 1820，116 篇(部)；1821 ~ 1830，54 篇(部)；1831 ~ 1840，50 篇(部)；1841 ~ 1850，35 篇(部)；1851 和 1852 年，4 篇. 就是说这十年的发表数占一生发表总数 320 种的 1/3 以上.

在数论领域，1811 年发表《奇异级数之求和》[72]，其中讨论的"奇异级数" 其实就是现称的"高斯和"，即形如

$$W = \sum_{\nu=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}\nu^2}$$

的表示式. 它在高斯本人的工作中起的作用不算大，但在数论嗣后的发展中却占有重要位置，不过其重要性只是到 20 世纪 20 年末才开始明显起来. 文中建立了一系列和式[73]. 高斯用的都是初等工具，推算过程复杂，但不算困难. 文中有不少数值例子，还有一些关于他的想法的解释. 最后一节是二次互反律的一个新证明以及他称之为"二次互反律的补充" 的一些定理.

$$\sum \cos ak\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \cos bk\omega = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \cos ak\omega - \sum \cos bk\omega = \pm\sqrt{p}$$

$$\sum \sin bk\omega = 0$$

$$\sum \cos ak\omega = \frac{1}{2}$$

$$\sum \cos bk\omega = \frac{1}{2}$$

$$\sum \sin bk\omega = \mp\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \sin ak\omega - \sum \sin bk\omega = \mp\sqrt{p}$$

这里还可以谈一下高斯对费马大定理的看法.巴黎科学院于 1816 年把证明(或否定证明)费马大定理作为 1816 - 1818 年的悬赏问题.奥尔伯斯于 1816 年 3 月 7 日写信给高斯怂恿他参赛.3 月 21 日高斯回信[74] 说:"我承认,费马定理作为一条孤立的定理,对我来说兴趣很小,因为可以容易地建立大量这类定理,人们既不能证明也不能否定.然而它又一次激励我想起大大拓展数论的一些老想法.当然这种理论属于这样的范围,人们不能预期在达到远处朦胧地徘徊的目标中会取得何种程度的成功.幸运之星必须占上风,而我的情形和那么多分散精力的业务当然不允许我从事如同我在 1796 - 1798 年间创建《算术研究》主要论题时那些愉快岁月里那样的思索.不过我相信,如果能有比我期望还多的好运气,并使我能在这一理论上成功地取得某些进展,那么甚至费马定理也将只是意义不大的推论之一."

高斯关于拓展数论的老想法,指的无疑是后来由库默尔、戴德金和克罗内克开发的代数数论.高斯上面这些话不由得使我们想起 20 世纪初有人问希尔伯特为何不尝试证明费马大定理时的回答.希尔伯特说,在开始着手之前,他得用 3 年的时间作深入的研究,但他没有那么多时间浪费在一件可能会失败的事情上.两位大数学家的反应竟如此相似!

大家知道,费马大定理已被怀尔斯于 1995 年证明,关键一步是证明"谷山 - 志村猜想",这个猜想在椭圆曲线和模形式这两个不同的数学领域之间建立了深刻的联系,而费马大定理不过是一个推论.现在回过头去看高斯说的话,虽然并非"句句是真理",但他观察的深刻和预见的独到(大理论的一个推论),确实令人折服.

前面提到过,按高斯原来的计划,《算术研究》还有第八篇,但一直没有写.可以肯定的是这一篇中会讨论高次同余并寻求相应的互反律即可解或不可解之间的关系.后来在 1828 和 1832 年发表的论文《双二次剩余理论》[75][76] 中,他又以伟大开拓者的勇气,指出有理整数对陈述四次互反性已不合适,为此需引进新的整数类型,即形如 $a + ib$(其中 a,b 是有理整数)的整数,这就是现称的高斯整数或复整数.这从概念上为简单优美地解决许多数论问题提供了基本框架.他详尽地讨论了复整数的算术可除性和唯一分解定理,从而揭开了代数数论的序幕.高斯通过复整数相当简单地陈述了四次剩余的互反定理,但没有给出证明;最早的证明是雅可比于 1836 - 1837 年给出的.对于三次互反性,高斯也有研究,不过是他去世后在其遗作中发现的.

在分析领域,1813 年发表的《无穷级数 $1 + (\alpha\beta)/(1 \cdot \gamma)x$ + etc. 之一般研究》[77],首次对无穷级数的收敛性进行了深入严密的研究,开辟了现代研究无穷级数的新方向,体现了他是分析严格化潮流的先驱者.文中研究级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)}z^m + \cdots$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)}z^m + \cdots$$

普法夫把它称做"超几何级数".欧拉曾研究过它,但高斯才是第一个深入掌握这类级数

的学者.文章一开头就说:

"我们的级数中幂 z^m 与 z^{m+1} 的系数相互之间犹如 $1+(\gamma+1)/m+\gamma/m^2$ 对 $1+(\alpha+\beta)/m+\alpha\beta/m^2$,因而当 m 增加时其比趋于 1.因此,如果对第四个元 z 给予固定的值,则级数收敛或发散将依赖于此.对于其大小(即绝对值 —— 引用者)小于 1 的任何(正或负的)实值 z,此级数必定收敛,如果不是从 1 开始,那也至少从某一点之后它会趋向一个有限的、确定的和.对于形如 $x+iy$ 的复数,如果 $x^2+y^2<1$,同样论断也成立.然而,对于大于 1 的实值 z,或者对于满足 $x^2+y^2>1$ 的形如 $x+iy$ 的复数,此级数将发散 …… 因而就不能谈论其和.最后,对于值 $z=\pm1$(或更一般地对于形如 $x+iy$ 的值,其中 $x^2+y^2=1$),此级数的收敛或发散就将依赖于 α,β,γ…… 由于我们的函数定义为级数之和,因此显然由其本性就决定此项研究应限制于级数确实收敛的情形,而问当 $|z|>1$ 时级数取什么值就是不合适的.然而,从第四部分起,我们将以另一定义为基础(指通过微分方程来定义 —— 引用者)讨论我们的函数,这就可以有更广的应用."

在第三部分中,高斯写道:

"…… 以所有可能的严格性,我们将证明:

"第一,如果 $\alpha+\beta-\gamma-1$ 为正,则系数无穷递增,除非级数终止;

"第二,如果 $\alpha+\beta-\gamma-1=0$,则系数连续收敛到一个有限的极限;

"第三,如果 $\alpha+\beta-\gamma-1$ 为负,则系数无穷递减;

"第四,对于 $z=1$,尽管在第三种 …… 情形,但当 $\alpha+\beta-\gamma$ 为正或零时此级数之和为无穷.

"第五,如果 $\alpha+\beta-\gamma$ 为负,则此级数之和为有限."

下面高斯推广了前面的研究,实际上建立了关于级数敛散性的"高斯判别法".最后高斯指出 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ 是微分方程

$$0=\alpha\beta P-(\gamma(\alpha+\beta+1)z)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}-(z-z^2)\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}z^2}$$

的通解.

高斯去世后,在他遗留的文档中发现了此文的续篇(载于《全集》第三卷).续篇从定义超几何函数的微分方程开始,从中可看到高斯对复平面上的积分运用自如,但没有解析延拓和单值性概念.

从高斯1850年9月1日致舒马赫信[78]中的一段话,可以看出他关于分析以至数学严格化的看法.信中说:

"现代数学的特征(与古代数学相反)在于,通过我们的记号和术语系统,我们有了一个杠杆,使用它最复杂的论断也能划归为某种机械步骤,科学因之获得了无限的丰富性、优美性和坚实性.然而当事情如同常规般进行时,它恰恰也丧失了很多东西.多少次这根杠杆只是被机械地拿来使用,尽管在绝大多数情形它的正确性隐含着某些未曾言明的假设.我要求,在运用记号系统时,在应用概念时,都应当自觉地明确最初的条件,决不能把机械操作得到的越出清晰正确范围的任何产物看做财富 …… 这类情形在发散级数上出现得非常之多.级数,当它收敛时,具有清楚明白的意义;当这条件不具备时,这种清楚明白的意义就没

有了,不管人们是否用'和'或者'值'这个词,本质上什么也改变不了."

高斯驱散了笼罩在复数上的神秘迷雾,确立了它在数学中的地位.16世纪意大利数学家卡尔达诺在解三次方程时发现,即使方程的根是实数,求出它时也不能避开复数,但他和其他一些数学家仍认为它很"玄".笛卡尔起了"虚数"这个名称,这很能表明他的看法.甚至牛顿都认为复数根没有意义,莱布尼茨也说复数是圣灵超凡的显示,是介于存在与不存在之间的两栖物.挪威测量员韦塞尔于1798年把平面上向量解释为复数,但他的文章一百年后才广为人知.瑞士会计师阿尔冈于1806年把它解释为平面上旋转一直角,但他写的小册子没有什么影响.

高斯在1796年时已有把复数解释为复平面上的点的想法.1801年他已用i代替.1811年他在给贝塞尔的信[79]中写道:"……正如人们能把实量的整个区域设想为无穷直线所表示那样,所有的量——实数,同样还有复数——的完整区域能设想为一个无穷平面,其上的点由横坐标 a 和纵坐标 b 确定,它同样表示量 $a+ib$."至迟到1815年,高斯已有复数几何表示的完整理论,不过完全发表却是在1832年关于双二次剩余的论文[72]中.在这篇论文的概述里,他清楚地阐明了自己的观点,首次引进了"复数"这个名词.他这样描述前代和同代数学家对复数的态度:"然而这些作为与实的量对立的虚数——过去甚至现在还不时被称做不可能的数,尽管这个称呼并不适当——只不过得到容忍,而不是赋予充分的同等存在的权利.于是这就更像是玩毫无内容的符号游戏,绝对避免归之以任何可以想象和显现的基础."对于仍然笼罩在复数上的神秘气氛,他写道:"如果说这个论题迄今为止仍是从错误观点来考虑,因而为神秘和黑暗所包围,那么很大程度上不适当的术语应承担责任.要是 $+1$, -1 不称之为正单位、负单位、虚单位(更糟的,不可能单位),而称之为,譬如说,原向单位、反向单位、侧向单位,那就不会有这类费解存身之处了."前一年他还写过:"现在虚数的原理已经真实地显露,它们像负数一样有很好的实在的客观意义已经得到揭示."

高斯的权威终于使复数在数学中取得与实数同等的地位.1849年不伦瑞克卡洛琳学院在高斯学位论文发表50周年时所致祝词中有"你使不可能成为可能"这句话,指的就是此事.

在复变函数论领域,高斯最早陈述了它的基本定理即现称的"柯西积分定理".他在上面提到的1811年写给贝塞尔的信中指出,对于积分,还有必要考虑积分限为复数的情形.他写道:"当上限为 $a+bi$ 时的意义应当是什么?显然,如果要求具有清楚的概念,那就必须假定 x 取小的增量,从使积分为零的 x 值到 x 为 $a+ib$ 的值,再将所有 $\varphi(x)\mathrm{d}x$ 加起来……但是在复平面上从 x 的一个值到另一个值的连续过程发生在一条曲线上,所以通过许多条路径是可能的.现在我断言,即使通过不同的路径,只要在两条路径所围的空间内 $\varphi(x)$ 是单值的,并且不变为无穷,那么积分只有一个值.这是一条很美妙的定理,它的证明并不难,我将在一个适当的机会给出这个证明."高斯还说,如果 $\varphi(x)$ 变为无穷,那么可以有许多值,取决于所取闭路径围绕 $\varphi(x)$ 变为无穷的点为一次、二次或更多次.高斯没有给出他所说的"并不难"的证明,从他手稿和笔记中也无从发现这个证明的思路.1825年,柯西在一篇关于积分限为虚数的定积分的论文中作了类似的陈述,并给

出了一个证明. 复变函数论是 19 世纪中方法和技巧发展得最精致、最优美的数学分支，如果高斯系统地发表他的想法，无疑又会在数学发展中树立一座里程碑. 皮卡对此做过这样的分析："人们不大可能认为高斯没有抓住高度重要的事物；然而，忠于他的'少而精'的原则，他无疑一直在等待以使他的作品更加成熟，而柯西这时却公布了自己的发现."[80]

高斯从事的大地测量工作(见下节)促使他于 1813 年写出关于位势理论的最早重要论文《以新的方法讨论均匀椭球体的吸引力》[81]. 这篇论文实际上还包含他在数学分析中的一个重大发现即现称的高斯散度定理(也称高斯公式或高斯 - 奥斯特洛格拉茨基公式). 不过应当指出，拉格朗日其实在 1764 年已发现这个公式，当然高斯并不知道这一点. 关于他在位势理论方面的工作，下面"物理研究"一节中还要讨论.

大地测量也提出了把地表椭球面映射到球面和平面上的问题. 这个难题导致他于 1816 年表述并解决了共形映射的一般问题：把一曲面映射到另一曲面上，使得两者"在其很小部分相似". 1822 年，丹麦科学院悬赏征求导出可以用来绘制地图的所有可能的投影这一问题的解. 这促使他写下自己的研究即论文《把给定曲面的一部分映射到另一曲面上，使得映射的很小部分相似于被映射曲面的对应部分这个问题之一般解》[82]. 此文荣获大奖并于 1825 年发表. 这个问题的特解 —— 球极平面投影以及墨卡托映射，老早就已知道. 球面到平面的相应问题也已为兰伯特一般地解决. 高斯在其论文中给出了一般问题完整的解和共形性的一般判断准则，其出发点是"从前一区域一个点出发并完全包含于其内的无穷小线段正比于另一区域的对应线段；其次，前一区域一个点出发的两线段之间的夹角与另一区域对应的角相等". 文中使用的分析工具是现在称做的柯西 - 黎曼方程和简化线元平方所需的积分变换. 此文还有两曲面可以互相贴合展开的简单条件，实际上这就是等距映射的基本原理. 文章最后讨论了 3 个特例：平面到平面、球面到平面和旋转椭球面到球面的共形映射. 顺便说一句，"共形"这个词是高斯在 1843 年提出的.

必须特别指出的是，高斯在这一时期除了理论天文学的研究外，还做了大量天文观测，尤其是小行星和彗星的观测. 大体说来，1816 至 1817 年是分界线，他在这两年结束了理论天文学研究，此后他的天文学活动属于观测和球面天文学范畴. 高斯在格廷根大学天文台的观测有相当完整的记录，共有两大卷和一本小的四开笔记本，大多按时间顺序记录，其标题为《在格廷根天文台所作天文观测之日志》，现仍保存在该天文台. 第一卷从 1808 年 11 月 3 日到 1822 年 4 月，中间有些空缺. 1822 年 4 月后高斯只做些特殊记录，因此不够完整. 小笔记本记的是 1808 年元旦到 7 月 31 日的观测. 高斯还亲自采购天文仪器，1818 年 4 月 10 日一台雷普瑟尔德制造的子午仪运抵天文台，1818 年 5 月 1 日高斯开始记一本新日志，标题为《在雷普瑟尔德子午仪上所作观测之日志》. 这本日志直到 1927 年才引起人们注意. 他的观测工作一般从中午或下午开始，直到黄昏，每天大概观测 10 到 15 颗星.

16　大地测量

从 1816 年起，高斯对大地测量发生了浓厚兴趣. 1817 年，高斯准备就绪，开始转向大

地测量.在其后十几年中,大地测量竟成为他的头号工作,事实上也成为他的一大重荷.

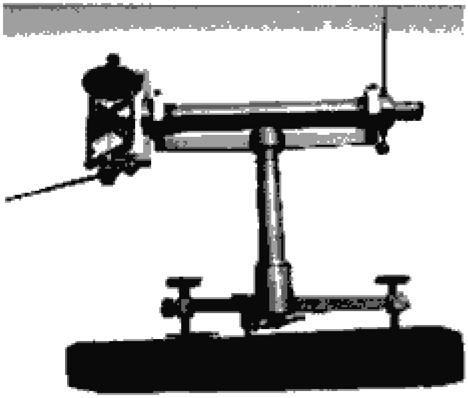
由于地球呈球形,而球面上连接给定两点的所有曲线中以大圆弧的长度为最短,因此在大地测量中,两地之间的距离就由连接两点的较短大圆弧的长度确定.地面上两点之间直线段之长与(较短)大圆弧之长的差别,约为每千米0.8厘米.当距离较小时,显然平面测量已经足够;但当距离较大时,就不能忽略这个差别.

在进行精确的大范围测量时,测绘人员通常在开阔的平坦空间选定一条基线加以精确测量,以此作为基准.从基线的两个端点瞄准一个点,并测量出角度,由此可通过三角学算出这样做出的三角形的另外两条边.接着又可把这两条边作为基线,确定增添的另外两个三角形的边.不断重复上述过程,整个区域就能得到测量.这就是通称的"三角测量术",通常由二三十个三角形构成测量的三角网.

其实高斯很早就对测量感兴趣.1803至1805年间,他就已用从察赫那里借来的六分仪和望远镜在不伦瑞克附近进行测量实践.1804年8月他与奥尔伯斯在雷布格矿泉相会时,两人一起测量了汉诺威、布罗肯与明登之间的角度.

1816年6月,舒马赫写信给高斯,说丹麦国王已为测量斯卡根到劳恩堡的经线弧和哥本哈根到日德兰半岛的经度拨出资金.他问高斯如何改进通常的测量方法,并问高斯是否有兴趣把这种测量扩展到巴伐利亚.高斯在回信中表现出热情,但没有立即表示参加此项工作,主要原因是他缺乏这方面的实际经验和助手,申请经费也是一大棘手问题.亏得舒马赫直接向格廷根大学董事长冯阿恩斯瓦尔德男爵提出申请并得到后者的大力协助,1818年9月高斯获得在劳恩堡进行测量的委任.1820年春,大不列颠和汉诺威国王乔治四世批准在整个汉诺威王国进行测量.这年9月12日到10月25日,高斯参加了汉堡东北12千米处布拉克的测量.1820年底,高斯为以后的测量做准备工作,其间遇到的困难不计其数,常弄得他大发脾气.实际三角测量工作于1821年至1823年间进行,高斯亲自在严酷的野外条件下进行测量,这使他十分疲惫,健康状况下降.高斯在致舒马赫的信中就提到工作中"困难难以言表",住处"根本没有许多给人方便的设施",庆幸那些天他"总算挺过来了".1823年3月他还从马背上摔了下来,幸好伤得不重,一周后他写信给奥尔伯斯说眼睛下方五彩缤纷的小块是这次事故留下的唯一痕迹.1823年5月,汉诺威行政当局批准高斯扩大测量的计划,这年5月底他开始夏季测量工作,到10月中旬才结束.由于三角网相当复杂,一共有26个三角形,所有角他都亲自观测,因此工作量很大,他常要忙到深夜.

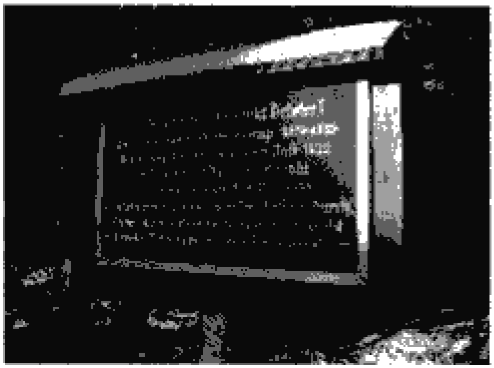
为了加速测量,高斯发明了日光回照器.据他儿子欧根说,高斯同他一起散步时,注意到落日阳光从远处窗户反射过来,使他萌生利用日光反射让测量人员"看见"远处某个点的想法.他发现4厘米×6厘米的镜子反射的阳光相当于一等星的亮度,于是设计了一种简单的仪器.它的主要装置是一面直径为15至20厘米的镜子,能沿水平轴和铅直轴旋转.把它置于需观测的地点,使它反射的日光进入观测地点的望远镜,观测者通过望远镜凝视,就能确定两个地点的方向.1821年7月,第一架日光回照器制成.现在格廷根大学地球物理学院仍保留有这样的装置.日光回照器一直是高斯喜爱的发明.



高斯发明的日光回照器



高斯 1822 年 7 月测量时用做基点的一块石头，人称"高斯石"

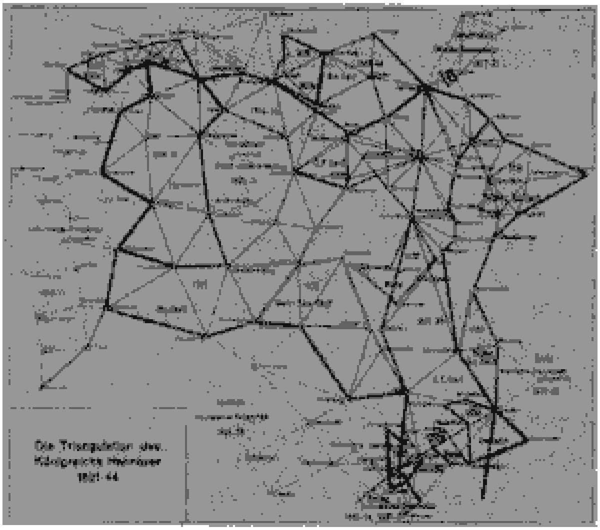


关于高斯 1821 ~ 1823 年在此地进行大地测量的告示牌

1824 年 4 月 18 日测量工作又开始进行，这时他有了一位不错的助手，并用上了 4 台日光回照器. 这段时间里柏林大学曾做出多方努力聘请高斯，也有不少朋友劝他去柏林，但他还是决定留下. 这年汉诺威国王批准提高了他的年薪，部分原因也是对他的测量工作表示满意. 1825 年 4 月他又开始野外测量. 由于助手生病，他甚至不得不自己动手擦拭仪器. 4 月 25 日赶路时马车在过一条沟时翻了，经纬仪箱子压着他的大腿. 幸亏车速不快，伤得不重，仪器也无损坏. 这一年工作中仪器常出毛病，食宿条件也很差，使他健康受损. 他曾说他一生中从未有过像这样工作如此紧张而收获又如此稀少的时期.

1827 年春，高斯开始计算已测的三角网，它共有 32 个点，51 个三角形，146 个方向角. 为确定阿尔托那与格廷根之间的纬度差，高斯又开始测量，工作很辛苦，常常延续到凌晨四五点钟. 不过他做测量时每天能获得 5 塔勒的津贴，测量完成后还能得到 1 000 金塔勒的额外奖励. 1828 年 3 月 28 日，乔治四世发布命令，由高斯领导，把三角测量扩展到整个汉诺威王国. 高斯于每年春季提交夏季工作计划，到秋季则加以总结报告进展. 野外工作

结束后,高斯得花几个星期来计算,没有助手帮忙.计算结果共有6大卷,至今仍保存着.1828年后,高斯再也不参加野外测量工作.1828年9月他去柏林参加一个科学会议,在洪堡家作客3周.此后除1854年参加铁路开通典礼外,他从未离开格廷根一天以上.但1828年后他仍花大量时间进行计算,他自己估计计算中用的数据超过上百万个.他在大地测量中革新了方法,尤其是发明了日光回照器,改进了测量角的过程,发现最小二乘法在此项工作中有广泛应用.在数学方面,这项工作促进了他关于共形映射和曲面理论的研究.前者已在上节提到,后者我们要在下节细加讨论.



汉诺威1821至1844年间进行的大地测量

确定阿尔托那与格廷根之间的纬度差的测量导致高斯在1828年发表与此有关的著作[83].此书灵活运用了最小二乘法,还讨论了地球表面的不规则性.高斯还在1845和1847年发表关于高等大地测量的两篇论文[84][85].其中第一篇讨论椭球面到球面的共形映射,还给出了汉诺威和瑞士的测量这两个数值例子.这一篇最后讨论的是由球面三角形一边之长、一顶点之方位及其地理纬度确定另一端的方位、它的地理长度以及两点之间的经度差.第二篇对椭球面上的三角形讨论前一篇最后提出的问题.高斯导出了6个公式,由此借助他篇末附录中的数值表即可进行计算.他的方法直到19世纪末还在大地测量中广泛使用.高斯曾打算写一本关于大地测量的著作,但真正做得很少,他去世后在其遗文中只发现了一篇大纲和第一章导言的手稿.

高斯是否有必要花这么多时间搞大地测量,当时就有人提出疑问.贝塞尔认为这类工作应由水平较低的数学家去做,高斯做这类工作并没有多大重要性.高斯是这样回答贝塞尔的:

"在这世界上所有的测量都不比使得体现永恒真理的科学真正前进的一条定理更有价值.然而你所判断的不是绝对价值,而是相对价值,而同我的三角网相关连的测

量……无疑具有这种价值.不管你怎样低估这种工作,在我看来它比它所打断的那些工作更高些.在这里我确实远不是我的时间的主人.我必须在教学(我对它总有反感,白白扔掉时间的感觉始终伴随着我的教学活动)与实际天文工作之间划分时间.我总是非常高兴地这样做,当得知一个人在许许多多细枝末节上得不到任何帮助,浪费时间的感觉只能被自觉到正在追求极其重要的目标来冲走,你就会同意我的想法……

"……事情在于,我不能拒绝这样的任务,虽然它会招来许多抱怨,可能影响我强壮的身体,但它确实有用;当然它也可以由别人来干,但我有有利条件,会使某些事情做得更好些,这些事情如果不由我亲自接手,肯定不会得到落实.最后,我也不应当向你隐瞒,它多少能平衡存在于我的工资与一个大家庭的开支需要之间的不等式."[86]

17　曲面理论

作为植根于大地测量的一项研究,高斯的论著《弯曲曲面之一般探讨》[87]于1828年发表.这是他在以大地测量为主的时期中登峰造极的工作,也是他在开创数学研究新方向上最后一次惊人的突破,即开创了内蕴微分几何.

特稿

欧拉于1760年提出了曲面上点的坐标可用两个参数表示的思想,他导出了过曲面上一点处法线的平面截曲面所得截线的曲率的公式,得到了主曲率概念.蒙日研究了空间曲线及与之相联系的曲面、可展曲面与单参数平面族的包络以及直纹面的一般表示.但是,正如高斯在本书中所写:"尽管几何学家对曲面的一般探讨给予了很多关注而且他们的结果涉及了高等几何领域的相当一部分,但这一学科非但仍然没有探究完,而且可以说迄今为止只有一小部分极富成果的领域得到了研究."

对于曲面 $r = r(u,v)$ 或 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$,高斯(他用 p,q 记参数)把弧长元素写成

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

其中 $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, F = x_ux_v + y_uy_v + z_uz_v, G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$,这就是现称的第一基本型或第一基本形式.他导出了曲面上过同一点的两条曲线之间夹角通过 E,F,G 表达的公式.接着他研究曲面的曲率.在曲面上点 $P(u,v)$ 处,高斯引进了现称的"高斯标架"—(r_u,r_v,n),其中 $r_u = \dfrac{\partial r}{\partial u}, r_v = \dfrac{\partial r}{\partial v}, n = \dfrac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$,还引进了曲面的"球面表示"或现称的"高斯映射":取一单位球面,令 P 对应于从球心出发的向量 n 的端点,记此映射为 ζ.他定义曲面在点 P 处的曲率(现称全曲率或"高斯曲率")为

$$K(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{area}(\zeta(D_\varepsilon))}{\mathrm{area}(D_\varepsilon)}$$

其中 D_ε 为曲面上含点 P 的直径为 ε 的一个小区域,$\zeta(D_\varepsilon)$ 为 D_ε 在高斯映射下的像.他进行了大量微分运算,得到了一个基本结果[88].高斯导出了用 $\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}, n$ 和第一、第二基本型的系数表示 $\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}$ 的微分的公式,就是现称的高斯公式;还导出了联系两个基本型系

数的一组偏微分方程，就是现称的高斯方程，它们与柯达奇方程一起构成曲面的基本方程．更加令人惊奇的是，接下来高斯证明全曲率只依赖于 E,F,G[89]．这个结果的几何意义总结于他所称的著名的"绝妙定理"之中：

"如果欧几里得空间中的一片曲面能贴合（就是现称的'等距映射'—— 引用者）到另一片曲面上，则对应点处的全曲率相等．"

他还写道：

"这些定理导致看待弯曲曲面理论的新途径，开辟了广阔的、完全没有开拓的研究领域．如果不把这些面片解释为立体的边界，而解释为小 1 维的可以弯曲但不能伸展的曲面，就能看出必须考虑两类根本不同的关系，即依赖于空间中曲面的某种特定形状的关系和独立于曲面形状的关系．后者正是这里所讨论的．根据前面的讨论，曲率度量即为其中之一．容易看出，曲面上曲线的长度，曲线之间的夹角，它们的面积以及全曲率，点与点之间的最短连线等属于同一范畴．所有这些研究都基于这样的事实：曲面的性质由形如 $\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$ 的不定线元给定．"此前他在 1825 年 12 月 11 日致汉森的信[90]中还说过："关于曲面的研究深深影响许多其他事情；我甚至要说，它们涉及空间几何学的本质．"

这就是高斯关于微分几何的影响深远的伟大规划，即研究曲面的只依赖于第一基本型或线元的几何性质即现称的内蕴性质．这里可以看出高斯与他以前的数学家在观念上的一个根本区别：高斯之前的数学家把曲面看做由无数条曲线组成；高斯则把曲面看做一个整体，把它看做一个 2 维流形，这就开辟了通向研究多维流形的道路．从计算曲面全曲率的两种方法也可看到两者的差别：一种是求出曲面的主方向，计算相应的曲率线的法曲率之积，这种方法本质上欧拉已经知道，它是外在的；另一种则是运用高斯"绝妙定理"，这是内蕴的．高斯微分几何研究的另一重要特点是他能洞察具有本质意义的东西．例如，欧拉已有球面映射的想法，罗德里格已发现曲面上小区域的面积与它在球面映射下的像的面积之比的极限，然而正是高斯首次认识到这个极限的重要性并用它来定义全曲率．

在上面这些重要研究之后，高斯讨论了曲面上测地线的性质，其中含有证明曲面上存在正交曲线网的"高斯预备定理"．高斯还指出曲面上由测地线围成的"测地三角形"的全曲率等于其内角和与平面角之差．这个著名论断就是通称的高斯 – 博内定理．最后，高斯推广了勒让德关于球面三角形内角之间关系的定理，并对非球面三角形研究了类似的关系．



高斯 1828 年时的素描像

本书所用的方法是解析的、直接的，非常一般但又十分简明．书中一系列的概念和定理充分地、完整地反映了高斯的微分几何观念．他远远超越了欧拉在这一领域所做的工作，决定了这一学科以后的发展方向．爱因斯坦说："高斯为我们提供的最好的东西好像是独一无二的产品．如果他没有创造作为黎曼理论基础的曲面几何，就很

难想象任何别人能发现这一理论."[91] 陈省身说:"微分几何的始祖是 C.F. Gauss(1777—1855).他的曲面论建立了曲面的第一基本形式所奠定的几何,并把欧氏几何推广到曲面上'弯曲'的几何."[92] 这是对高斯在这一学科中开创性贡献的扼要精辟的总结.

18 非欧几何

从数学思想创新的角度看,在19世纪,分析领域最伟大的事件是分析的严格化潮流,几何领域最伟大的事件是非欧几何的发现,代数领域最伟大的事件是群论的创立.应当说其中最伟大的革命性发现是非欧几何,事实上它也是人类思想史上最惊人的革命性发现之一.前面已经指出,高斯是分析严格化的最早开拓者和代表人物,也是群论的先驱者之一.在这一节中,我们会看到高斯最早提出了非欧几何的思想.

大家知道,完成于公元前300年前后的欧几里得《原本》(《几何原本》),从若干定义、公理和公设出发,推导和证明出一系列的几何命题,成为严格逻辑演绎的最早完美典范.两千多年的初等几何教材,实际上都是《原本》的翻版.西方人普遍认为,《圣经》和《原本》是西方世界发行量最大的两本书.

特稿

《原本》第一卷开头给出23个定义,最后第23个定义是:"平行直线是在同平面内的直线,向两个方向无限延长,在不论哪个方向它们都不相交."接着是5条"公设":"1.由任意一点到任意一点可作直线.2.一条有限直线可以继续延长.3.以任意点为心及任意的距离可以画圆.4.凡直角都相等.5.同平面内一条直线和另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角和小于二直角,则这两直线经无限延长后在这一侧相交."然后有5条显见的"公理",后面就是一系列命题,每个命题都依据前述定义、公设和公理以及此前已经证明的命题给予证明.

直到18世纪末,所有数学家都认为欧几里得几何是物质空间和空间中图形性质的唯一正确的刻画,很多数学家还想把算术、代数和分析建立在欧几里得几何之上.康德认为欧几里得的原理和推论先于经验,是所谓"先验综合真理".然而,《原本》中的第5公设,虽然无人怀疑它的真理性,却有不少数学家觉得它过于复杂.即使欧几里得本人,也直到证明命题29(第一卷共有48个命题)时才首次使用这个公设.仔细读一下上段引文不难看出,第5公设确实与其他4个公设不同,它似乎不那么"自明",很像是一条定理.一些数学家设法以比较"显然"的等价公设来代替它,最为人熟知的就是下述"平行公设"或"平行公理":过已给直线外一个已知点只能作一条直线平行于所给直线.不少数学家则试图由其他4条公设以及5条公理和已证明的命题来证明第5公设.这样的数学家人数很多,简直可以组成数学家队伍中的一支方面军.可是他们的"证明"都经不起严格的逻辑检验,因为他们都不自觉地隐含地使用了等价于第5公设的假定或断言.尽管这些人都以失败告终,但其中有的人已经站到否定欧几里得几何是唯一可能的几何的门槛上.

意大利数学家萨凯里在去世前几个月出版的一本小书中,首次试图用归谬法证明第

5公设.他从《原本》第一卷前28个命题(如前所说,它们的证明不用第5公设)出发,研究等腰双直角四边形即两邻角为直角且这两角所夹的两对边相等的四边形.容易证明这四边形的另外两个角相等.如果利用第5公设,不难证明两这个角都是直角.萨凯里不这样做.他提出这两个角为直角、钝角和锐角这三种假定,分别称为直角假定、钝角假定和锐角假定.他想通过证明后两个假定不真来证明只有直角假定成立,而这等价于第5公设,于是第5公设就得到了证明.

萨凯里证明了一系列重要结果.例如,他证明在直角假定下,三角形内角和等于两直角,过给定直线外一点有且只有一条直线与所给直线不相交;在钝角假定下,三角形内角和大于两直角,过给定直线外一点没有直线与所给直线不相交;在锐角假定下,三角形内角和小于两直角,过给定直线外一点有无穷多条直线与所给直线不相交.现在看来,下一步很容易:只要承认这三种假定都可能成立,他就发现了非欧几里得几何.可是当时要跨这一步确实很难.萨凯里隐含假定直线为无限长,由此否定了钝角假定;他又用毫无说服力的"矛盾"否定锐角假定,终于与非欧几何擦身而过.距离是如此之近,可又显得那么遥远.

兰伯特在1766年写的《平行线理论》(1788年才出版)中也进行了类似的研究,不过他的出发点是三直角四边形,然后对第四个角作直角、钝角和锐角三种假定.他证明了比萨凯里更多的结果,例如在钝角假定下三角形内角和超出两直角的盈量和在锐角假定下三角形内角和小于两直角的亏量都与三角形的面积成正比.他还猜测由锐角假定推出的几何能在虚半径的球上证实.可惜他同样用直线为无限长否定钝角假定,又用含糊的推理否定锐角假定.

勒让德在试图证明第5公设上或许保持了坚持年头最长的纪录.他关于平行公设的最后论文发表于他逝世那年即1833年.他考虑某个三角形内角和等于、大于或小于两直角的三种假定,通过隐含承认直线的无限性,他否定了第二个假定.他多次尝试否定第三个假定,但都得引进别的假定,例如过小于60°角内的一点总能作一直线交此角的两条边,而这一点等价于第5公设.

现在高斯登场了.根据他1846年11月28日致舒马赫的信[93],我们知道早在1792年15岁时,他已设想过一种几何,"当欧几里得几何不真时,它会出现而且应当出现."当然,这里指的只是一种想法的闪现.在1846年10月2日写给格林的信[94]中,他说在每种不依赖于平行线公理的几何中,关于多边形面积正比于外角和与360度之差的定理是"这种几何理论的首要定理(就像它的大门),这点我1794年已认识到其必然性".1831年5月17日他告诉舒马赫,他已开始写下关于平行线的某些思索,其中有些部分已有40年之久.这都表明他关于平行公设的想法萌芽于1792～1794年,而且一开始就有欧几里得几何不是唯一可能的几何这样的想法.

在格廷根大学攻读伊始,高斯已看到欧几里得几何的弱点,并考虑过拒绝平行公设对多边形面积所产生的结果.当时格廷根大学有不少人对平行线问题感兴趣.卡斯滕纳热心收集这方面的文献.他于1763年指导克吕格尔写作先前关于证明平行公设的学位论文.但他认为头脑正常的人不会否定欧几里得几何.普法夫相信唯一可做的事是以更

简单的公理来代替平行公设.维尔德开设了一门关于平行线理论的试验讲座,1800年他还给出了平行公设的3个"证明".天文学教授塞费于1801年发表了关于证明平行公设的两篇评论,他的结论是,如果没有新的公理帮助,要证明平行公设是十分可疑的,或许是不可能的.高斯与塞费相当亲近,从1795至1827年,高斯在给别人的信件中提到塞费共计有26次,两人谈话时应当会涉及平行公设.事实上高斯就是在塞费家里邂逅他日后的终生挚友W·波尔约的,平行线理论是两人共同感兴趣的主要问题之一.1799年5月两人分别,W·波尔约回匈牙利后把自己的平行线理论写信告诉高斯,后者于1799年12月16日的回信中遗憾地说他抽不出时间来进一步检验W·波尔约关于几何基础的工作.他说他在这方面走得很远,但没有工夫把它真正搞出来.他对此前别人所做的工作都不满意,认为他们的所谓证明都是失败的.

W·波尔约于1804年当了数学-物理教授,又有时间拣起他的平行线理论.他把它修订了一下,于9月16日寄给高斯一个概要征求他的意见,并请他转交有声望的学会予以审查.W·波尔约认为平行公理不是独立的,它是欧几里得其他公理的推论.他的论证的核心是在一给定直线上作等距、等长的垂线,把这些垂线的端点连接起来.在欧几里得几何中,这样做得到给定直线的一条平行线.W·波尔约试图证明否定这个结论就会得到矛盾.11月25日高斯写了回信[95],信中说他为寄来的短文的真正的精妙感到高兴,文中思路与他自己的思路相似,但他还未能完全解决这个问题.他指出W·波尔约的论证中有一根本缺陷,即把隐含平行公理的无穷作图代之以隐含平行公理的有限作图.高斯在信中没有明确陈述自己的想法.他写道:"我的想法是你的方法还不能使我满意.我将尽我所能试图使一个关键之处清楚明白.这个关键点属于同一类型的障碍,它使得我的努力徒劳无功.我仍然希望在我有生之年最终能够飞越这些悬崖.可是我现在忙于别的事情,根本分不开身."高斯的信使W·波尔约大受鼓舞,他于1808年12月27日寄给高斯一个增补,但后者没有回复.两人之间的通信中断了8年之久.

高斯1813年写的一个注记中有这样的话:"在平行线理论上,我们现在比起欧几里得来毫无进步.这是数学的耻辱,它或迟或早会有不同的形式."[96]

1816年,高斯发表了对施瓦布写的关于欧几里得几何的教材和梅特尼赫写的关于平行线理论的书的评论[97],文章的口气已经不同,出现了"徒劳无功地用虚假证明的薄纱来掩盖人们不可能填补的缺陷"这样的词句,明显地暗示他认为平行公理不可能证明.不料这篇文章不但没有获得他所预期的成功,反而招致非难.很可能从这时起他决定再也不公开发表自己在这方面的观点和工作.

1817年4月28日,高斯写信给奥尔伯斯,信中明确地说:"我越来越确信,我们的几何的必然性是不能证明的,至少不能被人类的智慧证明或者对人类的智慧是不能证明的.或许对空间本质的另一种内省可以使我们达到另一种存在,它现在对我们还是不可达到的.到那时人们就不会把几何列入算术(它处于先验的地位)而近似地列入力学之中."[98]他写给格林和舒马赫的一些信中也暗示他"倾向于"空间是非欧几里得的.他在1830年4月9日致贝塞尔的信中写道:"我们必须非常谦恭地承认,尽管数只是我们心智的产物,然而空间则具有超越心智的实在性,我们不能完全指定它的法则."[99]这是多么

深刻的思想,简直与爱因斯坦遥相呼应!爱因斯坦本人于 1950 年明确指出,"高斯对于现代物理理论的发展,尤其是对于相对论数学基础的重要性实际上是无与伦比的."[100]

法学家施韦卡尔特在 1807 年出过关于平行理论的书,书中反对在平行线解释中引进无穷远,并要求从正方形存在性出发构造几何学.他于 1812 至 1816 年间不用第 5 公设发展了一种几何,他称之为"星形几何".1819 年他请格林向高斯转交他关于"星形几何"的纲要.高斯回信说纲要中所写几乎都像出自他的笔端.施韦卡尔特的侄子陶里努斯也是法学家,但同样醉心于平行线理论,1824 年 10 月他寄给高斯一篇尝试证明的文章.11 月 8 日高斯回了一封长信[101],阐述了他关于平行公设的观点,但嘱咐收信者不得公开使用这封私人信件,不得有任何可能导致此信公开的做法.高斯在信中写道:

"假定(三角形的)三内角之和小于 180° 导致一种与我们的几何很不相同的特殊几何,它是绝对和谐的.我已相当满意地开发了这种几何,可以解决其中所有问题,只有一个常数的确定除外,它是不能先验地找出来的.假定这一常数越大,这种几何就越接近欧几里得几何,在它取无穷值时,两种几何就是一致的.如果非欧几里得几何是真实的几何,而这一常数与我们在地球或天空中的测量有某种关系,那么它就可以后验地找出."

陶里努斯在 1825 年出版了《平行线理论》一书,书中无条件地相信平行公理,但也开发了拒绝平行公理所产生的一些结果,其中包括非欧几何独有的那个常数.次年他还出版了《初等几何学》,其中开发了非欧三角学公式(高斯于 1816 年已建立非欧三角学).两本书都寄赠给了高斯,但高斯并未致谢.或许是因为两书序言中都提到了高斯,使他感到不快.

高斯的信件表明他在 1827 年后几个月又开始对几何基础 —— 他称之为"空间的形而上学学说"—— 进行某些深入细致的研究.狄利克雷这年访问高斯时曾同他讨论非欧几何.在这年写的一个笔记中,高斯称曳物线绕轴所生成的负常曲率曲面为"类球面"(现在称为伪球面),并有下述结果:在类球面上可以通过旋转移动测地三角形.次年高斯写过,他在 40 年前已经首次研究这些基础理论,但可能活不到成功地发表完整的结果,主要原因是担心要是他完整地说出如此革命性的内容,"那些蠢材就会穷嚷嚷."在 1828 年 11 月写的一篇短小笔记中,高斯不用第 5 公设证明三角形内角之和不可能大于两直角.1831 年 4 月他开始写下他的某些研究,这些笔记后来发表于他的《全集》第八卷中.这年 7 月 21 日他写给舒马赫的信中还提到在非欧几何中没有相似性所引起的结果.

W·波尔约的儿子 J·波尔约于 1818 年入维也纳军事工程科学院,1820 年他写信给父亲说想证明平行公设.老波尔约十分惊恐,以激动的言辞恳求儿子放弃:"不要在这上面浪费一小时.它带不来任何回报,它会危害你整个生命."但儿子不为所动,继续研究.1823 年 11 月 3 日他写信给父亲说他"已从虚无中创造了一个全新的、不同的世界".1825 年 2 月他向父亲交了一份概要.1831 年 6 月,父亲同意把儿子的论文作为附录发表于他写的《数学原理》中.高斯于次年 2 月看到了该书,3 月 6 日他写信给 W·波尔约说:"如果我一开头就说我不敢赞扬这样一本论著,您当然会吓一跳;但我只能这样做:赞扬这一论著等于赞扬我自己.因为这一论著的整个内容,令郎所采取的途径,以及他所做出的结论,几乎同我本人的思索 —— 大约 30 至 35 年前它已萦绕在我脑际 —— 完全一致."[102] 他

在信中还提到自己研究的一个例子,即非欧几何中三角形面积正比于其内角和与180°之差这一定理的简单证明,他还敦促J·波尔约研究空间中的相应问题.高斯认为年轻的J·波尔约是"头等天才".

差不多与此同时,俄国的罗巴切夫斯基于1826年2月2日向喀山科学学会提交了一项研究,肯定存在一种不需要平行公设的无矛盾的几何学.他的工作非常深远,可以解析地处理问题,并给出计算弧长、曲面面积和体积等的一般规则.这项研究3年后才在《喀山通讯》上发表,1835至1838年他又发表了一些后续论文.1840年高斯读到罗巴切夫斯基的论著.在1844年2月8日致格林的信中,他称赞罗巴切夫斯基的《几何学研究》.在1846年11月28日致舒马赫的信[103]中除赞扬外还说罗巴切夫斯基的途径与他本人的途径不同,但很巧妙,具有真正的几何精神,他读时觉得"赏心悦目,十分愉快".信中还说:"你知道我持有同样信念已有54年(从1792年起)之久,这种信念还伴之以后来的某种扩展,对此我不想在这里提及."这种"扩展"是什么,是不是类似于他的学生黎曼后来所做的工作,现在已无法揣摩.放在高斯家里的《几何学研究》这本书中还夹着一张纸,上面写有推导非欧三角公式的概要,这些公式相当于半径为$1/k$的球面的球面三角方程.对k赋以纯虚值,就能导出非欧三角方程.1842年11月23日,高斯向格廷根皇家学会提名罗巴切夫斯基为通讯会员,后者立即当选.

综上所述,不难做出下列结论:首先,高斯是真正预见并具有相当完整的非欧几何思想的第一人;第二,高斯具有创造非欧几何的智慧和非凡的勇气,但却没有面对凡人反对的胆略,否则他无疑会成为非欧几何的最早发表者;最后,高斯对非欧几何的创造者J·波尔约和罗巴切夫斯基没有什么影响,但他十分赞赏两人的工作.

19 物理研究

大约从1825年起,高斯开始考虑开辟新方向.他的薪金在1824年得到可观的增加,1825年还从大地测量工作中获得一笔额外收入,使得他的经济压力大大减轻.驱使他从事大地测量的其他动机逐渐淡化,而身体健康的负面因素却日渐增长.他毫不松懈地工作,弦一直绷得很紧,到19世纪20年代,出现过度疲劳的迹象.1821年的信件中他就说自己感到很累,一度想迁居柏林,使生活闲暇一些.1825年冬季大部分时间里他都病着,出现现在应诊断为心脏病和哮喘病的症候.

高斯当然首先想到专心致志回到数学,但发现他已难于得到令人满意的结果.1826年2月19日他在写给奥尔伯斯的信[104]中抱怨自己"从未干得这么艰苦而成果却如此之少",使他觉得应当进入另一个方向.毫无疑问,烦恼困惑、工作过度和灰心丧气使他低估了自己那些年间在数学上的巨大成就,但他的确需要新的鼓舞.转向物理研究无疑是正确的选择.

前面提到过,1828年,洪堡说服高斯参加了在柏林举行的一次科学会议,他想让高斯卷入他本人已经持续了二十多年的筹建世界范围的地磁观测站的努力之中.高斯在洪堡的别墅里呆了3周,主人的科学设备促使高斯做出抉择.正如高斯后来写给洪堡的信中

所说，他对磁学已有将近30年的兴趣.他在这一学科上未能及时开展研究的部分原因是缺乏测量手段.在柏林期间还发生了一件对他的物理研究具有重大意义的事：邂逅韦伯，一位卓越的年轻实验物理学家，高斯日后物理研究的亲密合作者.

1829年，高斯开始研究物理学特别是力学、毛细作用、声学和晶体学中的问题，第一项成果是发表于《克雷尔杂志》上的《关于力学的一条新的一般基本定律》[105]，其中陈述了最小约束原理，把它作为等价于达朗贝尔原理的新表述.其基本思想是：系统的运动偏离无约束运动尽可能小，这里偏离由质量乘以它与无约束运动路径的距离平方之积的和来度量[106].这是分析力学中的普遍微分变分原理之一，对一阶线性或非线性约束系统都适用.它不仅具有普遍性，而且有很大实用价值.例如，现在在机器人设计和分析中常用的一种方法就是从高斯原理出发，在电子计算机中直接建立约束函数变分问题，用优化算法和动态规划求解机器人的运动和约束反力.容易看出，这项工作同他关于最小二乘法的研究有关，但他本人在1829年1月31日写给奥尔伯斯的信中说它受到研究毛细作用和其他物理问题的启示.1832年他发表《平衡状态下流体形态理论的一般原理》[107]，这是他对毛细作用研究的一个贡献，同时也是关于变分法的一篇重要论文，文中首次解决了涉及二重积分、边界条件和变动积分限的变分问题.

高斯在1831年还突然对晶体学发生很大兴趣，他用一台12英寸的经纬仪测量晶体，对一些困难的形状进行计算和描绘.1831年6月30日他写信给格林说："近来我忙于研究晶体学，以前我对它相当陌生.我觉得 …… 眼下所用的测角仪似乎不怎么样，我想出了一种非常简单的仪器并且做了一台，可以用它把晶体紧固在经纬仪的望远镜上，从而可以十分精确地让它保持正确的位置，我很好奇用它做实验会发现什么.我希望这样不用重复就能容易地尽可能精确地测定两曲面之间的角，从而审视一系列晶体."[108] 高斯对晶体系数之比为有理数或无理数很有兴趣，他所用的晶体学符号体系基本上就是晶体学家米勒后来于1838年发明的体系，不过后者更简练.奇怪的是，在一段短时间后，他把有关的文献、观测、计算和图表扔到一旁，再也不去动它们.他也没有对自己的晶体研究发表任何东西.

1830年11月30日，由于梅耶去世，格廷根大学物理学教席空缺.汉诺威内阁主管大学事务的大臣立即征求高斯对填补这一缺额的意见.高斯于1831年2月27日答复道，格廷根大学坚持这样的观点：它不只是一个培育学生、储备科学知识的学校，也应当是发展作为人类共同财富的科学的中心.沿着这条道路，格廷根才能保持它的档次，跻身世界重要学府的行列.他接着说，新来的物理学家必须教给学生各种背景知识和预备知识，必须以很好的实验来说明他讲授的内容，必须精通物理学各个分支，必须有很好的数学训练.他强调一个完全意义上的物理学家应当有很好的数学高等领域的基础.高斯接着举出5位他认为满足上述要求的候选人，细致比较了他们的基础、训练、经验和能力，并且特别注意到他们的年龄差别.他说，如果学校当局特别考虑富有天才和未来能有丰硕创造成果的研究者，那么他选韦伯.[109]4月29日，韦伯获得聘任.9月15日，在高斯妻子去世两天后，韦伯来到格廷根，那时他才27岁，而高斯已54岁，但两人很快结成忘年之交.尽管韦伯显示了高度的理论修养和创造性，但在合作中他分担实验工作.

1832 年初，高斯全力投入磁学研究. 2 月前他成功地把地磁强度归结为绝对单位. 这时他产生了写一本关于磁学的大书的想法，但决定先分开发表讨论地磁强度的一小部分，这就是 12 月 15 日在格廷根王家学会宣读并于次年发表的《地磁力强度归结为绝对度量单位》(拉丁文本发表于 1841 年)[110]. 此文把所有磁学量归结为质量、长度和时间这 3 个基本单位. 高斯首次认识到，为合理度量磁学量，有必要这样做. 为纪念高斯，许多年中磁场强度的单位(每单位磁极 1 达因) 称为高斯，直到 1932 年的一次国际会议上此单位才被改称为厄斯特. 现在 CGS 电磁系单位制中的磁感应强度的单位称为高斯. 文中还注意到温度对磁力的影响. 关于地球的磁力，文中简短讨论了磁偏角的变化并给出了数学表述. 虽然此文由高斯单独署名，但他在文中感谢韦伯的帮助.

受到法拉第 1831 年发现感应电流的启迪，高斯和韦伯一起研究电流现象. 高斯于 1832 年以更一般的形式表述了库仑定律，并且表述了前面提到过的散度定理. 高斯和韦伯于 1833 年得到基尔霍夫定律(基尔霍夫是在 1845 年发现关于支路电流的定律的)，并且先于他人做出了静力学、热学和摩擦电等方面的各种发现，例如基尔霍夫后来于 1848 年建立的最小热量原理，证明摩擦产生的电与电原电池和温差电流力产生的电相等. 或许因为当时他们的兴趣集中于地磁学，因而这些发现并未发表. 可是这一年他们却有一项重大发明 —— 在人类历史上建立第一个可操作的电报装置.

他们有过磁强计也可用做电流计的想法，这促使他们想到也许可以利用电流发送信号. 高斯在 1833 年 11 月 20 日致奥尔伯斯的信[111] 中首次描述了他们的装置:

> "我记得以前从未向你提起过我们发明的神奇的机械，它由流经电线的伽伐尼电路组成. 这条电线伸展在空中，最高处在圣约翰教堂尖塔，越过房屋建筑向下连接天文台和物理实验室，这是在韦伯指导下完成的. 电线全长约 8 000 英尺(2 400 米 —— 引用者)，两端连着倍加器，我这端有 170 线圈，韦伯那端有 70 线圈，绕在一个按我发明的方法悬挂着的一磅重磁铁上. 用一个简单的装置 —— 我称它为交换器 —— 我能把电流即时反送回去. 仔细操作我这儿的伏打电池组，我能使韦伯实验室里的指针激烈运动以至敲打一个铃，发出隔壁房间里都能听到的声音. 它现在只用来逗乐. 我们的目标是以最高的精确度显现指针的运动. 我们已把这一装置用于电报实验，并已成功地传送整个词组和短语. 这个方法有不依赖白天黑夜或气候条件的优点；接收者可以待在房间里，只要他愿意，还可以拉下百叶窗. 我觉得用足够牢固的电线，可以确信，只要轻轻一击，就能把电报信号从格廷根发送到汉诺威或从汉诺威发送到不来梅."

关于这个电报装置的首次公开报导发表于 1834 年 8 月 9 日的《格廷根科学通报》[112] 上，其中详细介绍了格廷根大学物理实验室与天文台之间的这一"伟大的伽伐尼电路"，强调这个"独特装置" 应归功于韦伯. 据说在他们发明的电报上传送的第一个句子是 "Michelman kommt"("米希尔曼(在两人之间跑腿的仆人 —— 引用者) 来了").

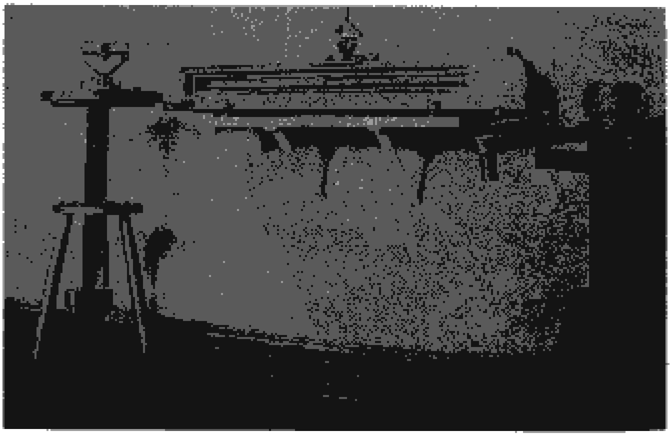
1835 年 2 月 15 日，高斯在格廷根王家学会所作的讲演中，对电报装置的改进提供了

特稿

更详细的说明,特别提到可以用他的新设备产生感应电流.在1835年8月6日致舒马赫的信[113]中,高斯对电报的未来非常乐观.他写道:

> “在比我的条件更加有利的条件下,无疑能做出这个方法的重要应用,使社会获益,使大众惊讶激动.对于一年只有150塔勒预算的天文台和磁学实验室(我告诉你这一点,务请严守秘密),不可能做大的实验.要是在这上面花上几千美元,我相信电磁电报能完善一个国家,其程度会非常惊人.如果两头用足够强固的铜电线连接起来并装置强有力的电池,再配备训练有素的工作人员,俄罗斯帝国就能从圣彼得堡在一分钟内把命令发至敖德萨而不要任何中间站.”

高斯和韦伯的电报曾在德国引起很大注意.可惜因为费用巨大,普遍应用的计划搁置了起来,使德国失去了首先使用实用电报的荣誉.韦伯指导下架设的电报电线也于1845年12月16日毁于雷击,他们的发明也几乎被人遗忘.要是这两位生活在一个大城市(当时格廷根居民不足万人,直到1854年才通铁路),也许这项伟大发明的命运会完全不同.不管怎样,高斯和韦伯是首先把电流用于通信的科学家.在1873年维也纳和1893年芝加哥博览会上,他们的电报装置也得到适当的展示.



高斯与韦伯的电报装置(1833年复活节)

在地磁研究方面,高斯有一个广泛的计划,想把磁偏角、磁倾角、磁偏差等所有磁元都测量到与水平强度相同的精确度.他还想研究温度对这些因素的影响.1833年元月29日,他向格廷根大学董事会提交正式备忘录,建议建立地磁观测站.建议很快得到批准,这年秋天观测站即投入使用.观测站正建筑呈长方形,正确地位于地理子午线上,面向东,长约10米,宽约4.5米,门窗都为双重,通常建筑中用的铁都代之以铜.站里装备有经纬仪、天文钟、地磁仪.每天上午8时、下午1时进行记录,以确定不同年、月、日的磁偏角及其变化.有些日子还每隔5至20分钟进行连续观测和记录.格廷根的磁学研究引起广泛关注,德国各地和外国科学家纷纷来访,格廷根成为全球磁学研究中心.1837年德国建立了磁学会.从1837年至1841年,高斯和韦伯

主编出版了每年一卷的《联合磁学观测结果》，共6卷.这6卷中发表了高斯写的15篇文章，韦伯写的23篇文章.两人的文章占全部篇幅的2/3.在他们的影响下，世界各地建立了不少仿效格廷根的磁学观测站.

1837年，高斯与韦伯合作发明了双线地磁仪，同年他们在《联合磁学观测结果》上发表文章，报导此项新设备的发明，并阐明其用途.他们的主要想法是用两条线挂起一个物体，当受到一定指向的力时，它从平衡位置发生偏转，由此即可测定磁力的大小.



格廷根大学中展示的
高斯与韦伯的素描头像

1838年冬天，高斯终于实施写作磁学论著的计划.在1839年的《联合磁学观测结果》第3卷中，登载了高斯的《地磁学通论》[114].高斯在这一论著中利用球面调和函数得出了地磁场的数学表达式，从而奠定了地磁学的数学物理基础[115].高斯把他的理论应用到实际观测中，结果表明计算与观测之间相当一致.1841年美国人威尔克斯发现南磁极与高斯所计算的点相差很小.后来还发现北磁极与高斯计算的位置只差3°30′.这都使高斯大喜过望.

高斯分析的结果显示，地面磁场的绝大部分来源于地球内部，外源磁场只占千分之几.因此，除了给出地磁场的严格数学表述外，高斯的工作还从理论上证明了地磁场主要来源于地球内部这个多年来的假说.

在结束地磁学一般理论时，高斯计算了磁轴的方向即地球磁矩的指向及大小.他发现地球的磁化很弱.他的计算误差只有2%.高斯在结尾部分还宣布了一条重要定理：对于一个空间体，其内部的任何磁流分布，都可以用其表面上的磁流分布来代替，使得对于体外任何一点，其效果都相同.

1840年，在戈尔德施密特协助下，高斯和韦伯出版了基于高斯地磁学理论的全面的地磁地图[116].

从某种意义上说，发表在1840年《联合磁学观测结果》上的《关于按反比于距离平方作用的吸引和排斥力的一般命题》[117]，标志着高斯磁学研究的结束.此文是受到他磁学工作的启发而写的，文中首次把某类函数称做“位势”.其实1839年10月他已在一篇笔记中用过这个名词，但这篇笔记直到高斯去世后才发表.英国数学家、物理学家格林在1828年已使用位势一词，但他的论文即使在英国也几乎不为人知，更不用说高斯了.现在已经知道，丹尼尔·伯努利早在约一个世纪前就已用过此词，不过高斯和格林肯定都不知道.

此文的基本定理在高斯1813年关于均匀椭球体吸引力的论文中已经建立，很可能1810年时他已得到这一定理.文中还建立了位势论的另外一些重要定理，例如下述命题：对于一曲面，在其上有且只有给定质量的一种分布，使得此质量在该曲面上各点处的位势取预先给定的值.

历史的作弄使高斯的大名以另一方式与磁学相联系.在第二次世界大战中，为防止

在公海上航行的船舰被德军的磁性水雷炸毁，必须对其进行消磁(degauss).对此美国一份报纸在其社评里写道："高斯，这位热爱和平的德国数学家、物理学家，德国科学和哲学想象力为世界提供的最伟大的献礼之一，会发现他的姓氏永久地同一种古怪残酷的威胁联结在一起，它使一个世纪后商船和军舰得用特殊的装置来摆脱，这真是一个讽刺.正是由于高斯在磁学中的基本研究，磁力单位才以他的姓命名；现在，因为他的国人把西方科学知识的这一伟大发现用于野蛮的毁灭事业，船只必须消去高斯(degauss，英文前缀 de 有'取消'之意 —— 引用者)!"[118]

高斯一直对电磁感应很有兴趣.1834 年他制作了一个感应线圈，并认识到线圈中振动的磁性的衰减是感应电流导致的结果.1835 年，他表述了诺伊曼后来于 1845 年给出的感应定律的数学表示式，陈述了电动力学中的高斯定律.应当说这是他在这方面工作的顶峰.高斯后来还想推广库仑定律，可惜正如麦克斯韦所指出的，高斯表述的定律对感应现象失效.高斯一直想寻求适用于所有电磁现象的令人满意的理论，从他 1845 年写给韦伯的信可以看出，后来高斯接近于法拉第的场作用观点.但他坦率承认未能解决这个问题，因此一直没有发表任何东西.

高斯在物理学领域同时也是他科学研究的最后一项重大成就是1840年12月10日向格廷根王家学会提交，发表于 1843 年的《屈光学研究》[119].这篇论文建立了光线满足近轴条件时理想光学关系的系统理论，以至现在仍称这个光学分支为高斯光学，是研究各种实际光学系统的基础.高斯说过，1800 年时他已拥有这些理论，因认为过于初等而未发表，但在高斯手稿中没有发现这方面的佐证.不过应当指出，天文学研究促使高斯很早就关注屈光学问题，它是由当时望远镜不完善引起的，主要问题是消色差计算和设计无球面偏差的望远镜.1807 年时汉堡著名光学工厂主雷普瑟尔德就向高斯提出制造无色差双物镜问题，后者于 1809 年提供了一些建议.1810 年 10 月高斯对更厚的透镜进行了计算.1817 年他还发表过论文《关于消色差尤其涉及完全消除色散的双物镜》[120]，文中得出结论：可以计算出一个物镜，能把所有在距轴一特定距离(或无穷远)处相汇的两种确定颜色的光线合并于同一点.43 年后，慕尼黑一家工厂成功地制成了高斯物镜.他 1814 至 1817 年写的一些笔记也与光学研究有密切关系.高斯还于 1829 年 11 月向格廷根王家学会提出涉及星体测光方位的悬奖问题，此问题直到 1920 年才获解决.

20　教学工作

高斯常被人指责不爱教书，这点需要分情况加以分析.他的确不喜欢教初等课程，当发现他的绝大多数学生对高等课程准备很差时他也不喜欢教高等课程.1802 年 10 月 26 日，他写信给奥尔伯斯说：

"我真是讨厌讲课.数学教授的常年工作只是教这门学科的 ABC;没有什么学生能前进一步，通常他们只能不断收集些信息，变成半吊子，一知半解.比较少有的天才并不需要通过课程讲授来教育，而是自我培训.在我杰出的朋友普法夫家里，我看到他在公共和私人授课、准备这些课程以及与教授职务相关联的其他工作之余，只剩下一些支离破碎的时间从

事自己的研究.经验似乎也证明了这一点.我不知道除了伟大的梅耶之外,有什么教授真在科学上做了许多工作,可是梅耶被列为差的教授.与之相似,正如我们的朋友察赫常说的那样,在天文学中做得最好的不是拿薪水的大学教师,而是所谓的医生、法学家等等."[121]



高斯的学生利斯廷于1832年画的高斯素描像

1808至1809学年上学期,高斯在格廷根大学首次开课.1808年12月4日他在致贝塞尔的信[122]中说:"这个冬季我首次开的课属于特别分散精力的活,它占用了比我所喜欢的多得多的时间.同时我希望第二次时耗费的时间将少得多,否则我会再也不能适应."1810年元月7日的另一封信[123]中说:"这个冬季我正在教3个学生两门课,其中一位只有中等程度,另一位谈不上中等程度,第三位程度和能力都差.这是数学职业的麻烦."1811年冬高斯曾教一个学生一门课,他称该生为"最迟钝的".他在1808年10月2日致舒马赫的信[124]中又一次怀疑讲课对有才能学生的作用:"在我看来,对于并不是需要搜罗大量知识而主要有志于训练自己能力的人,讲授是非常无的放矢的.对于这样的人,不需要手把手地领着他到达目的地,而只须不时提供建议,以便让他循最短途径自己到达目的地."

特稿

有一则故事说高斯一次瞧见一名学生在格廷根大街上踉踉跄跄走着.看见教授走近,他想挺起身来,可是力不从心,出尽洋相.高斯凝视着他,用手指着他说:"年轻的朋友,我希望科学也能像格廷根好啤酒那样使你沉醉!"

虽然高斯不喜欢讲课,但他很愿意向任何登门求教的积极上进、富有钻研兴趣的人提供建议.从他与舒马赫的通信中,人们能发现许许多多高斯不厌其烦反复释疑的例子.高斯希望他的学生能独立思考和工作,认为学生本人的努力而不是他们的教授的讲解才是教学的中心.这种观点今天能得到普遍理解,但却与当时直至19世纪末流行的教育模式大相径庭.许多批评高斯教学态度的人其实是用那种标准来看待大学教育的.

高斯在格廷根大学讲课并不少.从1808~1809学年上学期到1851~1852学年下学期,除1821~1822,1822~1823,1823~1824,1824~1825,1825~1826五学年上学期因进行大地测量没有讲课,1824~1825学年下学期没有记录外,高斯共宣布开设课程170门次,其中有9个学期为1门,58个学期为2门,15个学期为3门,平均算来每学期超过2门.在高斯讲授的课程中,天文学共123门次,占总数的72%.天文学课程中,实践天文学有67门次,超过天文学总门次的一半.以下依次为:彗星运动15门次,一般天文学(包括理论天文学)12门次,天文学初阶11门次,天体运动6门次,日食月食计算6门次,行星摄动计算4门次,天文学计算论题2门次.高斯开设数学课程29门次,其中最小二乘法18门次,概率论应用8门次,数论1门次,曲面论1门次,数值方程1门次.高斯开设大地测量方面的课程12门次;物理学方面的课程6门次,其中地磁学5门次,流体力学1门次.

从这张简略清单容易看出,高斯讲授的绝大多数都是初等课程.高斯最希望讲授他正在从事的研究,可是他在数学中最得意并且出版了系统论著的数论和曲面理论,都只

讲过一次.数论是在1809～1810学年下学期刚到格廷根大学时讲授的,曲面论是在1827～1828学年上学期他的大作《弯曲曲面之一般探讨》出版时讲授的.阳春白雪,曲高和寡,令人扼腕!这样看来,高斯对教学有厌烦情绪,并不难于理解.

高斯的课讲得怎样?不妨听听亲历者的回忆.后来成为著名数学史专家的M.康托尔1849年到格廷根大学就读,半个世纪之后,1899年11月14日,他在讲课中这样谈到高斯:

"1850～1851学年下学期,高斯讲授了所定的关于最小二乘法的课程,我听了这门课……在我看来讲课地方像一间办公室.我们这些听课者围着一张大书桌坐着,桌上摆满了书.高斯坐在书桌边的一把扶手椅中,边上有一黑板架,上面放着一块中等大小的黑板,高斯就用粉笔在这块黑板上演算……由于每个听课者可供利用的空间太小,所以没法用墨水,但是高斯甚至不喜欢我们用铅笔记笔记.每当我们想记笔记,他就说:'这里不许记笔记,更好地专心听讲!'容易理解,即使心无旁骛,全神贯注,记忆力特强,也不可能在课后完成精确的笔记.人们课后只能把一些特别精巧的、分散的推导补写下来.更有甚者,刻在记忆里的这类讲话和插入的评论往往与科学无关,而是凸现了讲话者的个性……还有一次,桌上摆满了对数表,高斯按照纸张的颜色、数的组成形式、它们的大小是否相同、是否突出在一行上下等来解释它们之间的差别.他说到表中数的位数及其计算,然后非常严肃地说:'你们根本不知道对数表计算中有多少诗意.'"[125]

听这门课的共有9个学生,其中有后来大名鼎鼎的戴德金.他回忆道:

> "高斯头戴黑帽,身穿咖啡色上衣,黑裤子,通常舒坦地坐着,目光向下,身子略向前倾,双手放在腿上.他说话没有什么拘束,非常清楚,简单明了;但当他想强调一个新观点时,他就会用特别能刻画的词,并且会突然抬起头,转向邻近的某个人,用他那美丽的、深邃的蓝眼睛看着这个人.这是令人难以忘怀的……如果他要对数学公式解释某些原理,他就会站起来,以平静挺直的体态在旁边的黑板上用他那特别优美的书法写些东西,而且总能成功地在挺小的地方有目的地、经济地安排妥帖,写下要写的内容……
>
> "1851年元月24日,高斯讲完课程的第一部分,使我们掌握了最小二乘法的本质.接着他特别清楚地开发了概率论的基本概念和主要定理,并用原始例子加以解释,作为建立这种方法的第二种或第三种方式的引导……我们似乎感到,高斯本人虽然早先对讲这门课表现出很小兴趣,但在教学过程中也感受到某种乐趣.就这样到了3月13日最后一堂课,高斯站了起来,我们都跟着站起来,他以友好的词句告别:'我得感谢诸位毫不缺席地、专注地来听我这门或许应当称为相当枯燥的课.'从那时起已经过去了半个世纪,然而我始终忘不了这门据说是枯燥的课,这是我所听过的最好的课程之一."[126]

21　政治风波

1837年,格廷根大学隆重庆祝建校100周年.为此新建了一座古希腊风格的大楼,内有

大礼堂,周围陈列着大学历史上重要人物的油画像.大楼前面竖立着汉诺威国王威廉四世的塑像.盛大庆典从9月12日开始,持续到20日.9月17日,镇上所有教堂钟声齐鸣,国王也出席庆典.18日开始学术庆祝,很多著名学者与会,最重要的当然是洪堡,他作客高斯家中.在下午的王家科学学会公开会议上,应洪堡特邀,高斯就其发明的双线地磁仪发表演讲.9月19日,在骑术学院举行有两千多人参加的盛大舞会.高斯不喜欢官方庆典活动.他在9月26日写信[27]给奥尔伯斯说:"在我们的百年庆典高峰过后,我必须给你一个信息:我还活着.事实上,我本来也很少会碰到与格申同样的命运,他于前天去世,很可能是庆典的牺牲品…… 我先前身体不太好,因此决定不参加教堂和大楼里的活动,去那里得穿乏味的让人透不过气的官服 —— 修道士穿的大氅 …… 即使在图书馆里举行的集会,一百人挤在一间房子里 …… 我几乎晕了过去 …… 终了回家时我都被汗水湿透了,不得不赶快换衣服 …… 我相信我之所以逃脱格申的命运,只是由于我次日待在家中,不参加所有活动 ……"

庆典的荣耀和欢乐很快消失,一场巨大的政治灾难袭来.1833年9月28日,在一次政治起义中,威廉四世签署了一项宪法修正令,使人民的一些权利得到保障.1837年6月威廉四世去世,由英格兰国王乔治三世之五子奥古斯特继位.11月1日,新王颁布第一项法令,撤销前国王的自由法令,恢复1819年宪法.一般认为,新王所以这样做是由于1833年新宪法规定身心有病的王位继承人不得承袭王位,而新王的独子双目失明,只有废除新宪法才能使其子合法继位.格廷根大学历史学和政治学教授达赫尔曼在大学理事会中建议学校采取步骤,提请新王注意他的计划的危险性.由于恰逢百年校庆前夕,所以无甚反响.新王很快颁布法令,按1819年宪法进行新的选举.他同时解散内阁,随即又任命原内阁成员为各部部长,其目的是解除臣民忠于1833年宪法的誓言.大部分国民强烈反对新王的举措,但抗议毫无效果,反而使这位意志坚定而又脾气暴躁的老头更加飞扬跋扈,他宣称如果人民拒绝接受他提供的宪法,那就让他们根本没有宪法.

这时格廷根大学的7位教授向新王呈上抗议信,宣布他们仍受忠于1833年宪法的誓言的约束."格廷根七君子"名单如下:达赫尔曼,埃瓦尔德,韦伯,格林兄弟(德意志民间文学研究者,著名的《格林童话》即《儿童与家庭童话集》等的作者),法学教授阿尔布雷希特和历史学、文学教授格菲努斯.这七人中达赫尔曼和埃瓦尔德是带头人,而埃瓦尔德是高斯的东床快婿,他与高斯的女儿明娜于1830年9月结为伉俪.信件很快广为传播,新王十分愤怒.内阁试图使七君子收回抗议信未果.学校校长和理事会觐见国王,接着校长发表声明称七人信件为"令人不愉快的事件".政府广泛散发此声明,制造全校反对七君子的印象.于是有6位著名教授发表声明,表明他们不会批评他们的7位同事的行动.

1837年12月12日,七君子被解除教授职务.达赫尔曼、J.格林和格菲努斯被勒令3天内离开汉诺威王国,其余4人只要"循规蹈矩",保持沉默,可以留在格廷根.同时军队调动到格廷根,以防止学生举行示威.但被流放的3人走时,仍有很多大学生先行抵达达岑豪森迎接,并在那里举行了同情七君子的示威.

这件事影响深远.整个德意志激起了对"格廷根七君子"的巨大同情,为被流放的3人募集捐款,柯尼斯堡大学还授予阿尔布雷希特名誉学位,此后德国大学教授被更多地推入公众和政治生活的中心.

高斯没有在6位著名教授的声援信上签名，自然会受到指责．达赫尔曼曾认定高斯会签上大名，结果很失望．高斯的朋友们相信，他会以温和抗议者的姿态离开格廷根，因为当时流传高斯要去巴黎的说法，他在写给奥尔伯斯的信中也说过巴黎是他会去的最后一个场所．高斯为何不签名？对此他本人没有作过说明，不过原因似乎不难寻求．当时高斯已届六十高龄，在格廷根呆了很长时间，其母年已九十五，双目失明，根本离不开他．这种情形下要去巴黎，几无可能．

深层次的缘由，当然应从高斯的政治态度和哲学观点上来探索．他的恩人费迪南德公爵惨死后，高斯的政治哲学观点定型．对他而言，拿破仑是革命危险的化身，不伦瑞克公爵则是开明君主制的典型，他喜欢有才智的、仁慈的独裁者专断统治．高斯终生是坚定的民族主义者和保王党人，保守倾向十分明显．民族主义甚至驱使他从不用法文发表任何东西，在同不认识的法国人交谈时假装听不懂，其实他懂法语．他讨厌任何政治激进活动，不赞成"七君子"的抗议行为．高斯深知自己作为一个科学家的影响，但对在政治上发挥作用毫无兴趣——"政治歌曲，令人讨厌！"[128]

还有一点值得提出，就是高斯认为他的同事的作为会对学校有损．在这一点上高斯似乎是对的，这一事件对格廷根大学打击不小．"七君子事件"对高斯也有很大打击，埃瓦尔德和韦伯名列其中对他损害尤为沉重．两人在事件后去了伦敦，埃瓦尔德在英格兰呆了半年，主要研究梵文和用阿拉伯文写的犹太著作．1838年5月他出任图宾根大学东方学教授，这就使高斯不得不同爱女明娜分开．明娜患有肺病，于两年后去世．1847年汉诺威国王恢复了1833年宪法，埃瓦尔德于次年重返格廷根执教．

韦伯于1838年8月回格廷根．在他离开格廷根这段时间，高斯为韦伯复职多方努力，还曾特别请求洪堡帮忙．洪堡确实也帮了忙，但上面要韦伯承认错误，以此来换取复职．这一点连高斯都反对，他说在同样的境遇下他也不会公开认错．国王根本不把学者尊严当回事，他曾在一次宴会上对洪堡说："以我拥有的财富而言，我想要多少，就能有多少芭蕾舞演员、妓女和教授．"最后韦伯的职务由高斯的学生利斯廷接替．直到1849年，韦伯才返回格廷根大学．

高斯的生活在19世纪30年代经历了许多痛苦．他与儿子欧根关系不好．欧根在高斯孩子中最有才华，特别在数学和语文方面，其父对他曾寄予厚望．但后来父亲不想让孩子搞数学，可能是他觉得他们都超不过他．欧根中学毕业后想学哲学，可是高斯要他学法律，于是孩子就读于格廷根大学法学院．欧根在大学里贪图享乐，尤其好赌．一次他设豪宴款待同学，把账单交给父亲，遭到痛斥．欧根突然决定离德去美，不告而别，1830年底到达纽约，其时年纪20岁还差一点．此后父子天各一方，未再见面，此事成为高斯多年隐痛．1831年9月，第二任妻子去世，死时年仅43岁．高斯的次子威廉也于1837年去美国，但不像欧根，他在美国一直过得不愉快．接着又有前面提到的女婿埃瓦尔德被迫离开格廷根和女儿病逝．这些都使高斯陷人深深的沮丧之中．1839年高斯身体不好，常患黏膜炎，又经常头痛失眠．他的母亲于这年以97岁高龄谢世，高斯对其母去世悲痛欲绝．那时他越来越从宗教中寻求慰藉．高斯在宗教方面具有很大的包容性，对于人们因世间苦难寻找精神寄托和在不幸日子里寻求精神避难所而产生的信仰，他总是强调对此加以滋扰是

非正义的．他似乎相信存在灵魂世界，因为他说过："即使没有严格的科学基础，仍有那么多证据表明在这个物质世界之外，存在另一个纯粹是精神的世界，它也具有像我们生活的世界那样的多样性——我们会到那个世界去．"[129] 作为一个科学家，他当然会对信仰问题产生迷惘和困惑．他在晚年对与他有过多次谈话的瓦格纳说过："我必须说，早先当我看到下层人民、简单体力劳动者能全心全意地信仰，我常常会妒忌他们．" 他还对瓦格纳说："你说信仰是一宗天赋的礼物，或许这是我们对此能说的最正确的话．"[130]


延森画的高斯像

1840 年夏，丹麦画家延森受沙皇之命来格廷根为高斯画像，他一共画了 3 张油画像，其中之一归于萨托里乌斯，保留于格廷根．这是高斯最广为人知的一幅画像，高斯在其下方选用莎士比亚《李尔王》中的一句诗作为他的座右铭："大自然，你是我的女神，我愿在你的法律之前俯首听命．"[131]

高斯保守的政治态度在 1848 年革命中表现得更加强烈．他对革命感到不可名状的恐惧．1848 年 12 月 14 日他在写给恩克的信中说这一年 3 月 18 日到 12 月 6 日是"一段令人伤心的日子"，说他"只能以痛苦的感受想到"普鲁士国王，说国王所有措施都出于好意，可是"得到的总是如此可耻的忘恩负义的回报"．信里还提到"很高兴格廷根教职工中只有少数人崇拜这类偶像（指持激进政治观点者——引用者）"．[132]1849年5月17日他写信[133]给舒马赫说："有时我似乎觉得，不仅是圣保罗教堂，而且几乎整个德意志都成了疯人院．"

在 1848 年革命中，市政当局安排身体好的教授执行巡逻和维持秩序的任务．当时的一位古典语文学教授的儿子施奈德芬后来在 1927 年（那时他已 84 岁高龄）回忆说，那年他 6 岁，惊奇地看到父亲穿了件很像制服的黑外套，佩着大肩带，家里书架边还搁着一支长矛．一天下午父亲要同几位同事一起去"执行任务"，突然听说高斯来了，这几位教授立刻列队"持枪敬礼"．为反对革命，格廷根建立了一个称为"文学博物院" 的社团兼图书馆，其中陈列着不少具有保守倾向的书报刊物，以团聚教授和大学生，后来它改名为"文学俱乐部"，高斯参加了这个团体．

与政治态度有关的是他的哲学观点．哲学研究对高斯很有吸引力，但他是以一般自然科学家的角度来看待哲学中的一些重大问题的．他说过："有一些问题，我要把它们的解答置于比数学问题的解答高得无与伦比的价值之上，例如，关于伦理学，关于我们与上帝的关系，关于我们的命运和未来；不过这些问题的解答远在我们可以达到的范围之上，远在科学领域之外．"[134]

高斯藏书中有休谟、培根、康德、笛卡尔、洛克、沃尔弗、马勒伯朗士、弗里斯等人的著作并仔细读过．他在写给弗里斯的信中说过"我总是很喜欢做哲学沉思"．康德的《纯粹理性批判》他读过 5 遍，据说到第 5 遍时他不断说"现在我终于明白起来了"．高斯对康德构成其空间概念的方式很感兴趣，他似乎不否认空间的先验性．他否认空间只是我们外部感觉的形式，但也不坚持不依赖于我们感觉的实在空间的存在性．他曾有一次公开批评

谢林的某些著作.即使对于伟大的哲学家,例如康德,他也认为他们的概念中有一些混乱.他在1844年11月1日写给舒马赫的信[135]中说:"你认为职业哲学家在概念和定义中能没有混乱,这几乎使我大感惊讶.这类事情在非数学家的哲学家中比任何地方都更无拘束…… 环顾今日的哲学家,诸如谢林、黑格尔、冯埃森贝克等,你读到他们的定义的末尾,不会毛骨悚然吗?读读古代哲学史,看看那时的人们,如柏拉图及其他人(我把亚里士多德除外)给出定义的类型.甚至康德也常常好得不多;在我看来,他关于分析定理和综合定理的区别不是废话连篇就是错误的."他尝试把严格的数学标准用于哲学,不过他极不愿意表达自己的哲学想法.

22 晚年生活

从19世纪40年代起,高斯活动的节奏开始放慢,强度也明显减弱,发表的东西大多是老论题的变种、评论、报导或一些小问题的解.他对库麦尔1845年关于理想的重要研究与亚当斯、勒威耶和伽勒1846年发现海王星没有反应,这说明他的确同这个世界有点隔膜了.不过这并不意味着他处于消极状态.他继续进行天文观测,40年代中还对汉诺威大地测量进行最后计算.

1849年7月16日,高斯的一群朋友、敬慕者和学生齐聚格廷根,庆祝他获得博士学位50周年,其中有雅可比、狄利克雷、格林等人.他接受了新的学位证书,还有金质奖章和勋章.更使他高兴的是他被授予不伦瑞克和格廷根的荣誉市民称号.在大学大礼堂里举行了皇家科学学会会议,会上高斯发表了《关于代数方程理论》[136]的演讲,这是他提供的代数基本定理的第四个证明,其基本原理与第一个证明中提供的相同.

从他女儿次年写的信中可以看出,其实高斯本人非常反对突出庆祝这一天,但学校当局背着他准备了一切.这封信里还有这样的话:"在那荣耀的一天,那么多陌生人聚集到这里,但是他亲爱的儿子却一个也不能来,这多么令人伤心!"[137]

晚年高斯沉溺于他的爱好之一——经济事务.1845年初,学校委托高斯研究并重建格廷根大学教授遗孀基金.他投入了巨大精力,花了很多时间把它置于精算基础之上,自己计算各种表格,从濒于破产中挽救了这项基金.他还写了长文,讨论管理这类基金的基本原理(此文在他逝世后刊载于1873年出版的《全集》第四卷中).对此柯朗有过这样的评价:"格廷根大学要求高斯调查寡妇和孤儿抚恤金的管理并使改革建议得以运转.他对这一任务完成得如此彻底,以至他有关的备忘录成为现代保险精算数学的肇始."[138]他紧跟当前的财政新闻,在投资上显露巨大才干.他的一些朋友认为他可以当出色的财政大臣.他理财的成功可从他的遗产看出,他去世时财产总计约为170 000塔勒.高斯年薪才1 000塔勒左右,再加从学生那里收取的学费及各种津贴几百塔勒,年收入通常不会超过2 000塔勒.尽管他生活俭朴,但如果不是广泛投资,操作得法,获利丰厚,绝不可能攒下这么一大笔财富.在他去世后,人们才发现他投资范围极广,遍及德国、奥地利、俄罗斯、瑞典、挪威等国的股票、公债、矿业等,利息从2.5%到5%不等,到期日期最晚竟到1893年,最后一笔交易是在他逝世前3周做的!

在高斯晚年，同世界各地的朋友和亲戚通信占去他很多时间．关于高斯通信的状况，我们在下面"人际关系"这节中还要谈到．

虽然高斯逐渐对繁长的算术运算有些厌烦，但通常他仍从计算中获得乐趣．他计算时很少出错，并且有很多检验结果的灵活方法．对于表中的错误他总是极感兴趣，因为这为他提供了改正已有数值表的机会．他乐于简化冗长的演算或分析，把一个星期的工作结果压缩在一张八开纸上鉴赏．他定期与几位朋友玩惠斯特——一种类似于桥牌的游戏，每次他都要记下各人手中"爱司"的数目，为的是验证某些概率计算法则．

高斯一直遵循严格的生活起居饮食制度，从大地观测野外作业那些日子之后，应当说他的身体一直不错，没有十分严重的疾病困扰．他不相信医生，多年来自我诊断自己的失眠症、胃部不适、充血、支气管炎、呼吸短促、心率过快以及一些衰老迹象，使其不致有严重发作．不过在他第一任妻子去世后，他未能成功地遏制日渐严重困扰他的慢性疑病症和抑郁症．在他晚年科学笔记中，冒出过"死亡比这样活着更好"的字句．

1850 年后，由于心脏病的侵扰，高斯逐步限制他的活动．他于 1851 年 74 岁时作了最后一次天文观测，同年稍后首肯黎曼关于复分析的学位论文．次年他仍弄一些数学小问题，还改进了佛科摆，不过这年和下一年冬天他不断抱怨身体不好．他患有由痰和黏液引起的充血，不得不凌晨 3 时起床，喝一点矿泉水和热牛奶．1854 年 6 月他听取了黎曼的讲师就职演讲．高斯一直对铁路修筑和运营有浓厚兴趣，虽然他已有 20 多年没有离开格廷根一个晚上，但当卡塞尔到格廷根铁路修筑时，他还是离开格廷根前去进行了几天考察．其间由于拉车的马脱缰，高斯从马车中摔了出来，幸好伤得不重．1854 年 7 月 31 日火车抵达格廷根时，他兴趣盎然地参加了首驶典礼，这是高斯生命中最后的身心愉快的一天．

随着最后岁月的逼近，高斯显得有点宿命论．例如，他相信他没有接受圣彼得堡的职位因而没有成为纯粹数学家是命运使然．命运的另一戏弄是他几乎偶然地发现谷神星，使他在一个非常适宜的时刻引起世人注意，几乎不由自主地使他成为天文学家．他说其实在此之前他已发明最小二乘法，但有意保密，就在这时鬼使神差让他用上了，一下子就使他超越了别的同行．他说这些偶然事件让人感到"一只高高在上的手的作用"．



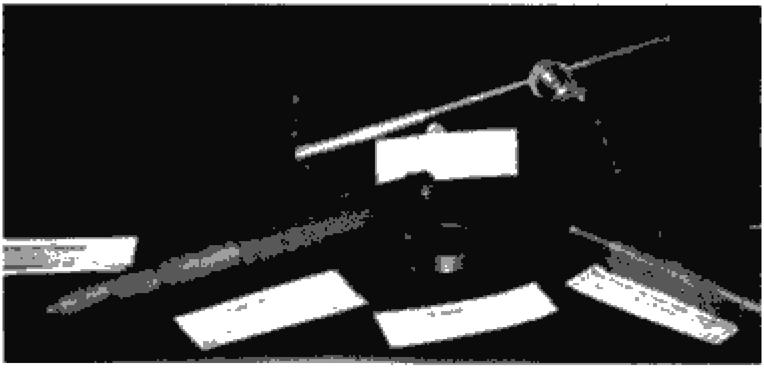
高斯 1850 年时的像



高斯 1854 年时的像



高斯在格廷根天文台(画像)



格廷根大学展示的高斯经常戴的帽子

23　业余爱好

笔者写下这个小标题时颇费踌躇,因为对于像高斯这样凡事都认真探索的科学家,只要做一件事情,这事就成了他的"业",他也许没有什么"业余".我们权且把自然科学和工程技术以外的一些东西作为他的"业余"吧.

高斯从科学研究中转移出来的少数消遣之一是在人类知识的不同领域广泛阅读.他浏览与自己研究领域毫无干系的科目,例如簿记、速记(偶尔还用于笔记之中).在古典作家中他读过其作品的不下四五十位,其中有亚里士多德、柏拉图、西塞罗、色诺芬、塔西佗、修昔底德、希罗多德、恺撒、李维、欧里庇得斯、阿那克利翁、贺拉斯、维吉尔、奥维德、卢奇安等.

高斯最喜欢的德意志作家是保尔.保尔原名里赫特,因崇拜让·雅克·卢梭而以让·保尔为笔名.他是19世纪早期德意志最畅销的幽默作家,不过其作品现在几乎已无人再读.高斯不怎么赏识歌德,不喜欢歌德的风格和思维方式,两人从未谋面,也无书信往来.高斯嫌恶席勒的哲学观点,称席勒的有些诗作亵渎上帝、道德败坏.不过他喜欢席勒的一些短诗.对于席勒的伟大剧作《华伦斯坦》三部曲,他高度评价《华伦斯坦军营》,但对另外两部非常冷淡,因为对其中的英雄人物毫无兴趣.

英文是高斯掌握得最流利的外语,他的藏书中有不少英文文学作品.他最喜欢的英国作家是司各特,熟知司各特的全部著作.《肯纳尔沃尔斯堡》的悲剧结尾使他十分痛苦.他饶有兴趣地读了司各特写的《拿破仑传》,极其满意.这里可以说一件他认真读司各特的小趣事.一天他读到司各特写的一本书中"月亮从广阔的西北方升起"时,哈哈大笑.他把能找到的各种版本都找来加以比较,看看是不是手民之误,最后肯定是作者本人的错,然后在边上加了注.他不喜欢拜伦,对拜伦作品或受其影响的德国文学作品里愤世嫉俗、悲观忧郁的倾向深恶痛绝.他也不大喜欢莎士比亚,觉得生活中已经有太多悲剧,莎翁剧作中的悲剧成分对他过多了.晚年他很爱读吉本的《罗马帝国衰亡史》和麦考利的《英国史》.在他的两个儿子移居美国后,高斯对美国文学也颇为关注,对小说《汤姆叔叔的小屋》尤其感兴趣,因为他的一个儿子在奴隶买卖中受了损失.

这么看来,尽管高斯受到坚实的古典文学教育,具有广博的知识,但在科学之外,他似乎未能摆脱小布尔乔亚的平庸.甚至可以说在科学技术领域以外,他的天才戛然而止,不见得比他周围的人有更高的品位和更深的洞察力.

高斯挺喜欢音乐,尤其是声乐.当他听到一首好听的歌,就会把它记下来.他会写得十分工整,简直像印刷品似的.他在当大学生时读过钢琴教程和巴赫关于钢琴演奏艺术的书,不过没有证据表明他会演奏什么乐器.他欣赏过在格廷根举行的音乐演出,包括韦伯指挥的音乐会,李斯特和帕格尼尼的独奏音乐会.大作曲家勃拉姆斯和小提琴演奏大师约希姆当时都在格廷根大学求过学,不清楚他们是否认识高斯.

年轻时熟练掌握语言的本领终身与高斯相伴.在自然科学之外,他在外语学习上显示了最大的才能.他能读以欧洲各种现代语言写的书,并能相当准确地说、写其中的主要语种.童年时他就熟悉古代语文,并精通其文学作品.他发表的主要论著都是用拉丁文写的,有关权威对他的拉丁文风赞扬备至.不用说他的德文近乎完美.

高斯在62岁时决定学一种新语言或一门新学科,以使自己的智力保持活跃.有一段时间他曾想搞植物学,因身体原因放弃.后来想学梵文,很快因不喜欢而扔下.1838年春,他转向俄文.1839年8月17日他写信给舒马赫说:"去年春初,由于需要某种诸如返老还童的新感觉,我开始投身于俄语之中,发现乐趣极多."[139]信中还说这一年5月后他几乎中止了学俄文,但他让舒马赫弄一些俄文书给他,因为他想接着再学.1841年12月29日的信中他说只能找到很少的时间学俄文.高斯藏书中有75本俄罗斯文学作品,其中包括普希金的8卷文集.他学俄语没有要任何人帮助,两年后就能相当流利地阅读俄文散文和诗歌,而且用俄文同圣彼得堡科学界朋友通信.访问格廷根的俄国人,包括俄国国务大臣在内,都认为他俄语说得很好.有过这样的说法:高斯学俄文是为了直接阅读罗巴切夫

斯基的原著，情况似乎并非如此，当然这或许是可能的动机之一．著名数学家中在语言才能方面超过高斯的或许只有哈密顿，他在13岁前已熟练掌握拉丁文、希腊文、希伯来文、阿拉伯文、波斯文、梵文、意大利文、法文，还熟悉6种东方语言．

高斯学俄语这件事使我们联想到他的同胞，伟大的思想家、革命家马克思．马克思也是在五十多岁才学的俄文，学得也很好，不过动机似乎不同．对于马克思，一门外语是一种"斗争工具"，而对于高斯，自娱成分居多．

高斯另一个业余爱好是关心时事．晚年高斯几乎每天上午11时到中午1时去前面说到过的"文学博物院"阅读，这段步行也几乎成为他唯一的体力活动．他在那里浏览各种报纸，从《泰晤士报》到当地的报纸，了解政治、财经、文学和科学新闻，有时还记下他觉得有趣的东西．他喜欢把他想读的最近的报纸收集起来，为防有人在他看前取走，他把它们按日期排列叠好，放在自己的椅子上，然后坐在上面，细心地一份一份抽出来看，看完再传给学生．学生通常敬畏地站着，如果有哪位学生想看高斯正想浏览的报纸，高斯会瞥他一眼，这位仁兄立刻就会把它交给高斯．学生背后都称他"报纸老虎"．尽管他以相当大的兴趣关注政治事件，但如前所说，他决不卷入其中．

24　人际关系

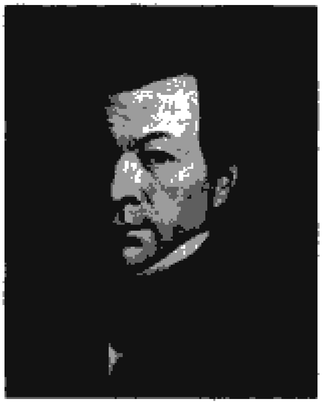
高斯在数学领域一直卓尔不群，终其一生未能找到分享他最精辟思想的人．他利用已故的伟大数学家和同时代的法国数学家的论著，但超然于他那时的数学活动之外．据说高斯年轻时就忧伤地感觉到，他没有一个具有同等天才的朋友，可以与之讨论数学问题．不过应当指出，那时德国数学界互不交流的习惯根深蒂固，加之高斯性格保守，多少有点孤僻，偏偏他的数学思想又往往如此超前，出现这种情形其实不难理解．下面我们选择一些有代表性的与高斯同时代的数学家，谈谈他们的关系．

普法夫　前面提到过，高斯于1798年9月去海尔姆斯台特大学，在那里结识了当时德意志最著名的数学家普法夫并住在其家中．两人黄昏时一起散步，谈论数学．高斯夸奖普法夫，不仅因为他数学上干得好，而且因为他为人纯朴，性格开朗．他在1799年12月16日写给W·波尔约的信[140]中说："我在此地住在普法夫家中，作为一位卓越的几何学家，同时也作为一个好人，我的一位热情的朋友，我尊敬他；他具有率真的、孩子般的性格，从不发脾气．"不过或许是由于高斯谦逊，他似乎并未对普法夫吐露自己的研究．

施陶特　以关于综合几何和射影几何方面的工作而广为人知的斯陶特是高斯的学生，于1818至1822年就读于格廷根大学．高斯指导他研读天文学，他关于1821年彗星的计算受到高斯赞扬，在此项工作的基础上他于1822年获得埃尔朗根大学博士学位．高斯在1826年12月15日致贝塞尔的信中曾盛赞斯陶特．在学校时，每当斯陶特交给高斯他指定的问题的解答，高斯总要拿出自己的答案，开玩笑说他料想双方都会满意．



普法夫



施陶特

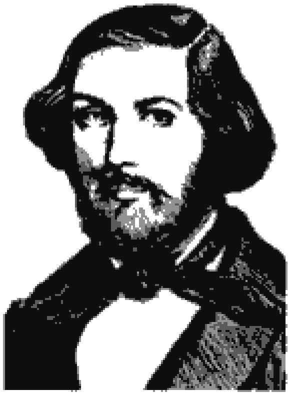
特稿

狄利克雷　狄利克雷于1826年5月写信给高斯，寄上他关于数论的第一篇论文，请求给予指导．高斯直到9月13日才回信，信中只给予一般的鼓励，劝告他寻求有可供研究的时间的职位．不过此前他在6月8日致恩克的信中说对狄利克雷的"突出天才"印象深刻，但不打算同其合作．狄利克雷对高斯极其崇拜，曾深入钻研《算术研究》．正是由于他对《算术研究》的详细注疏，此书才得以逐渐为广大数学家理解．在庆祝高斯博士论文发表50周年时，狄利克雷对高斯说，他比任何人都更多地研读过高斯的论著，后者的答复是他已远超过自己．会议上还发生过一件趣事，就是当高斯正要拿《算术研究》的一张手稿点烟斗时，狄利克雷眼疾手快，赶快过去把它抢了下来，以后终生当宝贝似的保存着．

艾森斯坦　1844年6月，洪堡写信给高斯，高度赞扬并推荐才华横溢的年轻数学家艾森斯坦．艾森斯坦出生于柏林一个犹太商人家庭，1844年暑假用洪堡给的100塔勒作为旅费访问高斯．艾森斯坦很崇拜高斯，而高斯则深为艾森斯坦的天才吸引，待他如同己出．1848年革命中，艾森斯坦去了几次"民主俱乐部"，高斯听到消息后十分焦急，对他的关怀于此可见一斑．从1843年起，艾森斯坦在短短9年里发表了关于数论和椭圆函数的50篇论文．1847年他的《数学论文集》出版，高斯为之作序．他在音乐上也极有才华．1852年他因患肺结核英年早逝，高斯对此非常伤心．高斯1846年4月14日写给洪堡的信中称艾森斯坦属于"大自然在每个世纪只产生几位的人物"．[141] 据M．康托尔说，高斯曾说过，古今只有3位划时代的数学家，那就是阿基米得、牛顿和艾森斯坦．当然，最后这个位置应由高斯本人占有．会不会高斯说这话时实际上也是在自我评价？高斯晚年在同瓦格纳谈话中也说过艾森斯坦"是古往今来最伟大的天才之一，他做的某些工作表明他具有最精致、最罕见的概念．"[142]



狄利克雷



艾森斯坦

黎曼 1845至1846学年下学期，黎曼在格廷根大学注册，攻读神学和哲学，同时也听数学课程．当时格廷根数学教育不怎么样，于是他于1847年去柏林大学，那里有一群学生聚在狄利克雷周围．1849年他返回格廷根，1851年11月在高斯指导下完成著名的学位论文《单复变函数一般理论之基础》．高斯对它给予了极高评价："黎曼先生提交的博士论文提供了可信的证据，说明作者在其论文所讨论的主题的大部分所进行的充分、完全和深入的研究显示出一个创新的、活跃的、真正数学的头脑以及了不起的富有成果的创造性．文章清楚、简洁，有的地方很漂亮……它不仅符合博士论文所要求的各项标准，而且远远超出了这些标准．"[143]

接着黎曼为取得"无薪讲师"资格做准备．1853年底他为此递交了关于三角级数的"就职论文"，又为"就职演讲"提交了3个论题，其中的第三个《论作为几何学基础的假设》与前两个题目相反，是他不经意地提出的，没有什么准备．可是高斯对此已思考了6年之久，他指定了这个题目．高斯的睿智为数学后代留下了一篇杰作．

1854年6月10日是数学史上值得大书特书的一天．年轻腼腆的黎曼当着神话般的、年老的高斯（他已活不过次年春天了）讲述他的想法．高斯此时必定感到十分欣慰，因为他意识到，他默默耕耘的思想终于后继有人了．韦伯后来回忆，在他们回家路上，高斯以罕见的热情高度评价黎曼的观念．

戴德金 1850年复活节，戴德金注册于格廷根大学．1850至1851学年下学期他听了高斯讲授的最小二乘法课程，我们在前面引用过他有关的生动回忆．下一学年上学期他听了高斯开的高等测地学课程．他于1852年在高斯指导下完成学位论文《关于欧拉积分的理论》．高斯的评语是："戴德金先生准备的论文是关于积分学的一项研究，它决不是一般的．作者不仅显示出对有关领域具有充分的知识，而且这种独创性也预示他未来的成就．作为批准考试的试验论文，我对它完全满意．"[144]兰道在1917年格廷根召开的纪念戴德金的演讲中说戴德金"是他那个伟大时代的最后一位英雄，高斯的最后一位学生"．[145]



黎曼



戴德金

特稿

热尔曼　这或许是高斯人际关系中最有趣的故事，也是数学史上的一则佳话.在《算术研究》出版3年后，高斯收到一封从巴黎寄来的信.这年他在致奥尔伯斯的信中说他很高兴收到巴黎一位年轻的几何学家勒布朗的信，这位青年以极大兴趣通晓高等算术并证明自己深入地钻进了《算术研究》之中.由于高斯在这类事情上很谨慎，这样的赞美之词是非同寻常的.

1806年11月27日，占领不伦瑞克法军的一个军官来到高斯家中，说布雷斯劳地区法军的某某将军应巴黎苏菲·热尔曼小姐之托，向高斯问候并祝他健康，将军命令他必要时对高斯给予保护.高斯一头雾水，惊诧莫名，因为他既不认识这位将军大人，也不认识巴黎的什么热尔曼小姐.三个月后真相大白：热尔曼写信告诉高斯，开始她怕他对女性有偏见，所以用了男性假名.高斯写信给奥尔伯斯说："这位勒布朗只不过是一位年轻小姐苏菲·热尔曼的化名，这一定使你像我一样地惊讶."[146] W·波尔约后来写信给高斯取笑道："一次你在信中说到巴黎苏菲之事，如果我是嫂夫人，可不会愉快.告诉我更多关于她的事."[147]

高斯于次年4月30日致信热尔曼，感谢她的关怀，感谢她谴责刚发生的战争.信中写道："当我看到我尊敬的通信者勒布朗变为这么一位杰出人物，她树立了我难以相信的光辉范例，我不知道怎样才能描述自己的惊奇和钦佩.一般地说对于抽象科学，特殊地说对于数的秘密的鉴赏力是极度稀罕的，人们对此并不奇怪：这门神圣科学令人着魔的魅力只对勇于深入到它内部的人才会显现.不过当一位按照我们的习惯和偏见必定会比男性在这类充满荆棘的研究中遇到更多不可比拟困难的异性人物，能在克服障碍、深入到其中最隐蔽部分中取得成功，那么毫无疑问她必定具有崇高的勇气、异乎寻常的才能和超人的天赋.真的，正如您以对这门学科的热爱使它增光生辉，再没有什么东西能以相当直截了当令人喜爱的方式向我证明，这门以如此多的欢乐充实了我的生活的学科的吸引力并非是虚幻的."[148] 高斯在信中同热尔曼讨论数学，在信的结尾特别注明写信那天为"我的生日".他在这年7月21日写给奥尔伯斯的信[149]中说到，"拉格朗日对天文学和高等算术有浓厚兴趣，我在早些时候的信中告诉他两条试验定理(对怎样的数，2是三次和

双二次剩余），他认为是'最优美和最难于证明的事情之一'. 然而热尔曼向我提供了两者的证明；我还未加以审查，但我相信它是好的，至少她从正确的方向着手解决……”.

1808年后两人通信中断. 后来在高斯推荐下，格廷根大学决定授予热尔曼名誉学位，并于1837年9月建校100周年时向她颁发证书. 可惜热尔曼已于1831年6月因患乳腺癌去世，不可能来领取证书. 她与高斯也从未见过一面，这使高斯深以为憾.

勒让德 勒让德于1806年发表了最小二乘法，而高斯在1809年出版的《天体沿圆锥曲线绕日运动之理论》中提到他从1795年起就用自己发明的最小二乘法，这使勒让德愤慨，他写信给高斯，实际上指责他不诚实. 高斯不想争论，只说他在1802年致奥尔伯斯的信中告诉后者“全部事情”，如果勒让德怀疑，可以问奥尔伯斯，后者手里有信件原本.

在此以前，高斯在1801年出版的《算术研究》中把二次互反律归于自己，而勒让德于1785年陈述了这个命题. 这当然使勒让德不快. 其实从各自的立场看，双方都没有什么错：高斯认为，一条定理应归于他，如果是他首次严格证明了它；而比高斯年长25岁的勒让德在数学的严格性方面则没有那么高的标准.

也许是勒让德运气不好，在他辛勤耕耘的大部分领域中，老是被比自己更富想象力的年轻数学家，如高斯、雅可比、阿贝尔等超越，使他所做的研究显得有点多余. 高斯在写给舒马赫的一封信中也感叹过似乎是命运使然，他的一些数学工作都同勒让德相重. 其实，如我们已指出的，高斯在数学上有许多先于他人但没有公开宣布或发表的伟大发现.



热尔曼



勒让德

柯西 当柯西发表关于复变函数的辉煌论著时，高斯没有什么反应，显得相当冷漠. 原因不难解释：如我们在“辉煌十年”这节中所说，早在1811年，高斯已进入这一领域的核心，发现了单复变函数论中现称为“柯西积分定理”的基本定理. 似乎柯西也不喜欢高斯. 柯西发表的东西既多又快，他喜欢教书，他在综合工科学校的教材成了分析严格化的最早范本，使得他和魏尔斯特拉斯成为分析严格化的主要代表；但正如我们前面指出的，高斯在逻辑严密性上树立的标准其实是很高的，他是分析严格化当之无愧的先驱.

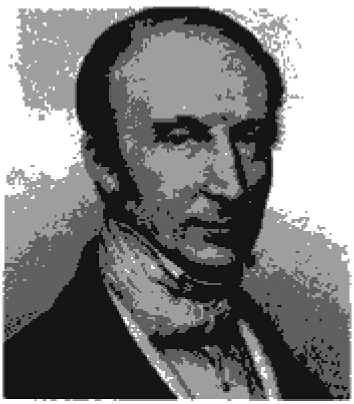
阿贝尔 阿贝尔于1825年去德国时，原打算访问高斯，那时他还不大为人所知. 他把证明一般5次方程不可解的论文寄给了高斯，但高斯把此文放在一边，在他死后发现它还没有裁开. 阿贝尔在1825年写的一封信中说：“据我所知，柏林的年轻数学家，整个德国的年轻数学家

几乎都崇拜高斯;他是数学优点的象征.然而,即使假定他是伟大的天才,也可以肯定他的表达是不好的.克雷尔说高斯的所有作品都如此晦涩,以致几乎无法理解……据我所听到的,可能德国没有一个地方会对我更有利.确实,格廷根有很好的图书馆,但仅此而已,因为唯一理解一切事物的高斯绝对是难以接近的."[150] 其实阿贝尔一直很想与高斯会面.1826年底他写的信中还有这样的话:"我很快将离开巴黎,因为在这里再也没有什么得益了.我要去格廷根,主要去见高斯,要是他不骄傲自大强烈地拒人于门外的话."[151]

1827年9月,阿贝尔发表长文《关于椭圆函数的研究》,提出研究椭圆积分反函数的思想,使这一领域的面貌出现根本改变.贝塞尔写信给高斯,认为高斯在椭圆函数论中的工作经历很长时期,必定会是经典模型,敦促他至少拿出一部分,以确保优先权.几个月后高斯回答道:"很可能我不会很快写下我关于超越函数的研究——对此我已拥有许多年,从1798年起,因为我有许多别的事情必须清理掉.现在,据我所知,阿贝尔先生已先于我并解除了我在这方面负担的三分之一,他以极大的严格性和优美性实现了所有这些进展.他的道路恰恰是我1798年所走的道路,我们的结果如此相似,毫不足怪.使我惊奇的是,这种相似性还拓展到形式,甚至部分记号的选择,好多次他的公式就像我的公式的复制品那样出现.但为避免任何误解,我必须说我不记得曾把这些研究告知过任何人."[152] 克雷尔也曾希望高斯发表关于椭圆函数的工作,后者以同样的语气回答:"由于阿贝尔在表达上显示了如此多的优美性和洞察力,我觉得自己已绝对免除表述这些观念的必要."[153] 要是阿贝尔看到这些信,他还会像上面叙述的那样谈论高斯吗?

特稿

1828年底,克雷尔倾其全力,促使教育部决定聘任阿贝尔为柏林大学教授.洪堡大力支持,他从许多学者那里征集到推荐,其中包括高斯和勒让德.不幸天才薄命,阿贝尔于次年4月告别人世.阿贝尔始终未能与高斯谋面,诚为数学史上一大憾事.5月19日,高斯写信给舒马赫说:"我没有从任何报纸上看到阿贝尔的死讯,他的去世对科学是极大损失.如果有关这位极其杰出、有极高才智人物的生平的东西出版并传到你手里,我求你告诉我.如果哪里有他的画像,我也想得到一张."[154] 阿贝尔地下有知,当可为这些真情的话感到欣慰.



柯西



阿贝尔

雅可比　雅可比出生于富裕的犹太银行家家庭,20岁时就成为柏林大学的无薪讲

师,1826年去了柯尼斯堡.他对数学各个分支都有兴趣,在数论领域也做了研究,并把结果告知高斯.高斯很感兴趣,写信给也在柯尼斯堡执教的老友贝塞尔,了解雅可比的情况.

1827年夏,当阿贝尔《关于椭圆函数之研究》等待发表时,雅可比在椭圆函数论上也有了新的想法.他分别于6月13日、8月2日寄了两篇短文给舒马赫,想发表在后者主编的《天文学通报》上.第一篇提供了椭圆积分的某些特殊变换,第二篇提供了一个一般公式,但都没有证明.舒马赫把文章寄给高斯征求意见.高斯的反应有点奇怪,他肯定雅可比得到的结果是合适的,而且可从他自己的结果中直接导出.然后他写道,如果舒马赫再收到此类文章并对发表有所犹豫,请不要再寄来.舒马赫对这样多少有点粗暴的回答感到惊讶,但仍回信说会尊重高斯的意愿.高斯在下一封信中对此作了解释:"雅可比先生 …… 的结果只是我本人广泛研究的一个片断,在将来某个时候,我想把我的研究汇集为一部综合性的著作,如果上苍继续给我生命、力量和平静的话.到那时我就能不在乎有人指责书的某些部分是我通过私人通信知道的."[155] 有趣的是,勒让德得知有关消息后反应非常激烈,他于这年写信给雅可比说:"高斯怎么敢说你的大部分定理他都知道而且早在1808年已发现?对于这样一位具有充分的个人价值,不必窃取别人的发现的人物,这种厚颜无耻真令人难以置信."[156]

1827年9月,阿贝尔的长文和雅可比的两篇文章发表,许多数学家认识到,这是椭圆函数论研究中的革命性变化,高斯当然也在其中.1828年克雷尔向高斯征求椭圆函数文稿,高斯答道,雅可比的研究已把他的工作包括进去,雅可比的研究"具有深刻的洞察力,非常优美,因而我相信可以不必发表自己的研究".[157]



雅可比

1829年雅可比造访高斯,在两人的交流中,似乎高斯保留的东西多得多.雅可比尽管对高斯的性格有所批评,但确认他的智力至高无上.1840年雅可比又一次访问高斯,后来他写信给其兄弟说:"要是实际天文学不分散他(指高斯 —— 引用者)辉煌生涯中无比巨大的天才,那数学现在就完全会呈现另一种面貌."[158] 如前所说,雅可比参加了1849年庆祝高斯学位论文发表50周年的活动.这年9月21日,他在写给其兄弟的信中说:"你或许知道我与狄利克雷一起参加了高斯50周年庆典.我光荣地坐在高斯旁边并发表了一篇相当长的演讲.你知道20年来他从未引用过我和狄利克雷的文章,但这次在几杯甜葡萄酒后,他激动不已,对狄利克雷 —— 他对高斯说,他比任何人都更多地研读高斯的论著 —— 说,他不只是研读,他已远远超越这些著作 …… 为了在某种程度上显示数学的荣耀,这次旅行是重要的."[159]

在科学技术的其他领域,情形则与数学领域迥然有别,高斯在这些领域有不少朋友、

合作者和学生.现存的高斯发出和收到的信件在7 000封以上,其中大多是同这些人的书信来往,无疑这些现存信件还只是高斯平生通信的一部分.与高斯通信最多的是舒马赫,从1808年至1850年后者去世,舒马赫写给高斯808封,高斯去信596封.其次是奥尔伯斯,从1802至1839年(奥尔伯斯去世于1840年)写给高斯383封,高斯去信329封.在朋友中通信很多的还有:格林,从1812至1854年写给高斯284封,后者从1810至1853年写给对方166封;林德瑙,从1804至1849年写给高斯228封以上,后者从1808至1823年写给对方33封(有一封日期不明);恩克,从1813至1854年写给高斯146封,后者从1814至1851年写给对方80封;贝塞尔,从1804至1844年(贝塞尔去世于1846年)写给高斯119封,后者同期写给对方76封;哈定,从1803至1815年写给高斯111封,后者从1803至1811年写给对方51封.虽然高斯通常回信较少,热情往往不如对方,但信件中给出的信息却更多.除贝塞尔算得上是一位数学家(但他首先是天文学家)外,上面这些人都不是数学家.下面我们挑选其他的领域中的几位,简单谈谈他们与高斯的关系.

洪堡 洪堡是一位大名鼎鼎、很有影响的人物,他奖掖后进,对富有天赋的年轻人非常热情,把年轻学者看做"自己的孩子".在他关爱的许多年轻人中,就有艾森斯坦和狄利克雷.洪堡是在1804年美国之行回巴黎时听到高斯大名的,他听到科学界对高斯赞誉有加.1805年,普鲁士国王要求洪堡进入柏林科学院以增添科学院的光彩,洪堡回复道,他去不去并不重要,能为柏林科学院赋予新的荣誉的唯一一个人是卡尔·弗里德里希·高斯.1807年两人开始通信,到1854年他写给高斯的信有31封,后者回信计有22封.正是洪堡说服高斯参加1828年在柏林召开的科学会议,这是高斯平生参加的唯一一次大型科学会议.高斯在客居洪堡府邸的3周中仔细参观了府里的磁学装置,促使他下决心进入磁学研究.洪堡在磁学领域耕耘多年,虽然并不容易,但他还是认识到他得让位于更富创造力的高斯.不过洪堡对高斯的性格颇有微词.高斯离开柏林后,洪堡于1828年10月18日写信给舒马赫说高斯对不认识的人"冷若冰霜",不关心他最接近的圈子以外的事.1837年10月1日他在写给贝塞尔的信中说高斯"故意离群索居",说他习惯于突然控制一个小研究领域,把此前所有研究结果看做其一部分,并拒绝考虑任何别的东西.

韦伯 前面提到过,韦伯能去格廷根大学执教,高斯的推荐功不可没.1831年9月韦伯到格廷根后,很快就在私人生活和科学事业两方面同高斯建立了亲密友谊.两人经常在对方家里作客,共进晚餐.高斯与之友谊这么深的朋友,除此之外也只有W·波尔约了,但后者从1798年分别后就再也没有与高斯见面.韦伯的一个姐妹为他操持家务,1832年6月她在一封信中说:"只要高斯愿意,威廉喜欢高斯每天都来.高斯生活很孤单,威廉随时都受欢迎.高斯是受到这样社会生活训练的人,只要我在场,他就闭口不谈学术上的事情,而且他也要求我在场.他会同我们谈论各种事情,从12点一直谈到5点.最近三天威廉连续请高斯一起用晚餐(高斯女儿外出了)."[160]

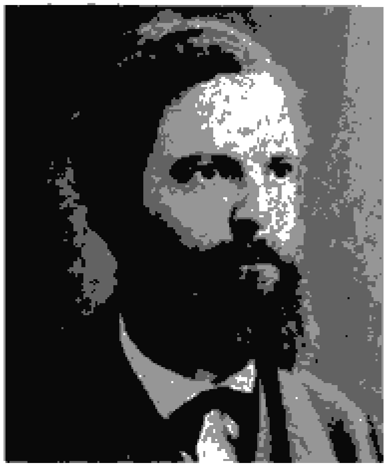
高斯把韦伯作为卓越的科学家、平等的研究伙伴、志同道合的亲密合作者.高斯总称呼韦伯为"韦伯友",他的信件表明,此后6年中,韦伯不在时高斯就感到不快.韦伯促进高斯在物理学中的研究,他更多是一位实验物理学家,而高斯则更多在数学方面工作,进行理论开发,两人真是相辅相成,珠联璧合.考虑到两人见面时韦伯年方二十七,而高斯

时年五十四，两人年龄正好为 1 : 2，设想高斯父亲般地对待韦伯，应当不会有大错.

前面说过，"七君子事件"后，韦伯离开了格廷根.后来高斯为韦伯重返做了许多努力，1849 年韦伯恢复原职，使高斯很高兴.但这时高斯年事已高，不可能再搞什么合作研究.韦伯活到 87 岁高龄，在最后的岁月中有点痴呆，常说要回格廷根，别人告诉他这里就是格廷根，他总回答说："不，这不是高斯的格廷根."



洪堡



韦伯

奥尔伯斯　奥尔伯斯比高斯年长 19 岁，1781 年在格廷根大学获得医学学位，但从 1779 年起就对天文学极有兴趣，1780 年独立地发现了一颗彗星.前面说到过，1802 年元旦，他在高斯计算的位置附近再次捕捉到谷神星，从此开始了他与高斯的终生友谊.1802 年夏高斯走访住在不来梅的奥尔伯斯，在他家里住了 3 个星期.两年后两人在汉诺威附近再次相叙.这两次旅行以及 1803 年造访察赫的旅行成为高斯年轻时代的美好回忆.前面也说过，高斯接受格廷根大学聘任前，曾同奥尔伯斯作过仔细讨论.法国占领当局要高斯交纳贡金时，是奥尔伯斯首先汇给高斯这笔钱(后者未接受).1819 年 8 月高斯又一次访问奥尔伯斯，度过了愉快的 5 天.1824 年夏进行大地测量时高斯也访问过时年 66 岁的奥尔伯斯，为他身体仍很健康深感高兴.从这些片断不难看出两人友谊很深.

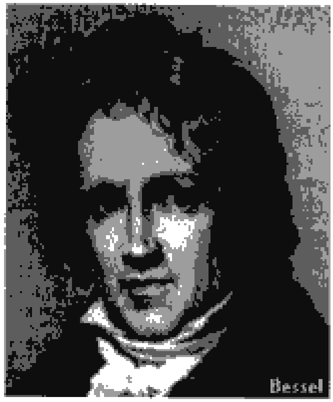
贝塞尔　奥尔伯斯 1804 年时就向高斯提到贝塞尔，1807 年高斯与贝塞尔在不来梅见面，高斯对贝塞尔印象很深，从此开始了两人长达 42 年的友谊.高斯送给贝塞尔一本《算术研究》，后者非常用功地研读此书，以致书都散了架，还得重新装订.贝塞尔视高斯为师，高斯认为贝塞尔是位天才，是伟大的天文学家.

在 1807 至 1825 年间，两人从未见面，但通信频繁，信的内容也很广泛，不限于天文学，也讨论数学，还包括一些私人生活问题，例如高斯高兴地同意设法让贝塞尔及其弟免服法国兵役，高斯同意贝塞尔出任柯尼斯堡天文台台长后关注他能免除考试和学位论文而在格廷根大学获得博士学位，等等.

高斯这样谈论贝塞尔："没有人能像贝塞尔那样把天体的性质融入自身精神之中，没有人能像贝塞尔那样在观测和使用仪器方面如此得心应手.奥尔伯斯对天文学做出了极大贡献，然而他的最大贡献在于他在贝塞尔天才萌芽阶段就充分认识到他的天才."[161]



奥尔伯斯



贝塞尔

舒马赫　1807年舒马赫在格廷根大学获得一个有薪水的职务，同时在高斯指导下研读天文学，从此开始了两人之间的终生友谊.在格廷根一年多中，他把同高斯的谈话做了详细笔记，这对后来的学者很有用.两人之间的通信由佩特斯编辑于1860至1865年出版，整整6卷[162].高斯写给舒马赫的大量信件表明，尽管在科学上他只是给予方而非受益方，他仍然非常有耐心，循循善诱，不嫌其烦地用多数人能够接受的方式解释科学问题，使对方能很快进入问题的核心.舒马赫对高斯也提了许多忠告，不过他对高斯也有微词，例如他曾在致贝塞尔的信中说高斯是"古怪家伙"，对他最好是"保持彬彬有礼，不做任何不必要的事情".[163]



舒马赫

25　工作风格

高斯年轻时就打定主意，追随阿基米得和牛顿的伟大榜样，只给世界贡献尽善尽美的精致艺术品，增一分显多，减一分嫌少.他的方法的逻辑特征在格廷根就读时臻于成熟，即采纳古希腊数学严格性的精髓——坚持明晰的定义、明确的假设和无懈可击的完满证明，但不用它的几何形式.他用欧拉的方式数值地、代数地思考，又是欧几里得式严

格性推广到分析的化身.他能使大量的经验探索同深入细致的思考和严密的理论构造互相推动,完美结合.他不断润色自己的作品,使它尽可能地严谨、完美、简洁、具有说服力,不留任何为达到它所进行的劳作的痕迹.萨托里乌斯说:"高斯总是竭尽全力使其研究取得完美艺术品的形式.不到一件作品成功,他绝不止歇.因此在一篇著作达到他所希冀的形式之前,他决不会发表.他常说,一座精美的建筑建成后,就不应当再看见脚手架."[164]他的纹章上刻的是一棵树,上面没有几颗果实,并刻有名言"Panca sed matura"("少而精").

他的朋友曾力劝他多多发表自己的想法,不必过于拘泥论著严格的形式.1825年12月2日舒马赫在信中恳请高斯:"关于你对你的论著所提的原则,我希望,为了科学我希望,你不要坚持得过于严格,这样我们就能比现在更多地得到你无穷无尽的丰富思想,而对我来说,主要内容似乎比这些内容所能取得的最完整的形式更重要.不过我写这些意见时十分惶恐,因为你一定从正反两方面考虑过很长时间."[165]次年2月12日高斯回信道:"由于你没有解释,我好像觉得你认为如果我满足于提供一块块的建筑石材、砖瓦等等,而不是一座座建筑(因为在某种程度上建筑只是砖材的形式),不管它是神殿还是小屋,那我就能为科学完成得更多.不过即使我对外部装饰关注很少,我也不喜欢竖起一座建筑,却没有主要部分."[166]在1832年8月18日致恩克的信中他说得更明确:"我知道,我的一些朋友希望我能较少地以这种精神工作,但这样的事决不会发生.不完整我就没有一点实在的乐趣,而从事无乐趣的工作对我只不过是一种折磨."[167]在1827年元月15日致舒马赫的信中,高斯谈到他关于曲面的著作时说:"我发现了许多困难,虽然在人们可以正确地称之为填补或形式上耽搁并不明智,然而这其实是内在错综复杂真理的一致性的体现,而除非读者不再能辨认出研究过程中付出的巨大努力,这样的论著就不算成功……有时我试着只给公众一些关于这个或那个主题的暗示,然而它们或是无人留意,或是如一本书评中的某些言论那样被人泼上污泥弄脏.因此,只要是讨论重要的主题,那就要么是本质上完整的东西,要么什么也不出."[168]高斯在这里说的暗示,大概只有第一流数学家才能捕捉和理解,如《算术研究》第335目中的提示对阿贝尔和雅可比研究椭圆函数的影响那样,别的暗示怕是没有此种幸运.至于高斯说的第二种情形,正是他极少几次谈到不可能证明平行公设中的一次,后来一直影响着高斯不肯发表关于非欧几何的革命性观念.



高斯的纹章

高斯晚年时在1850年2月5日写给舒马赫的信中对他坚持论著的严谨性作了最确切的说明:"如果你认为我的意思只是有关语言和优雅表述的最后润色,那你可就大错特错

了.这些相对来说只花掉不多的时间.我所指的是内在的完美性.在我的许多论著中,正是这方面耗费我多年的沉思,而在其后紧凑的表述中,没有人注意到必须首先克服的困难."[169] 再清楚不过了:高斯追求的目标是深入到数学各个领域的内在的、本质的、构成核心的基本概念和定理及其联系,而不是一些表面现象.他曾明确地提出,"尽管在循序渐进的科学培训和对个人的教育方面,很合适的次序是容易的先于困难的,简单的先于复杂的,特殊的先于一般的,然而在心智方面,一旦达到较高的观点,就要求相反的顺序……"[170]

对于高斯的写作风格,阿贝尔有过这样生动的描述:"他像一只狐狸,用自己的尾巴抹去留在沙子上的一切踪迹."[171] 克罗内克也说过:"高斯《算术研究》的表述方式,如同他通常的论著那样,是欧几里得式的.他在其中细心地抹去导致他得到这些结论的所有思考痕迹.这种说教的方式肯定是他的论著在很长时间里不为人所理解的原因."[172] 高斯的传授式写作方式对后世数学论著的写法有决定性的影响,后来的数学文献,都是用这种模式写就的.这对数学的发展有没有什么不利的影响,似乎是一个可以讨论的问题.当然我们也应当看到,高斯也会有一些启发式的讨论,也常会举一些数值例子.再说"到底怎么想出来的"其实也往往是一件难以讲得清楚的事情.

特稿

高斯对数学中名词、定义甚至个别字母的选择都非同寻常地煞费苦心,前面曾提到过高斯拟定的一些数学名词,这里再举一个小例子,来说明高斯在这类事情上多么认真.他在1811年11月21日写信写贝塞尔说:"$\sin^2\phi$ 每次都让我恼火,尽管拉普拉斯也这样用.如果人们担心 $\sin\phi^2$ 会有混淆,那好,让我们写 $(\sin\phi)^2$ 而非 $\sin^2\phi$,后者按相似原则应当是 $\sin(\sin\phi)$."[173]

关于高斯丰富的想象力,关于他的严格性,关于他耸入云天的高度,史密斯和库默尔有过深刻的论述.史密斯在出任皇家学会主席的就职演说中说:

"如果我们不算伟大的牛顿(高斯本人也会十分高兴地把这一姓氏排除在外),很可能任何时代、任何国家的数学家,在发明的丰富多产并能予以绝对严谨的证明上都不能超过高斯,这一点是古希腊人也会妒忌的.承认像欧拉和柯西这样卓越的数学家,他们在创造丰富多彩的知识财富中是如此具有征服力,他们是如此强烈地为自己达到的成果所吸引,以致不大注意腾出时间来按照严格的逻辑顺序来安排他们的观念,或者用不可辩驳的证明来建立他们本能地感觉到的、几乎能看出其正确性的命题,这丝毫没有贬低他们的伟大.高斯的情形却迥然不同.但是,正是在努力达到逻辑形式的完美之后,却使得他的著作遭到晦涩和不必要地艰难的指责.这看来似乎矛盾,却可能是实情.事实上,只要我们像聪明的学生读欧几里得几何时那样抱着唯唯诺诺百依百顺的态度来读高斯的著作,那么里面就没有晦涩也没有艰难,每个论断都有充分的证明,论断恰如完美的类推次序一个接着一个.到此为止,没有任何可抱怨之处.但当这样读完之后,我们立刻会觉得工作才开始,我们仍然站在神庙门口,仍然有秘密隐藏在幕后……没有任何迹象显示结论得以达到的过程,甚至没有任何迹象显示

证明的相继步骤是如何考虑的.高斯不止一次地说过,为简短起见,他只给出了综合而隐瞒了对命题的分析…… 另一方面,如果我们转向欧拉的论文,会发现那里有某种自由丰富的优美的整体表现,它告诉我们欧拉在其研究的每一步中必定会有的平静的喜悦;然而面对标志高斯巨大努力的严肃壮观的设计,我们会感觉到同它有无限的距离……

"…… 高斯 …… 以渊博的鉴赏力充分深入到这门科学的同时,恰恰又在其每个部分坚持了最大的严格性,决不忽略任何一个难点,好像它不存在似的,也决不在实实在在地证明之外接纳一条定理."[174]

库默尔说:"高斯所有长篇鸿制或短小论文,没有一件不是凭借新的方法和新的结果在所涉领域中开辟了根本性的进步.它们都是具有经典特征的杰作,它们必定会被各个时代的人们勤勉地研读和运用,它们不仅是作为科学历史发展的纪念碑而被保存下来,而且是作为所有国家未来各代数学家更深人钻研的基础和富有想象力的观念的丰富源泉 …… 在相当长一段时间里,他孤独地站在超群绝伦的顶端;他具有如此巨大的权威,以至极少觉得需要别人注意自己或去教导别人."[175]

高斯的数学工作是无与伦比的创造才智与革命性的批判能力的罕见结合.大胆的想象为他带来源源不断的独创观念和崭新方法,难能可贵的是它们又总是与坚持高标准、力争理想、完满和彻底的强烈追求紧密联结在一起.高斯在1808年9月17日写给舒马赫的信[176]中曾说:"只有当我预期有关的想法和结果能巧妙地联结起来,而这些想法和结果又是由其优美性和一般性引人时,我才会对数学论题突发奇想,感到强烈的兴趣."

高斯认为他的研究能出丰富成果是由于他坚持不懈地、深人地、专注地、反复地思考问题.甚至在同友人交谈时他也会突然沉默,对周围一切不闻不问,这是因为他脑海中浮现各种想法,难以控制.稍后他会控制自己的思路,自觉地把全部精力集中到难点,直到征服它才罢休.他说过:"别人只要像我那样连续不断地深人地思索数学真理,他们也会做出我的发现."[177] 当然在我们这些凡人看来,天赋和机遇恐怕也是不可或缺的因素.这里可以举一个高斯苦苦思索的极好例证,就是《算术研究》第356目的公式中有一个正负号,1805年9月3日,高斯写信给奥尔伯斯说:

"你或许记得 …… 我向你抱怨过一条定理,对于它寻求一个满意证明的所有试图均告失败.这条定理在我所著《算术研究》第636页(《全集》第一卷的442~443页 —— 引用者)上,它只不过是要确定一个根的正负号,却老是折磨着我.这个不足一直使我寝食难安.整整四年中,几乎没有一个星期不是伴以解决这个问题的这样那样徒劳无功的尝试度过的,但所有冥思苦想、艰难探索都以失败告终,每次我只得伤心地放下铅笔.几天前我终于成功 —— 我或许要说这不是我长期搜寻的结果而是上帝的恩赐.谜团像闪电一击那样解决了;我自己都不能说出在我先前知道的东西与凭借它我最后的尝试得以成功的东西之间如何过渡的线索.非常奇怪的是,这个谜团现在显得比许多别的没有让我驻足

多日的问题更容易些.可以肯定,当我在某天对此论题进行讲授时,没有人能想象出我为此付出了多大的努力."[178]

高斯也常有思考多时却一无所获的情形.例如,他在1826年致贝塞尔的一封信中就提到,有时他在一个问题上花了好几个月,但徒劳无功.

由于要求极高,写东西所需的时间很长,他常常抽不出时间写下他的想法,也缺乏时间来探究次要分支或他的观念的所有产品.据统计[179],高斯一生有记录的重大创新想法总共有404项,但发表的只有178项,占总数的44%.他常有这样的感觉,他会把自己的许多工作带进坟墓,因为他完成不了,但又不想把未完成品转交给旁人.

时间对于高斯来说是一个大问题.在1839年2月28日致贝塞尔的信[180]中,高斯近于呼号:为完成研究,他需要"时间,更多的时间,比你所能想象的多得多的时间,而我的时间通常总是有限的,非常有限".在高斯写的信中经常可以看到这种缺乏理论研究时间的抱怨.或许他最快乐的时光是1799到1807年,那时他在费迪南德公爵慷慨资助下可以自由地做研究.老年时他常满怀深情和感激回忆那些年份.天文台台长的职责确实使高斯负担沉重.1820年6月28日他在写给贝塞尔的信[181]中说:"我热爱天文学,但我感到实践天文学家的负担常常过重.最痛苦的事是我很难从事连贯的理论研究."1845年2月15日,他在写给恩克的信中谈到艾森斯坦由于普鲁士国王的支持正在从事数学研究,"他现在能恣意发挥他的天才,不必受某些外部事务滋扰,过着愉快的时光.我生动地记得我多年前生活在类似条件下的情景.另一方面,正是纯数学思考需要不受侵占和连续不断的时间."[182]这些都从另一侧面说明高斯为自己的成果付出了多么巨大和艰辛的智力劳作.

特稿

高斯处事井井有条,即使对一些文件做摘录,也总是十分整洁,有条不紊.他有许多小笔记本,一行一行工整地记着临时想到的事.他有一个索引,记着许多著名人物和自己的已去世的朋友在世的时间,精确到天数.在逝世前3天的晚上9时,他算下自己已活了多少天,并把这个数据记在他多年用的一本保险精算本上;他记下从格廷根天文台到常去的各个地方的步行步数;他记下各年发生雷电的日期和次数;他记下汉诺威铁路每月的收入;他记下自己孩子的出生日子、接种牛痘的日子、长出前8颗牙齿的日子、开始走路的日子并注明当时孩子多大(以天计算);他画下天文台房间和家里房间钥匙的图样,十分精确.人们当可从这些小事窥见高斯在工作中会如何严肃认真、一丝不苟.

高斯的记忆力很好.他在1841年2月12日写给舒马赫的信[183]中实际上揭示了自己记忆的奥秘:"我的记忆力有这样的弱点(而且老是这样),我读的每样东西,除非在阅读时就把它同某件有直接兴趣的事联结在一起,否则就会很快消失得无影无踪."

高斯具有超人计算力是人所共知的.舒马赫曾经想挖出高斯独特的计算秘密,对此高斯回答道(1842年元月6日的信[184]):"我干高等算术几乎已有50年之久,这使我在数值计算上具备这样的才能,即在计算中经常出现的许多数值关系会不自觉地刻在我的记忆里.例如,像$13\times29=377$,$19\times53=1\,007$等类似的关系我根本不用想就会直接出现,而许多别的关系又能从这些关系稍稍想一下几乎不自觉地立即得出.除此之外我没有刻意去弄什么技巧,否则无疑会更进一大步;我认为这些技巧毫无价值,除非它是手段而不是目的."

高斯在公开出版的论著中竭力避免涉及可能引起争论的主题.早在他的学位论文中,他就对运用虚数及其几何解释十分谨慎,尽管其实他在1799年已拥有这种思想,但在1831年前一直压着不发表.如我们在"非欧几何"一节中所说,他关于非欧几何的观念更是如此.前面提到的1816年的一篇书评中关于平行公设的话所引起的不快经历更加促使他下定决心避开争论.他在1818年8月25日写给格林的信[185]中说:"你触动一下蜂窝,这些黄蜂就会绕着你的脑袋飞转."另外,高斯对他同时代的大多数数学家评价不高,他在1799年12月16日致W·波尔约的信[186]中说:"我越来越相信,真正的几何学家为数惊人之少,他们中绝大多数人既不能判断这样的工作(指W·波尔约关于平行公设的研究——引用者)困难之所在,甚至也不能理解它们."在1832年3月6日就J·波尔约关于非欧几何的工作写给W·波尔约的信[187]中他说:"绝大多数人对其中涉及什么没有正确的观念,在我同其通信的人们中,我发现极少有人以特殊兴趣接纳我所说的.为做到这一点,人们必须非常强烈地感觉到什么东西正实实在在地失去,而绝大多数人对此却还处在黑暗之中."

高斯其实是一位很谦虚的人.他知道自己在科学中所居的极高地位,但始终保持谦逊态度,除了汉诺威国王来格廷根那一次外,他从不佩戴授予他的各种奖章和勋章.当同他尊重的科学家有不同意见时,他决不自以为是.他说过,如果涉及一个他没有透彻研究过的论题,那么他不大相信自己的观点.但当涉及他已严格证明的数学事实时,他也会坚持真理,不过不一定公开发表.在纯科学事务上,当碰到愚蠢、狂妄自大和虚假时,他在私下会非常尖锐.例如他曾说某位先生"似乎是在睡梦中写书的".慕尼黑一位天文学教授宣称他在月球上发现了城市和公路,高斯说只要拿起他的任何一篇著作,就只能期望看到胡说八道.

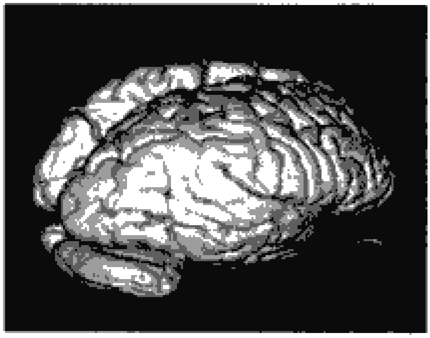
这位神奇人物从外表看是怎样一个人?按照他的学生的说法,他个儿不算高,但敦实健壮,外貌给人以深刻印象,晚年满头银发,蓝眼睛目光清澈深邃,尤其令人敬畏.他前额很高,似乎是巨大智慧的标志.他步态优雅,语音悦人,和蔼可亲,彬彬有礼.他的眉毛比较浓,并且具有实践天文学家的特点,即右眉明显高于左眉.他老是戴着那顶黑丝绒无檐便帽,眼睛近视,得不时戴上眼镜,但视觉和听觉都很锐利精确,具有训练有素的敏锐观察力.他做什么事都中庸适度,即使抽烟斗、喝葡萄酒都如此.他的物质生活出奇简朴.尽管在他一生中有过很多不如意甚至痛苦,他始终能安详宁静,离群索居,耽于沉思,淡泊守志.

这么看来,在高斯身上又一次印证了蒲丰的名言:风格即其人.

26 溘然长逝

1854年秋季,高斯的病不断恶化.双腿肿胀越来越严重,再也不能步行到博物院,只能待在家里.哮喘日渐加剧,在房间里走动都很吃力.1854年12月7日晚情况严重,医生甚至觉得他活不过那个晚上.幸运的是高斯挺过来了.后来水肿加剧,与人谈话变得很困难,但他仍广泛阅读,甚至还写些东西,但他优美整洁的书法已变得颤颤巍巍.这年12月他立下遗嘱.在最后的时日里,由于哮喘,他只能坐在大安乐椅上.1855年2月22日心脏病最后一次发作.下午似乎好些,要了一杯水,还问谁在屋里,可是心跳越来越慢,2月23日凌晨1时5分,呼吸终于停止,高斯平静地与世长辞.

高斯的亲密友人闻讯立即赶到他的寓所.他们发现高斯坐在那把大安乐椅中,双手搁在膝上,两脚伸开,布满银发的庄严脑袋低垂在胸部,那种安详平和的景象使他们的心灵备受震撼.特蕾丝绺开他的银发,哭着亲吻他的前额,好像要把他的生命唤回来.这种情景使在场的人极度感动,他们也都潸然泪下.



高斯的大脑

第二天在家属同意下对尸体进行了解剖,在场的有医生、利斯廷、瓦格纳以及其他3位教授.瓦格纳后来说高斯大脑丰富的很深的脑回是他所观察到的最引人注目的大脑,前脑回尤其令人印象深刻,但其质量不比常人大很多,连同脑膜总质量1 492克,去掉脑膜、渗水和某些血管后质量为1 410克.高斯的大脑保存在格廷根大学生理学系.专门从汉诺威请来了雕塑家黑泽曼,做了整个头部和颅骨内表面的面模和铸型.后来还请他为格廷根大学图书馆制作了大理石胸像.洪堡认为这座像最像高斯本人.同时还请来了当地摄影师用达盖尔银版法拍了4张照片,现已佚失3张.



高斯去世一天后的遗像



黑泽曼塑的高斯胸像,置于格廷根大学图书馆

从1855年2月26日早晨起,尸体置放在格廷根天文台圆形大厅.教堂钟声齐鸣,告诉人们这个市镇最伟大的儿子即将安葬.许多素不相识的人前来向这位伟大学者告别.九时整,12名大学生抬着灵柩走出大厅,这12人中有后来成为卓越数学家的戴德金.这不禁使我们联想到这一年的28年前一幅相似的场景:伤心的人群向贝多芬致最后的敬礼,而在扶灵者中,有后来举世公认的大作曲家舒伯特.有意思的是,戴德金极有音乐天赋,弹得一手好钢琴,大提琴也拉得很好,还为其兄的一个脚本谱写了歌剧.可惜舒伯特不懂数学,要不然可真是一大历史巧合了.

高斯被安葬于圣阿尔班斯墓园.他的女婿埃瓦尔德和他的学生兼挚友萨托里乌斯相继在墓前发表了悼词.

如前所说,高斯在科学众多领域的许多成就,生前即已得到高度评价,他由此得到各种学术荣誉,这是理所当然之事.以高斯淡泊名利的高风亮节,我们不必一一列举他获得的荣誉;但择要举其大者,对认识高斯的贡献,也是必要的.

高斯生前是几十个著名科学院或学会的成员,其中有:巴黎科学院,法兰西研究院,伦敦皇家学会(即通称的英国皇家学会),剑桥哲学学会,柏林科学院,维也纳皇家科学院,都灵王家科学院,那不勒斯科学院,维洛那意大利科学学会,圣彼得堡科学院,丹麦王家科学学会,瑞典皇家科学院,荷兰皇家科学、文学和艺术学院,西班牙科学院,爱丁堡皇家学会,爱尔兰皇家科学院,美国艺术和科学学院,格廷根王家科学学会,慕尼黑王家科学院.

高斯获得过不少勋章,其中有:威斯特法利亚王冠骑士勋位,汉诺威一级爵士十字勋章,柏林科学和艺术勋章(普鲁士国王在这方面授予的最高荣誉),瑞典北极星勋章,雄狮享利高级十字勋章,汉诺威一级十字勋章,巴伐利亚艺术和科学十字勋章等.

前面提到过,高斯于1810年获巴黎科学院拉朗德奖,1822年获哥本哈根科学院奖,1838年获伦敦皇家学会科普利奖.他还在1849年分别获得不伦瑞克和格廷根荣誉市民的称号.

1859年,高斯的子女在墓地建立了纪念碑.汉诺威国王乔治五世下令颁发金质奖章,上刻铭文"汉诺威之王乔治五世致数学之王,格奥尔基·奥古斯塔学院永恒之荣耀"(格奥尔基·奥古斯塔学院是格廷根大学的另一名称).国王于1865年4月27日访问格廷根天文台时,下令在高斯去世的房间大门上镶嵌铜匾,上刻铭文如下:

"卡尔·弗里德里希·高斯于1855年2月23日在本室——他四十年活动的场所终止了尘世生活.从这里他不朽的灵魂升上天国,为的是在永恒圣灵的光辉之下思考纯粹真理;他在这里神圣地、严肃地致力于从苍穹群星踪迹中辨释其神秘的意义.为使他活动与仙逝的场所荣耀地作为纪念,国王乔治五世于1865年4月27日访问时敕令建立此匾."



格廷根的高斯墓地



乔治五世为高斯立的铜匾

1877年,为纪念高斯诞辰一百周年,在高斯的故乡不伦瑞克现称做高斯堡的圆丘脚

下，竖立起由德国最伟大的雕塑家沙佩尔制作的壮丽纪念碑.花岗石底座上刻着如下铭文：

"满怀感激的后代，在这位崇高的思想家诞生于不伦瑞克一百周年之际，敬献此碑.这位思想家揭示了关于数量和空间的科学的最艰深的奥秘，洞察了地球和天体自然现象的规律，并使其服务于人类福祉."



不伦瑞克的高斯纪念碑

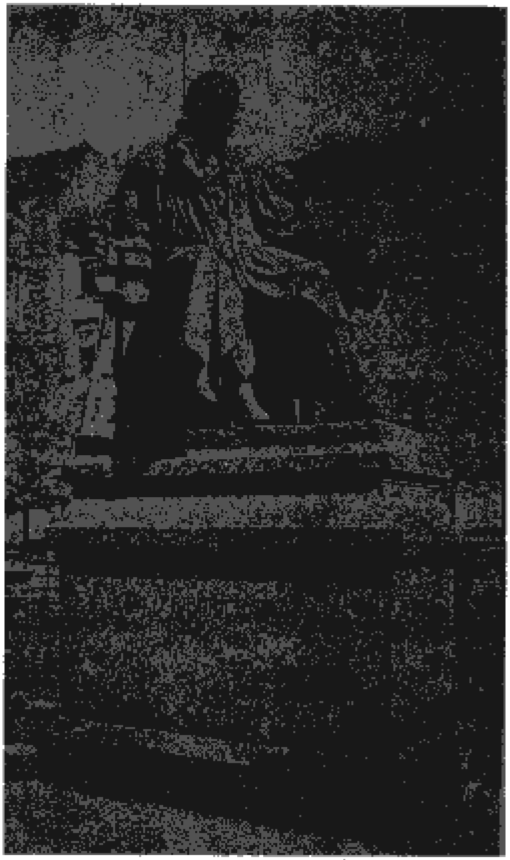
高斯诞生的房子一直作为博物馆，1944年10月15日毁于盟军空袭.幸运的是里面的东西空袭前已搬出，现连同高斯的手稿保存在不伦瑞克市图书馆.不伦瑞克有一条街道、一座桥梁和一所学校以高斯命名.不伦瑞克科学学会每年颁发一枚高斯金质奖章，以表彰该市最杰出的科学家.在高斯就读过的卡洛琳学院即现在的不伦瑞克理工大学，有高斯的油画像和胸像.1955年2月23日高斯百年忌日之际，设在不伦瑞克老市政大厅的高斯博物馆正式开馆.



维梅尔画的高斯全身像



格廷根大学的高斯与韦伯纪念碑



柏林的高斯塑像

慕尼黑的德意志博物院有一张维梅尔画的高斯全身油画像，下方有天文学教授布伦德尔写的铭文：

"他的心智刺透数、空间和自然最深的奥秘；

"他测得星体的行程，地球的形状和力量；

"他推进即将来临的世纪中数学科学的进展."

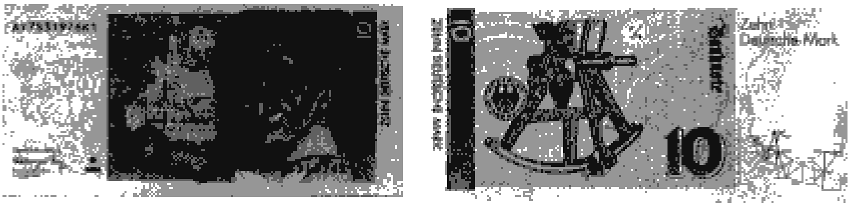
格廷根大学于1899年建立了由哈策尔制作的高斯和韦伯的纪念碑，它表现两位科学家正在讨论的情景，十分精彩.不过它也有瑕疵，就是看起来两人年龄相仿，不像差了27岁.

格廷根大学建立了高斯档案馆，收藏他的书信、手稿和图书.大学图书馆置放着由黑泽曼创作的大理石胸像.在柏林有由耶纳施创作的高斯塑像，这也是一座很出色的塑像.

1911年，在离格廷根几千米处霍亨哈根山(高斯进行大地测量时一个三角形的顶点)上，建成了壮观的高斯塔.塔高36米，顶部为红色，塔内有埃伯莱茵创作的高斯大理石胸

像，附近有一块石头，是高斯在测量中用过的，人称“高斯石”（其照片见“大地测量”这一节），常有人来此旅游瞻仰.

1955 年，当时还处在分裂状态的两个德国——德意志联邦共和国和德意志民主共和国都发行了高斯纪念邮票.德意志联邦共和国的一种 10 马克的纸币上印着高斯的头像.还有一些国家发行了高斯纪念邮票.



霍亨哈根山上的高斯塔

在高斯诞生 225 年之际，2002 年 4 月 30 日，德国数学联盟与国际数学联盟共同决定设立高斯奖，奖项包括一枚奖章和一万欧元奖金，以奖励其数学研究工作在数学以外领域（技术、商业或人们日常生活）产生巨大影响的科学家.2006 年 8 月，在马德里召开的国际数学家大会上，首次颁发了高斯奖，时年 90 高龄的日本数学家伊藤清荣获首届高斯奖，伊藤清把奖金捐赠给国际数学联盟，资助青年数学家.



高斯奖章



伊藤清

27　高斯全集

高斯的所有论著都重新刊载于 12 卷的《高斯全集》（以下简称《全集》）中，由格廷根王家科学学会出版[188].高斯去世后，其子约瑟夫同意不搬走高斯写有边注的图书.《全集》的编辑者对这些边注进行了透彻的研究，有不少发现.《全集》中收入了高斯对自己的论文所作的评论，还收入了他未发表的大量笔记、文章、有关的信件和评论，同时还有专家对他在各个领域中所做研究的全面广泛的分析.《全集》前 7 卷由谢林编辑.他于

1852 年入格廷根大学，从 1858 年至去世一直在该校讲授数学．这 7 卷按主题编排：

第一卷，《算术研究》(1863 年出版，第二版出版于 1870 年，附有评注)；

第二卷，高等算术即数论(1863 年出版，第二版出版于 1876 年，收入了未发表的《算术研究》第八篇以及增补)；

第三卷，分析学(1866 年出版，第二版有小的变动，于 1876 年出版)；

第四卷，概率论，几何学，大地测量学(1873 年出版，第二版于 1880 年出版，几乎没有变动)；

第五卷，数学物理(1867 年出版，第二版于 1877 年出版，没有变动)；

第六卷，天文学论著(1874 年出版)；

第七卷，理论天文学(1871 年出版，第二版于 1906 年出版，增加了以前未发表的高斯手稿和布伦德尔写的新评论)．

谢林去世后，克莱因继续雄心勃勃地领导《全集》的编辑工作．他组织了搜集材料的运动并征集各个领域的专家研究这些材料．从 1898 至 1922 年，他征得了 12 篇文章，以《高斯论著出版情况报告》为题发表于格廷根王家科学院的《通报》上，《数学年刊》和《数学和天文学通报》都予以全文转载．这项工作使得格廷根的高斯档案得到大大扩充，出版了一些书籍，还出版了《全集》的后 5 卷：

第八卷，关于数论、代数、数值计算、分析、几何和概率(最小二乘法)的论著，包括信件和以前未发表的材料(1900 年出版)；

第九卷，大地测量学，第四卷的增补，被忽略的已发表的有关论著，除信件外的未发表材料，包括各种笔记和手稿(1903 年出版)；

第十卷上编，纯粹数学领域的增补，包括"科学随记"(1917 年出版，下编是关于高斯生平与工作的一些论文)；

第十一卷上编，物理学、年代学、天文学领域的增补以及一些报告(1927 年出版，下编仍是关于高斯生平与工作的一些论文)；

第十二卷，杂集，包括高斯 1840 年出版的地磁图以及其他一些报告和文章(1929 年出版)．

按照计划，还要出版《全集》第十三卷，收入关于高斯的进一步的传记材料、参考文献和索引．二十多年前就曾有报导说此卷已近完成，但至 2005 年未见出版．

1973 年，希尔德斯海姆的奥尔姆斯出版社出了上述 12 卷的重印本[189]．

高斯的手稿、信件、笔记本和藏书都保存得很好．他在科学方面的未发表遗著装了满满 200 盒，藏于格廷根图书馆手稿室．有人多年来致力于整理这些材料并编纂目录．高斯的个人材料集中收藏于不伦瑞克市图书馆，其中包括高斯博物馆的收藏，那是第二次世界大战期间高斯故居被毁前从那里运过来的．高斯的个人藏书成为格廷根大学图书馆的一个特别收藏．他的科学藏书放在格廷根天文台图书馆中．高斯的少量手稿、信件和备忘录散放在世界各地的大学、天文台和私人收藏中．

让我们以克莱因一段生动优美的话语结束关于数学王者、科学巨人高斯一生粗略的描述：

“高斯划分了历史时代:他结束过去,他是过去的最高展示;同时他又开辟崭新的未来,以比那时人们或许鲜明意识到的更彻底、更强烈的最后剩下的光芒深入其基础之中.请允许我用一个比喻:对于我来说,高斯犹如我们巴伐利亚群山全景图中从北方看过来的祖格峰.群峰从东方蜿蜒上升,在巨大的科洛苏斯达到顶点,然后陡峭而下,到达新的低谷,而其山坡则向远方伸展,水流由此喷涌而出,产生新的生命.”[190]

文中相关的文献

[1] GOETHE,J.W.VON.浮士德.钱春绮译.上海:上海译文出版社,1989:110.

[2] 参阅上述译本,也可参阅:浮士德.第二部.郭沫若,译.北京:人民文学出版社,1978:10-24.

[3] S.P.Koppel.德国近现代史.北京:商务印书馆,1987.

[4] 同上.

[5] 歌德谈话录.北京:人民文学出版社,1982:212-214.

[6] Borch,R.,Ahnentafel des Mathematikers C.F.Gauss,Ahnentafeln bermter Deutscher,Leipzig,1929,Lieferung 1.

[7] 转引自 G.W.Dunnington,Carl Friedrich Gauss Titan of Science,New York:Exposition Press, 1955:10.

[8] 同上.

[9] 同(7),9.

[10] Sartorius von Waltershausen,W.,Gausszum Gedchtniss,Leipzig:S.Hirzel,1856.(英译本:Gauss,A Memorial,Colorado:Colorado Springs,1966.)

[11] Sartorius von Waltershausen,W.,C.F.Gauss,Gottinger Professoren,205-229,Gotha:F.A.Perthes 1872.

[12] 转引自 G.F.Simmons,Calculus Gems,New York:McGraw - Hill,1992.

[13] Gauss,C.F.,Werke,vol.2,444-447.

[14] Peters,C.A.F. ed., Briefwechsel zwischen C.F.Gauss und H.C.Schumacher,vol.5,no.1030,Altona:Gustav Esch.

[15] 同(7),24.

[16] 同(7),27.

[17] 同(7),30-31.

[18] Allgemeine Literaturzeitung.Inttelligenzblatt,no.66;Werke,vol.10,pt.1,3.

[19] 同(7),27-28.

[20] 转引自 E.T.Bell,Men of Mathematics,New York:Simon & Schuster,1937,255.

[21] Schaefer,C.,ed.,Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling,Berlin:Otto Elster,111;Werke,vol.10,pt.1,121-126.

[22] Klein, F.,Gauss' Wissenschaftliches Tagebuch 1796 - 1814,Festschrift zur Feier

特稿

des Hundertfünfzigfährigen Besttehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Berlin, 1901): 1-44.

[23] Gauss, C. F., Werke, vol. 10, pt. 1: 485-574.

[24] Gauss, C. F., Mathematisches Tagebuch 1796 ~ 1814, E. Schumann, Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 256, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1976.

[25] Gauss, C. F., Mathematisches Tagebuch 1796 ~ 1814, Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 256, Verlag Harri Deutsch, 2005.

[26] Ball, R. S., A Short Story of the History of Mathematics, London Macmillan, 1888: 451-452.

[27] M.克莱因.古今数学思想(第三册).上海:上海科学技术出版社,1980:218.

[28] Schmidt, F. & Staeckel, P., Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und Wofgang Bolyai, Leipzig: B. G. Teubner, 1899: 29.

[29] 同(12).

[30] Gauss, C. F., Berechnung des Osterfestes, Monatliche Correspoondenz zur Befoerderung der Erd - und Himmelskunde 2(1800), 121-130; Werke, vol. 6, 73-79.

[31] 同(28), 5.

[32] Gauss, C. F., Demonstratio nova Theorematis, Omnem Functionen Algebraicam Rationalem Integram Unius Variabilis in Factores Reales Primi vel Secundi Gradus Resolvi Posse; Werke, vol. 3: 1-30.

[33] 同(28), 18.

[34] Ostrowski, A., Zum ersten und vierten Gausschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebrta, Nachrichte von der Koeniglichen Gesllschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Mathematisch - Physikalische Klasse, 1920, Beiheft: 50-58.

[35] Gauss, C. F., Demonstratio nova Altera Theorematis Omnem Functionen Algebraicam Rationalem Integram Unius Variabilis in Factores Reales Primi vel Secundi Gradus Resolvi Posse, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 3(1816): Cl. math. 107-134; Werke, vol. 3: 31-56.

[36] Gauss, C. F., Theorematis de Resolubilitate Functionum Algebraicarum Integrarum in Factores Reales Demonstratio Tertia, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 3(1816): 135-142; Werke, vol. 3: 57-64.

[37] Gauss, C. F., Disquisitiones Arithmeticae, Leipzig: Fleischer, 1801; Werke, vol. 1.

[38] Gauss, C. F., Theorematis Arithmetici Demonstratio Nova, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis 16(1808); Werke, vol. 2: 1-8.

[39] Gauss, C. F., Summatio Quarundam Serierum Singularium, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 1(1811): Cl. math., 1-40; Werke, vol. 2: 9-45.

[40] Gauss, C. F., Theorematis Fundamentalis in Doctrina de Residuis Quadraticis Demonstrationes et Ampliationes Novae, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 4(1820): Cl. math., 3-20; Werke, vol. 2: 47-64.

[41] Gauss, C. F., Werke, vol. 2: 233.

[42] Gauss, C. F., Werke, vol. 2: 234.

[43] Gauss, C. F., Werke, vol. 2: 159-160.

[44] http://www.rzuser.uni - heidelberg.dl/ ~ hb3/fchrono.html.

[45] Wantzel, L., Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problme de gomtrie peut se rsoudre avec rgle et le compas, Journal de Mathmatiques 2(1837): 366-372.

[46] 这是西方人对难解之书喜用的词，近于中国人所谓的"天书"．典出《圣经·启示录》第五章第一节："我看见坐宝座的右手中有书卷，里外都写着字，用七印封严了．"歌德的《浮士德》第一部第一场中就有"那些过去的时代，对我们是七印封严的书卷"之诗句．

[47] 同(20), 236.

[48] Zach F. X. G. von, Fortgesetzte Nachrichten ueber den laengst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnensystems, Monatliche Correspoondenz zur Befoerderung der Erd-und Himmelskunde 4(Dec. 1801), 638-649.

[49] 拜伦诗选．上海：上海译文出版社，1982: 3-4.

[50] 同(7), 58.

[51] 同(7), 60.

[52] 同(14), vol. 4, 762.

[53] 同(7), 55.

[54] 同(7), 44.

[55] 同(20), 242.

[56] 同(28), 23.

[57] 同(28), 25.

[58] Haenselmann, Eine Erinnerung an C. F. Gauss Braunschweigische Anzeigen no. 278(28 Nov.): 3367-3368; 英译文见(7), 63-64.

[59] 同(28), no. 27; Werke, vol. 8: 160-162.

[60] Tolstoy, L., 战争与和平．北京：人民文学出版社，1990: 437.

[61] 同(28), 30.

[62] Schilling, C. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss, Hildesheim & New York, 1976: 224.

[63] 同(7), 94-95.

[64] 同(7), 101-102.

[65] Gauss, C. F., Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium, Humburg: F. Perthes & I. H. Besser, 1809; Werke, vol. 7, 1-280.

特稿

[66] Gauss, C. F., Summarische Uebersicht nder zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden, Monatliche Correspoondenz zur Befoerderung der Erd – und Himmelskunde 20(Sep. 1809): 197-224; Werke, vol. 6: 148-165.

[67] Gauss, C. F., Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 5(1823): Cl. math.: 33-62; Werke, vol. 4: 1-26.

[68] Gauss, C. F., Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Posterior, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 5(1823): Cl. math.: 63-90; Werke, vol. 4: 27-53.

[69] Gauss, C. F., Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis 6, 57-98(1828); Werke vol. 4: 55-93.

[70] 同(7), 252.

[71] 同(7), 345.

[72] Gauss, C. F., Summatio Quarundum serierum Singularium, 同(39).

[73] 主要有下列和式:设 p 是素数(高斯原文中用 n),以 a 表示0到 $p-1$ 之间所有可能的模 p 二次剩余,b 表示0到 $p-1$ 之间所有可能的二次非剩余,以 ω 表示 $2\pi/p$,以 k 表示任何不能整除 p 的自然数,则

当 p 形如 $4m+1$ 时,有

$$\sum \cos ak\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \cos bk\omega = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

因之有

$$\sum \cos ak\omega = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \cos ak\omega = 0$$

$$\sum \cos bk\omega = 0$$

当 p 形如 $4m+3$ 时,有

$$\sum \cos ak\omega = -\frac{1}{2}$$

$$\sum \cos bk\omega = -\frac{1}{2}$$

$$\sum \sin ak\omega = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \sin bk\omega = \mp \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\sum \sin ak\omega - \sum \sin bk\omega = \pm \sqrt{p}$$

[74] 同(62),no.321;Werke,vol.10:75-76.

[75] Gauss,C.F.,Theoria Residuorum Biquadraticorum,Commentatio Prima, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 6(1828):27-56; Werke,vol.2:65-92.

[76] Gauss,C.F.,Theoria Residuorum Biquadraticorum,Commentationes Secunda, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 7(1832):Cl.math., 89-148;Werke,vol.2:93-148.

[77] Gauss,C.F.,Disquisitiones generales circa seriem infinitam Pars prior, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis 2(1813);Werke,vol.3:123-162.

[78] 同(14),vol.6,no.1307;Werke,vol.10:434-436.

[79] Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel,Leipzig:Wilhelm Engelmann,1880,no. 60;Werke,vol.8:90-92.

[80] Picard,C..,Sur le dveloppement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences,Pavis,1905.

[81] Gauss,C.F.,Theoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum Ellipticorum Homogeneorum Methodo Nova Tractata,Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 2(1813);Werke,vol.5:1-22.

[82] Gauss,C.F.,Allgemeine Aufloesung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Flaeche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen aehnlich wird, AstronomischeAbhandlungen,no.3(1825):1-30;Werke,vol.4:189-216.

[83] Gauss,C.F.,Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Goettingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector,Goettingen: Vandenhoeck & Ruprecht,1828;Werke,vol.9:1-58.

[84] Gauss,C.F.,Untersuchungen ueber Gegenstaende der hoeheren Geodaesie,Erste Abhandlung,Abhandlungen der Koeniglichen Geselschaft der Wissenschaften zu Goettingen 2(1845):3-45;Werke,vol.4:259-300.

[85] Gauss,C.F.,Untersuchungen ueber Gegenstaende der hoeheren Geodaesie,Zweite Abhandlung,Abhandlungen der Koeniglichen Geselschaft der Wissenschaften zu Goettingen(von den Jahre 1845 ~ 1847)3:3-43;Werke,vol.4:301-340.

[86] 同(7),120-121.

[87] Gauss,C.F.,Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas,Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 6(1828),Cl.math.,99-146;Werke, vol.4:217-258.

[88] 即

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

其中

$$L=\begin{vmatrix}x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix},M=\begin{vmatrix}x_{uv} & y_{uv} & z_{uv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix},M=\begin{vmatrix}x_{vv} & y_{vv} & z_{vv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

这就是现称的第二基本型的系数.

[89] 即

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ -\frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right)$$

[90] Gauss, C. F., Werke, vol. 12, 6-9.

[91] 同(7), 350.

[92] 陈省身. 微分几何的过去与未来 // 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 1983: 1.

[93] 同(14), 1118; Werke, vol. 8: 238-239.

[94] 同(21), 360; Werke, vol. 8: 266.

[95] 同(28), 27; Werke, vol. 8: 160-162.

[96] Gauss, C. F., Werke, vol. 8: 166.

[97] Gauss, C. F., Review of J. C. Schwab's Commentatio in Primum Elementorum Euclidis Librum …Berlin and Mettemich's Vollstaendige Theorie der Parallellinien 1815, Goettingen Gelehrte Anzeigen, no. 63(1816): 617-622; Werke, vol. 8: 170-174.

[98] 同(62), 332; Werke, vol. 8: 177.

[99] 同(79), 166; Werke, vol. 8: 201.

[100] 同(7), 349-350.

[101] Gauss, C. F., Werke, vol. 8: 186-188.

[102] 同(28), 35; Werke, vol. 8: 220.

[103] 同(14), vol. 5, 1118; Werke, vol. 8: 238-239.

[104] 同(62), 549.

[105] Gauss, C. F., Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Journal fuer die reine und angewandte Mathematik 4(1829), 232-235; Werke, vol. 5: 23-28.

[106] 具体地说, 设质点系 $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ 在理想的一阶约束或完整约束以及主动力 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 作用下从某一时刻和某一可能状态出发, 则对于符合约束的各种可能的加速度 $\{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \cdots, \ddot{r}_n\}$ 可建立约束函数

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\ddot{r}_i-F_i/m_i)^2$$

以 δ_G 记符合约束的可能加速度变分, 则质点系真实运动满足

$$\delta_G Z = \sum_{i=1}^{n}(m\ddot{r}_i - F_i)\cdot\delta\ddot{\sigma}_i = 0$$

[107] Gauss, C. F., Principia Generalia Theoriae Figurae Fluidorum in Statu Aequilibrii, Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 7(1832), Cl. math., 39-88; Werke, vol. 5: 29-77.

[108] 同(21), 200.

[109] 参阅(7), 139-141.

[110] Gauss, C. F., Die Intensitaet der erdmagnetischen Kraft zur ueckgefuehrt auf absolutes Maass, Annalen der Physik und Chemie 28(1833), no. 6, 241-273 & no. 8, 591-615; 其拉丁文本发表于 Commentationes Societatis Regiae Scientiarun Gottingensis Recentiores 8(1841), 3-44; Werke, vol. 5: 79-118.

[111] 同(62), 678.

[112] Gauss, C. F., Announcement concerning the establishment of the magnetic observatory at Goettingen, Goettingen gelehrte Anzeigen, no. 128(9 Aug, 1834), 1265-1274; Werke, vol. 5: 519-525.

特稿

[113] 同(14), vol. 2, 487; Werke, vol. 11: 100-101.

[114] Gauss, C. F., Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838: 1-57 & tables; Werke, vol. 5: 119-193.

[115] 高斯提出，磁势 W 应满足拉普拉斯方程，其解可表为 $W = a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}(g_{ni}^{m}\cos m\lambda + h_{ni}^{m}\sin m\lambda) + \left(\frac{r}{a}\right)^{n}(g_{ne}^{m}\cos m\lambda + h_{ne}^{m}\sin m\lambda)\right)P_n^m(\cos\theta)$，其中 r 是径向距离，a 是地球半径，λ 是经度，θ 是余纬；$P_n^0(\cos\theta) = P_0(\cos\theta)$，对 $m \geqslant 1$

$$P_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}\sin^m\theta\,\frac{\mathrm{d}^m P_n(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta)^m}$$

$P_n(\cos\theta)$ 是勒让德函数. g_{ni}^{m}, h_{ni}^{m} 称为内源场高斯系数, g_{ne}^{m}, h_{ne}^{m} 称为外源场高斯系数.

由磁势与磁场的关系可以得到地磁场北向强度 X，东向强度 Y 和垂直强度 Z 的表达式. 取 $r = a$，即可得到地面磁场强度的表达式. 由球面调和函数的正交性可得到

$$ng_{ne}^{m} - (n+1)g_{ni}^{m} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} ZP_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda$$

$$nh_{ne}^{m} - (n+1)h_{ni}^{m} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} ZP_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda$$

由地磁场的北向强度和东向强度可得到类似的公式. 这样，由地面磁场强度的实测值通过上述公式就能求出各阶高斯系数.

[116] Gauss, C. F. & Weber, W. Atlas des Erdmagnetismus, nach den Elementen der theorie entworfen, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins. Supplement. Leipzig: Weidmann, 1840; Werke, vol. 12: 335-408.

[117] Gauss, C. F. Allgemine Lehrsaetze in Beziehung auf die im verkehrten Verhaeltnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs – undAbstossungs – Kraefte, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1839: 1-51; Werke, vol. 5: 195-242.

[118] 转引自 W. L. Schaaf, Carl Friedrich Gauss Prince of Mathematics, New York: Franklin Watts, 1964: 126-127.

[119] Gauss, C. F., Dioptrische Untersuchungen, Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen (von der Jahren 1838 ~ 1841), Abh. der Math. Cl.: 1-34; Werke, vol. 5: 243-276.

[120] Gauss, C. F., Ueber die achromatischen Doppelobjective besonders in Ruecktiebt der vollkommenern Aufhebung der Farbenzerstreuung, Zeitschrift fuer Astronomie und verwandte Wissenschaften 4: 30(Dec. 1817), 345-351; Werke, vol. 5: 504-508.

[121] 同(62), 44; Werke, vol. 7: 378.

[122] 同(99), 42.

[123] 同(99), 46.

[124] 同(14), vol. 1: 4.

[125] 同(7), 257-258.

[126] 同(7), 260-261.

[127] 同(62), 700.

[128] Goethe, J. W. von, 《浮士德》, 钱春绮译, 上海译文出版社, 1989, 110.

[129] 同(7), 301.

[130] 同(7), 305.

[131]《莎士比亚全集》, 人民文学出版社, 1978, 第 9 卷, 160.

[132] 同(7), 245

[133] 同(14), vol. 6: 1253.

[134] 同(7), 298.

[135] 同(14), 944.

[136] Gauss, C. F., Beitrage zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen 4(1850); Werke, vol. 3: 71-102.

[137] 同(7), 277.

[138] Courant, R., Gauss and the Present Situation of the Exact Sciences, 载于 The Spirit and the Uses of the Mathematical Sciences, 1969.

[139] 同(14), vol. 3: 641.

[140] 同(28), no. 18; Werke, vol. 8: 159-160.

[141] Biermann, K.-R., Briefwechsel zwischen Allexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss, Berlin: Akademie-Verlag, 1977: 39.

[142] 同(7),308.

[143] 吴文俊.世界著名数学家传记.北京:科学出版社,1995:1027.

[144] 吴文俊.世界著名数学家传记.北京:科学出版社,1995:1052-1053.

[145] 同上,1060.

[146] 同(7),68.

[147] 同(7),69.

[148] 同(20),262.

[149] 同(62),183;Werke,vol.10:74-75.

[150] Ore,O.,Niels Henrik Abel:Mathematician Extraordinary, New York:Chelsea, 1957:91.

[151] 同上,217.

[152] 同(79),158.

[153] 同(150),215.

[154] 同(14),vol.2:364.

[155] 同(14),vol.2:312.

[156] Itard,J.,Legendre, 载于 Dictionary of Scientific Biography,New York:Charles Scribner's Sons,1972,vol.6:137.

[157] May,K.O.,Gauss, 载于 Dictionary of Scientific Biography,New York:Charles Scribner's Sons,1972,vol.5:304.

[158] 同(7),252.

[159] 同(7),276-277.

[160] 同(7),142.

[161] 同(7),77.

[162] Peters,C.A.F. ed.,Briefwechsel zwischen C.F.Gauss und H.C.Schumacher, Altona:Gustav Esch. vol.1,1860,vol.2,1860,vol.3,1861,vol.4,1862,vol.5,1863,vol.6, 1865.

[163] 同(157),308.

[164] A Dictionary of Quotations in Mathematics,North Carolina & London:McFarland, 2002,117-118.

[165] 同(14),vol.2:264.

[166] 同(14),vol.2:265.

[167] 同(7),215.

[168] 同(14),vol.2:293;Werke,vol.9:471.

[169] 同(14),vol.6:1274;Werke,vol.10:433.

[170] Gauss,C.F.,Werke,vol.5:25-26.

[171] 同(12).

[172] Kronecker,L. Vorlesungen,vol.2:42.

[173] 同(79),59.

[174] Smith, H. J. S., Presidential Address, Proceedings of the London Math. Soc., Ⅷ, 18.

[175] Kummer, E. E., Rektoratsrede, Berlin Univ., August 3, 1869:8-9.

[176] 同(14), vol. 1, no. 2; Werke, vol. 10:243-245.

[177] 转引自 J. R. Newman, ed., The World of Mathematics, New York: Simon & Schuster, 1956.

[178] 同(62), no. 133; Werke, vol. 10:24-25.

[179] 同(157),300.

[180] 同(79),176; Werke, vol. 8:146-147.

[181] 同(79),120; Werke, vol. 11:323-326.

[182] 同(7),212.

[183] 同(14), vol. 4, 735.

[184] 同(14), vol. 4:760; Werke, vol. 8:293-294.

[185] 同(21),109; Werke, vol. 8:179.

[186] 同(28),18; Werke, vol. 8:159-160.

[187] 同(28),35; Werke, vol. 8:220.

[188] Gauss, C. F., Werke, Königliche Gesrllschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig - Berlin, 1863-1933.

[189] Gauss, C. F., Werke, 1-12, Hildesheim: G. Olms.

[190] Klein, F., Vorlesungen ber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert, Berlin: Springer, 1926:26.

人名索引

阿贝尔(Abel, Niels Henrik; 1802—1829)　挪威数学家

阿达玛(Hadamard, Jacques; 1865—1963)　法国数学家

阿尔布雷希特(Albrecht, Wwilhelm Eduard; 1800—1876)　格廷根大学法学教授,"格廷根七君子"之一

阿尔冈(Argand, Jean Robert; 1768—1822)　瑞士数学家

阿基米得(Archimedes; 公元前 287— 公元前 212)　古希腊数学家、物理学家

阿那克利翁(Anacreon; 公元前 570?— 公元前 480?)　古希腊诗人

埃伯莱茵(Eberlein, Gustav; 1847—1926)　德国雕塑家

埃克曼(Eckermann, Johann Peter; 1792—1854)　德国作家

埃森贝克(Esenbeck, Nees von; 1776—1858)　德国哲学家

埃森伯格(Eschenburg, Arnold Wilhelm; 1778—1861)　高斯之友、大学同学

埃瓦尔德(Ewald, G. eorg Heinrich August von; 1803—1875)　格廷根大学东方语文学

教授,高斯的女婿,"格廷根七君子"之一

艾赫霍恩(Eichhorn,Johann Albreht Friedrich;1779—1856)　高斯的大学同学,后任普鲁士宗教大臣

艾森斯坦(Eisenstein,Ferdinand Gotthold Max;1823—1852)　德国数学家

奥尔伯斯(Olbers,Heinrich Wilhelm Matthias;1758—1840)　德国医学家、天文学家

奥古斯特(August,Ernst;1771—1851)　汉诺威国王

奥里阿尼(Oriani,Barnabus;1752—1832)　意大利天文学家

奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,Alexander;1893—1986)　波兰数学家

奥斯特洛格拉茨基(Ostrogradsky,Mihail Vasilievich;1801—1862)　俄国数学家、力学家

奥维德(Ovid;公元前43—公元17)　古罗马诗人

巴赫(Bach,Johann Sebastian;1685—1750)　德国作曲家

巴特尔斯(Bartels,Johann Christian Martin;1769—1836)　高斯少年时的辅导老师和朋友

柏拉图(Plato;公元前427—347)　古希腊哲学家

拜伦(Byron,George Gordon;1788—1824)　英国诗人

鲍尔(Ball,Walter William Rouse;1850—1925)　英国数学家

贝多芬(Beethoven,Ludwig van;1770—1827)　德国作曲家

本岑贝格(Benzenberg,Johann Friedrich;1777—1846)　高斯在卡洛琳学院的同学

比尔曼(Biermann,Kurt - R.)　德国当代数学(史)家

比特纳(Büttner,J.G.)　高斯的小学老师

波得(Bode,Johhan Elert;1747—1826)　德国天文学家

波尔约,J.(Bolyai,Jonos;1802—1860)　匈牙利数学家

波尔约,W.(Bolyai,Wolfgang(Farkas);1775—1856)　匈牙利数学家

伯格(Bürg,Johann Tobias;1766—1835)　奥地利天文学家

勃拉姆斯(Brahms,Johannes;1833—1897)　德国作曲家

布尔克哈特(Burckhardt,Johann Karl;1773—1825)　法国天文学家

布兰德斯(Brandes,Heinrich Wilhelm;1777—1834)　高斯在格廷根大学的同学,莱比锡大学数学教授

布吕歇尔(Blucher,Gebhard Leberecht von;1742—1819)　普鲁士将军

布伦德尔(Brendel,Otto Rudolf Martin;1862—1939)　德国天文学家

察赫(Zach,Franz Xavier G.von;1754—1832)　德国天文学家

陈省身(Chern,Shiing - Shen;1911—2004)　美籍华裔数学家

达赫尔曼(Dahlmann,Friedrich Christoph;1785—1860)　格廷根大学历史学、政治学教授,"格廷根七君子"之一

达朗贝尔(Alembert,Jean le Rond d';1717—1783)　法国物理学家、数学家

达武(Davout,Louis - Nicolas;1770—1823)　法国将军

戴德金(Dedekind, Richard; 1831—1916)　德国数学家

丹尼尔·伯努利(Bernoulli, Daniel; 1700—1782)　瑞士医学家、数学家、物理学家

但丁(Dante; 1265—1321)　意大利诗人,文艺复兴运动先驱

德朗布尔(Delambre, Jean - Baptiste Josephl; 1749—1822)　法国天文学家、测地学家

狄德罗(Diderot, Denis; 1713—1784)　法国哲学家、文学家

狄利克雷(Dirichlet, Gustav Peter Lejeune; 1805—1859)　德国数学家

笛卡尔(Descartes, René; 1596—1650)　法国哲学家、数学家、物理学家

棣莫弗(Moivre, Abraham de; 1667—1754)　法国 - 英国数学家

多萝特娅·本察·高斯(Gauss, Dorothea Benze; 1743—1839)　高斯之母

厄金格尔(Erchinger, Johannes)　德国数学家

恩克(Encke, Johann Franz; 1791—1865)　德国天文学家、高斯的学生

法拉第(Faraday, Michael; 1791—1867)　英国化学家、物理学家

腓特烈二世(Frederick Ⅱ; 1194—1250)　神圣罗马帝国皇帝

费迪南德公爵(Ferdinand, Carl Wilhelm; 1735—1806)　不伦瑞克统治者,高斯的资助人

费马(Fermat, Pierre de; 1601—1665)　法国数学家

冯阿恩斯瓦尔德(Arnswaldt, Baron Karl Friedrich Alexander von; 1768—1845)　1816至1838年格廷根大学董事长

冯达尔贝格(Dalberg, Karl Theodor Anton Maria von; 1744—1817)　法兰克福大公爵

冯富斯(Fuss, Nikolaus von; 1755—1826)　俄国国务大臣

弗里斯(Fries, Jacob Friedrich; 1773—1843)　德国哲学家

弗罗贝尼乌斯(Frobenius, Georg Ferdinand; 1849—1917)　德国数学家

伏尔泰(Voltaire; 1694—1778)　法国思想家、作家、哲学家

伽勒(Galle, Johann Gottfred; 1812—1910)　德国天文学家

伽罗瓦(Galois, Evariste; 1811—1832)　法国数学家

戈尔德施密特(Goldschmidt, C. W. B.; 1807—1851)　德国天文学家

歌德(Goethe, Johann Wolfgang von; 1749—1832)　德国诗人、作家、自然科学家

格布哈德·迪特里希·高斯(Gauss, Gebhard Dietrich; 1744—1808)　高斯之父

格非努斯(Gervinus, G. eorg G. ottfried; 1805—1871)　格廷根大学历史学、文学教授,“格廷根七君子”之一

格林(Gerling, Christian Ludwig; 1788—1864)　德国物理学家、天文学家,高斯的学生和挚友

格林(Green, George; 1793—1841)　英国数学家、自然哲学家

格林兄弟(Grimm, J. L. C. (1785 - 1863) & Grimm, W. C. (1786—1859))　德国民间文学家、语言学家,《格林童话》的作者,“格廷根七君子”之二

格申(Göschen, J. F. L.; 1778—1837)　格廷根大学法学教授

哈策尔(Hartzer, Ferdinand; 1838—1906)　德国雕塑家

哈定(Harding,Carl Ludwig;1765—1834)　德国天文学家

哈密顿(Hamilton,William Rowan;1805—1865)　英国数学家、物理学家

海涅(Heyne,Christian Gottlob;1729—1812)　德国古典文学家

汉布格(Hamburger,M.)　德国数学家

贺拉斯(Horace;公元前65—公元前8)　古罗马诗人

黑格尔(Hegel,Georg Wilhelm Friedrich;1770—1831)　德国哲学家

黑泽曼(Hesemann,Christian Heinrich;1815—1856)　德国雕塑家

洪堡(Humboldt,Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander von;1767—1835)　德国自然科学家

华罗庚(1910—1985)　中国数学家

怀尔斯(Wiles,Andrew;1953—)　英国数学家

基尔霍夫(Kirchhoff,Gustav Robert;1824—1887)　德国物理学家

吉本(Gibbon,Edward;1737—1794)　英国历史学家

吉拉德(Girard,Albert;1595—1632)　法国数学家

卡尔·弗里德里希·高斯(Gauss,Carl Friedrich;1777—1855)　德国数学家、物理学家

卡尔达诺(Cardano, G.irolamo;1501—1576)　意大利医学家、数学家、物理学家、哲学家

卡斯滕纳(Kästner,Abraham Gotthelf;1719—1800)　德国数学家

开普勒(Kepler,Johannes;1571—1630)　德国数学家、物理学家

恺撒(Caesar,Julius;公元前100—公元前44)　古罗马统帅、政治家

康德(Kant,Immanuel;1724—1804)　德国哲学家

康托尔,M.(Cantor,Moritz Benedikt;1829—1920)　德国数学(史)家

柯朗(Courant,Richard;1888—1972)　德国数学家

柯西(Cauchy,Augustin - Louis;1789—1857)　法国数学家、物理学家

克莱罗(Clairaut,Alexis - Claude;1713—1765)　法国数学家、物理学家

克莱因(Klein,Christian Felix;1849—1925)　德国数学家

克雷尔(Crelle,August Leopold;1780—1855)　德国数学家、土木工程师

克吕格尔(Klügel,Georg Simon;1739—1812)　德国数学家、物理学家

克罗内克(Kronecker,Leopold;1823—1891)　德国数学家

库默尔(Kummer,Ernst Eduard;1810—1893)　德国数学家

拉格朗日(Lagrange,Joseph Louis;1736—1813)　法国物理学家、数学家、天文学家

拉朗德(Lalande,Joseph - Jérôme Lefrançais de;1732—1807)　法国天文学家

拉普拉斯(Laplace,Pierre - Simon,Marquis de;1749—1827)　法国天体力学家、数学家、物理学家

莱布尼茨(Leibniz,Gottfried Wilhelm;1646—1716)　德国数学家、哲学家

莱辛(Lessing,Gotthold Ephraim;1729—1781)　德国文艺理论家、剧作家

兰伯特(Lambert,Johhan Heinrich;1728—1777)　法国数学家、物理学家、天文学家、哲学家

兰道(Landau,Edmund;1877—1938)　德国数学家

勒让德(Legendre,Adrien - Marie;1752—1833)　法国数学家

勒萨日(Lesage,Alain René;1668—1747)　法国作家

勒威耶(Le Verrier,Urbain Jean Joseph;1811—1877)　法国天文学家、天体力学家、气象学家

雷普瑟尔德(Repsold,Johann Georg;1771—1830)　德国光学仪器制造商

黎曼(Riemann,Georg Friedrich Bernhard;1826—1866)　德国数学家

李斯特(Liszt,Franz;1811—1886)　匈牙利钢琴家、作曲家

李维(Livius, Titus;公元前 59— 公元 17)　古罗马历史学家

里赫特(Richter,Jean Paul Friedrich;1763—1825)　德国作家

里斯(Riesz,Marcel;1886—1969)　匈牙利数学家

理查逊(Richardson,Samuel;1689—1761)　英国作家

利赫滕贝格(Lichtenberg, Georg Christoph;1744—1799)　德国物理学家

利斯廷(Listing,Johann Benedict;1808—1882)　德国数学家

林德瑙(Lindenau,Bernhard August von;1799—1854)　德国天文学家

刘维尔(Liouville, Joseph;1809—1882)　法国数学家

卢奇安(Lucian;120—180)　古希腊作家

卢梭(Rousseau,Jean - Jacques;1712—1778)　法国思想家、文学家

鲁道尔夫·奥古斯特(Rudolf　August;1627—1740)　不伦瑞克 - 沃尔芬比特尔公爵

罗巴切夫斯基(Lobachevskii,Nikolai Ivanovich;1792—1856)　俄国数学家

罗德里格(Rodrigues,Olinde;1749—1851)　法国数学家

罗思(Roth,Peter;卒于 1617 年)　德国数学家

洛克(Locke,John;1632—1704)　英国哲学家

马克思(Marx,Karl;1818—1883)　德国思想家、革命家

马勒伯朗士(Malebranche,Nicolas de;1638—1715)　法国哲学家

麦考利(Macaulay,Thomas Babington;1800—1859)　英国历史学家

曼(May,Kenneth O.;1915—1977)　加拿大数学(史)家

梅塔斯塔齐奥(Metastasio,Pietro;1698—1782)　意大利诗人、剧作家

梅耶(Mayer,Johann Tobias;1723—1762)　德国地图学家、天文学家

梅耶霍夫(Meyerhoff,Johann Heinrich;1770—1812)　德国语文学家

蒙日(Monge,Gaspard;1746—1818)　法国数学家、机械理论家

米拉波(Mirabeau,Comte de;1749—1791)　法国革命家、演说家

米勒(Miller, William Hallows;1808—1880)　英国晶体学家、矿物学家

明娜(Gauss,(Minna)Wilhelmine;1808—1840)　高斯之女

明娜·瓦尔德克(Gauss,Minna Waldeck;1788—1831)　高斯的第二任妻子

莫扎特(Mozart, Wolfgang Amadeus; 1756—1791)　奥地利作曲家

拿破仑(Napoleon; 1769—1821)　法兰西第一帝国皇帝

牛顿(Newton, Issac; 1642—1727)　英国数学家、物理学家

诺伊曼(Neumann, Franz Ernst; 1798—1895)　德国矿物学家、物理学家、数学家

诺伊曼(Neumann, Olaf)　德国当代数学(史)家

欧根(Gauss, Peter Samuel Marius Eugenius; 1811—1896)　高斯之子

欧拉(Euler, Leonhard; 1707—1783)　瑞士数学家、物理学家、天文学家

欧里庇得斯(Euripides; 公元前 485— 公元前 406)　古希腊悲剧作家

帕格尼尼(Paganini, Nicolo; 1782—1840)　意大利小提琴家、作曲家

帕斯卡(Pascal, Blaise; 1623—1662)　法国数学家、物理学家、哲学家

培根(Bacon, Francis; 1561—1626)　英国哲学家

佩特斯(Peters, Christian August Friedrich; 1806—1880)　高斯与舒马赫通信集的编者

皮卡(Picard, Charles émile; 1856—1941)　法国数学家

皮瑟(Puiseau, Victor; 1820—1883)　法国数学家、物理学家

皮亚齐(Piazzi, Joseph; 1746—1826)　意大利天文学家

蒲丰(Buffon, Georges Louis Leclerc; 1707—1788)　法国博物学家

普法夫(Pfaff, Johann Friedrich; 1765—1825)　德国数学家

普兰纳(Plana, Giovanni; 1781—1864)　意大利数学家、天文学家

齐默尔曼(Zimmermann, Eberhard August Wilhelm; 1743—1815)　卡洛琳学院数学、物理学、自然史教授

热尔曼(Germain, Sophie; 1776—1831)　法国数学家

萨凯里(Saccheri, Gerolamo; 1667—1733)　意大利数学家

萨托里乌斯(Sartorius von Waltershausen, Wolfgang; 1809—1876)　德国地质学家

塞费(Seyffer, Carl Felix; 1762—1822)　格廷根大学天文学教授

色诺芬(Xenophon; 公元前 431— 公元前 355?)　古希腊历史学家、将领

沙佩尔(Schaper, Fritz; 1841—1919)　德国雕塑家

莎士比亚(Shakespeare, William; 1564—1616)　英国剧作家、诗人

施莱辛格(Schlesinger, L.)　德国数学家

施韦卡尔特(Schweikart, F.C.; 1780—1859)　德国法学家、数学家

史密斯(Smith, Henry John Stephen; 1826—1883)　英国数学家

司各特(Scott, Sir Walter; 1771—1832)　英国作家、诗人

斯蒂尔切斯(Stieltjes, Thomas Jan; 1856—1894)　荷兰数学家

斯陶特(Staudt, Karl Georg Christian von; 1798—1867)　德国数学家

塔西佗(Tacitus; 55?—120?)　古罗马历史学家

陶里努斯(Taurinus, Franz Adolph; 1794—1874)　德国法学家、数学家

特蕾丝(Gauss, Henritte Wilhelmine Caroline Therese; 1816—1864)　高斯之女

特稿

提丢斯(Titus, Johann Daniel; 1729—1796)　德国天文学家、物理学家、生物学家

托尔斯泰(Tolstoy, Lev; 1828—1910)　俄国作家、思想家

瓦格纳(Wagner, Richard; 1813—1883)　德国作曲家

瓦格纳(Wagner, Rudolf; 1805—1864)　德国生理学家、动物学家

瓦莱-布桑(Vallee-Poussin, Charles Jean de la; 1866—1962)　法国数学家

旺策尔(Wantzel, Pierre L.; 1814—1848)　德国数学家

威尔克斯(Wilkes, Charles; 1798—1877)　美国探险家

威廉(Gauss, Wilhelm August Carl Matthias; 1813—1879)　高斯之子

韦伯(Weber, Wilhelm Eduard; 1804—1891)　德国物理学家

韦塞尔(Wessel, Caspar; 1745—1818)　挪威测量员、数学家

韦伊(Weil, André; 1906—1998)　法国数学家

维尔德(Wildt, J.; 1770—1844)　德国数学家

维吉尔(Vergil; 公元前 70—公元前 19)　古罗马诗人

维梅尔(Wimmer, R.)　德国画家

魏尔斯特拉斯(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm; 1815—1897)　德国数学家

沃尔弗(Wolff, Christian von; 1679—1754)　德国哲学家、数学家

武辛(Wussing, Hans)　德国当代数学(史)家

西塞罗(Cicero, Marcus Tullius; 公元前 106—公元前 43)　古罗马政治家、演说家、哲学家

希尔伯特(Hilbert, David; 1862—1943)　德国数学家

希罗多德(Herodotus; 公元前 484?—公元前 430/420)　古希腊历史学家

席勒(Schiller, Johann Christoph Friedrich; 1759—1805)　德国诗人、剧作家、历史学家、文艺理论家

亨利(雄狮)公爵(Henry the Lion; 1129/1130—1195)　萨克森公爵和巴伐利亚公爵

谢林(Schelling Fiedrich Wilhelm Joseph von; 1775—1854)　德国哲学家

谢林(Schering, Ernst Christian Julius; 1833—1897)　德国数学家

辛普森(Simpson, Thomas; 1710—1761)　英国数学家

欣里希·高斯(Gooss, Hinrich)　高斯的曾祖父

休谟(Hume, David; 1711—1776)　英国哲学家、经济学家、历史学家

修昔底德(Thucydides; 约公元前 460 以前—公元前 404 以后)　古希腊历史学家

雅各布·伯努利(Bernulli, Jacques; 1654—1705)　瑞士数学家、力学家、天文学家

雅可比(Jacobi, Carl Gustav Jacob; 1804—1851)　德国数学家

亚当斯(Adams, John Couch; 1819—1892)　英国天文学家、数学家

亚里士多德(Aristotle; 公元前 384—公元前 322)　古希腊哲学家、科学家

延森(Jensen, Christian Albrecht; 1792—1870)　丹麦画家

杨辉(约 13 世纪中叶)　中国数学家

耶纳施(Jenensch, Gerhard; 1860—1933)　德国雕塑家

伊德(Ide,Johann Joseph Anton;1775)　高斯大学同学,莫斯科大学数学教授

伊藤清(Ito,Kiyosi;1915—)　日本数学家

于根·高斯(Goos,Jürgen)　高斯的祖父

约翰·弗里德里希·本察(Benze,Johann Friedrich;卒于1809年)　高斯的舅父

约翰·格奥尔格·海因里希·高斯(Gauss,Johann Georg Heinrich;1769—1854)　高斯(同父异母)之兄

约翰娜·奥斯多夫(Gauss,Johanna Elizabeth Rosina Osthoff;1780—1809)　高斯的第一任妻子

约瑟夫·高斯(Gauss,Joseph;1806—1873)　高斯之子

约希姆(Joachim,Joseph;1831—1907)　匈牙利小提琴家

人名译名表

Abel,Niels Henrik　阿贝尔(1802—1829)

Adams,John Couch　亚当斯(1819—1892)

Albrecht,Wwilhelm Eduard　阿尔布雷希特(1800—1876)

Alembert,Jean le Rond d'　达朗贝尔(1717—1783)

Anacreon　阿那克利翁(公元前570?—公元前480?)

Archimedes　阿基米得(公元前287—公元前212)

Argand,Jean Robert　阿尔冈(1768—1822)

Aristotle　亚里士多德(公元前384—公元前322)

Arnswaldt,Baron Karl Friedrich Alexander von　冯阿恩斯瓦尔德(1768—1845)

August,Ernst　奥古斯特(1771—1851)

Bach,Johann Sebastian　巴赫(1685—1750)

Bacon,Francis　培根(1561—1626)

Ball,Walter William Rouse　鲍尔(1850—1925)

Bartels,Johann Christian Martin　巴特尔斯(1769—1836)

Beethoven,Ludwig van　贝多芬(1770—1827)

Benze,Johann Friedrich　约翰·弗里德里希·本察(卒于1809年)

Benzenberg,Johann Friedrich　本岑贝格(1777—1846)

Bernoulli,Daniel　丹尼尔·伯努利(1700—1782)

Bernulli,Jacques　雅各布·伯努利(1654—1705)

Biermann,Kurt - R　比尔曼

Bode,Johann Elert　波得(1747—1826)

Bolyai, Jonos　J·波尔约(1802—1860)

Bolyai,Wolfgang(Farkas)　W·波尔约(1775—1856)

Brahms,Johannes　勃拉姆斯(1833—1897)

Brandes, Heinrich Wilhelm　布兰德斯(1777—1834)

Brendel, Otto Rudolf Martin　布伦德尔(1862—1939)

Blucher, Gebhard Leberecht von　布吕歇尔(1742—1819)

Burckhardt Johann Karl　布尔克哈特(1773—1825)

Buffon, Georges Louis Leclerc　蒲丰(1707—1788)

Bürg, Johann Tobias　伯格(1766—1835)

Büttner, J. G.　比特纳

Byron, George Gordon　拜伦(1788—1824)

Caesar, Julius　恺撒(公元前 100—44)

Cantor, Moritz Benedikt　M. 康托尔(1829—1920)

Cardano, G. irolamo　卡尔达诺(1501—1576)

Cauchy, Augustin - Louis　柯西(1789—1857)

Cicero, Marcus Tullius　西塞罗(公元前 106— 公元前 43)

Clairaut, Alexis - Claude　克莱罗(1713—1765)

Courant, Richard.　柯朗(1888—1972)

Crelle, August Leopold　克雷尔(1780—1855)

Dahlmann, Friedrich Christoph　达赫尔曼(1785—1860)

Dalberg, Karl Theodor Anton Maria von　冯达尔贝格(1744—1817)

Dante　但丁(1265—1321)

Davout, Louis - Nicolas　达武(1770—1823)

Dedekind, Richard　戴德金(1831—1916)

Delambre, Jean - Baptiste Joseph　德朗布尔(1749—1822)

Descartes, René　笛卡尔(1596—1650)

Diderot, Denis　狄德罗(1713—1784)

Dirichlet, Gustav Peter Lejeune　狄利克雷(1805—1859)

Eberlein, Gustav　埃伯莱茵(1847—1926)

Eckermann, Johann Peter　埃克曼(1792—1854)

Eichhorn, Johann Albreht Friedrich　艾赫霍恩(1779—1856)

Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max　艾森斯坦(1823—1852)

Encke, Johann Franz　恩克(1791—1865)

Erchinger, Johannes　厄金格尔

Eschenburg, Arnold Wilhelm　埃森伯格(1778—1861)

Esenbeck, Nees von　埃森贝克(1776—1858)

Euler, Leonhard　欧拉(1707—1783)

Euripides　欧里庇得斯(公元前 485—406)

Ewald, G. eorg Heinrich August von　埃瓦尔德(1803—1875)

Faraday, Michael　法拉第(1791—1867)

Ferdinand, Carl Wilhelm　费迪南德公爵(1735—1806)
Fermat, Pierre de　费马(1601—1665)
Frederick Ⅱ　腓特烈二世(1194—1250)
Fries, Jacob Friedrich　弗里斯(1773—1843)
Frobenius, Georg Ferdinand　弗罗贝尼乌斯(1849—1917)
Fuss, Nikolaus von　冯富斯(1755—1826)
Galle, Johann Gottfred　伽勒(1812—1910)
Galois, Evariste　伽罗瓦(1811—1832)
Gauss, Carl Friedrich　卡尔·弗里德里希·高斯(1777—1855)
Gauss, Dorothea Benze　多萝特娅·本察·高斯(1743—1839)
Gauss, Henritte Wilhelmine Caroline Therese　特雷丝(1816—1864)
Gauss, Johann Georg Heinrich　约翰·格奥尔格·海因里希·高斯(1769—1854)
Gauss, Johanna Elizabeth Rosina Osthoff　约翰娜·奥斯多夫(1780—1809)
Gauss, Joseph　约瑟夫·高斯(1806—1873)
Gauss, Minna Waldeck　明娜·瓦尔德克(1788—1831)
Gauss, Peter Samuel Marius Eugenius　欧根(1811—1896)
Gauss, Wilhelm August Carl Matthias　威廉(1813—1879)
Gauss, (Minna) Wilhelmine　明娜(1808—1840)
Gauss, Gebhard Dietrich　格布哈德·迪特里希·高斯(1744—1808)
Gerling, Christian Ludwig　格林(1788—1864)
Germain, Sophie　热尔曼(1776—1831)
Gervinus, G. eorg G. ottfried　格菲努斯(1805—1871)
Gibbon, Edward　吉本(1737—1794)
Girard, Albert　吉拉德(1595—1632)
Goethe, Johann Wolfgang von　歌德(1749—1832)
Goldschmidt C. W. B.　戈尔德施密特(1807—1851)
Goos, Jürgen　于根·高斯
Gooss, Hinrich　欣里希·高斯
Göschen, J. F. L.　格申(1778—1837)
Green, George　格林(1793—1841)
Grimm, J. L. C. (1785—1863) & Grimm, W. C. (1786—1859) 格林兄弟
Hadamard, Jacques　阿达玛(1865—1963)
Hamburger, M.　汉布格
Hamilton, William Rowan R.　哈密顿(1805—1865)
Harding, Carl Ludwig　哈定(1765—1834)
Hartzer, Ferdinand　哈策尔(1838—1906)
Hegel, Georg Wilhelm Friedrich　黑格尔(1770—1831)

Henry the Lion 亨利(雄狮)公爵(1129/1130—1195)
Herodotus 希罗多德(公元前484?—公元前430/420)
Hesemann, Christian Heinrich 黑泽曼(1815—1856)
Heyne, Christian Gottlob 海涅(1729—1812)
Hilbert, David 希尔伯特(1862—1943)
Horace 贺拉斯(公元前65—公元前8)
Humboldt, Alexander von 洪堡(1767—1835)
Hume, David 休谟(1711—1776)
Ide, Johann Joseph Anton 伊德
Ito, Kiyosi 伊藤清(1915—)
Jacobi, Carl Gustav Jacob 雅可比(1804—1851)
Jenensch, Gerhard 耶纳施(1860—1933)
Jensen, Christian Albrecht 延森(1792—1870)
Joachim, Joseph 约希姆(1831—1907)
Kant, Immanuel 康德(1724—1804)
Kästner, Abraham Gotthelf 卡斯滕纳(1719—1800)
Kepler, Johannes 开普勒(1571—1630)
Kirchhoff, Gustav Robert 基尔霍夫(1824—1887)
Klein, Christian Felix 克莱因(1849—1925)
Klügel, Georg Simon 克吕格尔(1739—1812)
Kronecker, Leopold 克罗内克(1823—1891)
Kummer, Ernst Eduard 库默尔(1810—1893)
Lagrange, Joseph Louis 拉格朗日(1736—1813)
Lalande, Joseph – Jérôme Lefrançais de 拉朗德(1732—1807)
Lambert, Johhan. HHeinrich 兰伯特(1728—1777)
Landau, Edmund 兰道(1877—1938)
Laplace, Pierre – Simon, Marquis de 拉普拉斯(1749—1827)
Legendre, Adrien – Marie 勒让德(1752—1833)
Leibniz, Gottfried Wilhelm 莱布尼茨(1646—1716)
Lesage, Alain René 勒萨日(1668—1747)
Lessing, G. E. 莱辛(1729—1781)
Le Verrier, Urbain Jean Joseph 勒威耶(1811—1877)
Lichtenberg, Georg Christoph 利赫滕贝格(1744—1799)
Lindenau, Bernhard August von 林德瑙(1799—1854)
Liouville, Joseph 刘维尔(1809—1882)
Listing, Johann Benedict 利斯廷(1808—1882)
Liszt, Franz 李斯特(1811—1886)

Livius, Titus　李维(公元前 59— 公元 17)
Lobachevskii, Nikolai Ivanovich　罗巴切夫斯基(1792—1856)
Locke, John　洛克(1632—1704)
Lucian　卢奇安(120—180)
Macaulay, Thomas Babington　麦考利(1800—1859)
Malebranche, Nicolas de　马勒伯朗士(1638—1715)
Marx, Karl　马克思(1818—1883)
May, Kenneth. O.　曼(1915—1977)
Mayer, Johann Tobias　梅耶(1723—1762)
Metastasio, Pietro　梅塔斯塔齐奥(1698—1782)
Meyerhoff, Johann Heinrich　梅耶霍夫(1770—1812)
Miller, William Hallows　米勒(1808—1880)
Mirabeau, Comte de　米拉波(1749—1791)
Moivre, Abraham de　棣莫弗(1667—1754)
Monge, Gaspard　蒙日(1746—1818)
Mozart, Wolfgang Amadeus　莫扎特(1756—1791)
Napoleon　拿破仑(1769—1821)
Neumann, Franz Ernst　诺伊曼(1798—1895)
Neumann, Olaf　诺伊曼
Newton, Isaac　牛顿(1642—1727)
Olbers, Heinrich Wilhelm Matthias　奥尔伯斯(1758—1840)
Oriani, Barnabus　奥里阿尼(1752—1832)
Ostrogradsky, Mihail Vasilievich　奥斯特洛格拉茨基(1801—1862)
Ostrowski, Alexander　奥斯特洛夫斯基(1893—1986)
Ovid　奥维德(公元前 43— 公元 17)
Paganini, Nicolo　帕格尼尼(1782—1840)
Pascal, Blaise　帕斯卡(1623—1662)
Pfaff, Johann Friedrich　普法夫(1765—1825)
Peters, Christian August Friedrich　佩特斯(1806—1880)
Piazzi, Joseph　皮亚齐(1746—1826)
Picard, Charles émile　皮卡(1856—1941)
Plana, Giovanni　普兰纳(1781—1864)
Plato　柏拉图(公元前 427—347)
Puiseau, Victor　皮瑟(1820—1883)
Repsold, Johann Georg　雷普瑟尔德(1771—1830)
Richter, Jean Paul Friedrich　里赫特(1763—1825)
Riemann, Georg Friedrich Bernhard　黎曼(1826—1866)

Riesz, Marcel　里斯(1886—1969)
Richardson, Samuel　理查逊(1689—1761)
Rodrigues, Olinde　罗德里格斯(1749—1851)
Rousseau, Jean - Jacques　卢梭(1712—1778)
Roth, Peter　罗思(?—1617)
Rudolf August　鲁道尔夫・奥古斯特公爵(1627—1740)
Saccheri, Gerolamo　萨凯里(1667—1733)
Sartorius von Waltershausen, Wolfgang　萨托里乌斯(1809—1876)
Schaper, Fritz　沙佩尔(1841—1919)
Schelling Fiedrich Wilhelm Joseph von　谢林(1775—1854)
Schering, Ernst Christian Julius　谢林(1833—1897)
Schiller, Johann Christoph Friedrich　席勒(1759—1805)
Schlesinger, L.　施莱辛格
Schweikart, F. C.　施韦卡尔特(1780—1859)
Scott, Sir Walter　司各特(1771—1832)
Seyffer, Carl Felix　塞费(1762—1822)
Shakespeare, William　莎士比亚(1564—1616)
Simpson, Thomas　辛普森(1710—1761)
Smith, Henry John Stephen　史密斯(1826—1883)
Staudt, Karl Georg Christian von　斯陶特(1798—1867)
Stieltjes, Thomas Jan　斯蒂尔切斯(1856—1894)
Tacitus　塔西佗(55?—120?)
Taurinus, Franz Adolph　陶里努斯(1794—1874)
Thucydides　修昔底德(约公元前 460 以前 — 约公元前 404 以后)
Titus, Johann Daniel　提丢斯(1729—1796)
Tolstoy, Lev　托尔斯泰(1828—1910)
Vallee - Poussin, Charles Jean de la　瓦莱 - 布桑(1866—1962)
Vergil　维吉尔(公元前 70— 公元前 19)
Voltaire　伏尔泰(1694—1778)
Wagner, Richard　瓦格纳(1813—1883)
Wagner, Rudolf　瓦格纳(1805—1864)
Wantzel, Pierre L.　旺策尔(1814—1848)
Weber, Wilhelm Eduard　韦伯(1804—1891)
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm　魏尔斯特拉斯(1815—1897)
Weil, André　韦伊(1906—1998)
Wessel, Caspar　韦塞尔(1745—1818)
Wildt, J.　维尔德(1770—1844)

Wiles, Andrew　怀尔斯(1953—)

Wilkes, Charles　威尔克斯(1798—1877)

Wimmer, R.　维梅尔

Wolff, Christian von　沃尔弗(1679—1754)

Wussing, Hans　武辛

Xenophon　色诺芬(公元前431—公元前355?)

Zach, Franz Xavier G. von　察赫(1754—1832)

Zimmermann, Eberhard August Wilhelm　齐默尔曼(1743—1815)

编后语　这篇长文是我国著名解析数论专家潘承彪先生推荐的.潘先生一直致力于高斯《算术研究》的翻译工作,并称将其作为余生的一项重要事业来完成,并不遗余力的收集了多个版本.我们数学工作室早已与潘先生达成了合作出版的意向,但越是重要的工作越是慢工细活.潘先生"迟迟不肯"交稿,而沈先生这篇十分精彩的长文原计划是配合潘先生译著的.为了避免沈先生"遥遥无期"的等待,特发于此.一是当做大戏的一个序幕;二是间接"催促"潘先生早日拿出他的译著.

附　录　论高斯[①]

陈庆益

高斯(C.F. Gauss,1777—1855)生于德国 Brunswick,1795 ~ 1998 年求学于 Göttingen 大学.1807—1855 年任天文观测台台长及 Göttingen 大学教授.

大家都知道高斯的名言:"数学是科学的女王,算术是数学的女王."[②]这里"算术"是在古希腊人的意义下理解的,指的初等数论,而区别于近代的解析数论.

高斯被认为是"数学家之王".

我于1978年在兰州及1979年在云南的两次通俗演讲中,曾对高斯的"名言"及其"王位"提出异议,认为高斯处于变量数学为主流的时代,竟不能认识变量数学应是当时数学的女王,可说是一种时代悲剧;我还认为,高斯虽是天才的数学家,却不是伟大的数学家,他对后世的影响,远不如拉格朗日(J.L.Lagrange,1736—1813)、柯西(A.Cauchy,1789—1857)、伽罗瓦(E.Galois,1811—1832)及黎曼(G.F.B.Riemann,1826—1866)等的影响之大.这些人基本上是高斯的同代人,可以说既是天才的数学家,又是伟大的数学家.

今年初我看到 M.Kline 的《古今数学思想》第三卷中的一段话(287 页):"尽管公认高斯至少是牛顿以后最大的数学家,但与其说他是一个革新者,倒不如说他是从十八世纪到十九世纪的过渡人物.虽然他得出一些新观点,确定吸引其他数学家们,而他之面向过去,更甚于面向未来."我觉得这个评价是十分中肯的.

为了看清高斯主要是面向过去,最好了解一下高斯的主要工作(不必全部罗列).现在把这些主要工作列举如下:

1.用尺规十七等分圆(1795 ~ 1796).

2.《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae,1801).

3.代数基本定理的正确证明(1801,1816).

4.超几何级数的收敛性讨论(1812).

5.最小二乘法(1821,1823).

6.曲面的内在微分几何(1827).

7.复数理论(1831).

此外还有关于线性代数方程组的求解方法、天体力学及磁学等的研究,关于散度积分公式的个别情况.未发表的工作有椭圆函数,而不敢发表的工作有非欧几何.

必须说,高斯所处的时代,是变量数学正在蓬勃发展的时代;而且数学的研究中心在法国,而不在 Göttingen.这就是高斯只能主要地面向过去而很少面向未来的客观原因.下面根据高斯的上述主要工作具体地进行分析和论证.

高斯在 Göttingen 大学的头两项研究工作表明:他所受的数学启蒙教育是古希腊的尺规作图难题和 Pythagoras 学派的神秘的整数的熏陶.难怪他要说算术是数学的女王.而早在他之前,在瑞士和法国,莱布尼

---

① 原载《数学研究与评论》.

② 至于皇冠与明珠之说,大概是杜撰或续貂.

兹(G.W. von Leibniz,1646—1716)的学生和后继者们,例如Bernoulli家族、欧拉(L.Euler,1707—1783)、洛必达(G.F. l'Hopital,1661—1704)及达朗贝(J. Le Rond. D'Alembert,1717—1783)等,都主要地从事变量数学的开拓与发展研究,并给予后世以重大影响.高斯在其名著《算术研究》中,只从事初等数论的研究,并没有把变量数学的方法引进去.至于解析数论,则是他在Göttingen的后继者狄利克雷(P.G.Lejeune Dirichlet,1805—1859)及黎曼所开创的.附带提到,高斯的《算术研究》是用拉丁文写出的,这也表明他的面向过去.早在高斯以前,笛卡尔(R. Descartes,1596—1650)、达朗贝及拉格朗日等人,就用他们的本国文字(法文)写出了他们各自的名著,更利于促进变量数学的发展.

高斯关于代数基本定理的多种严格证明,当然只具有总结的性质,远没有伽罗瓦关于代数方程可解性研究所提出的群、域、扩张、正规子群及可解群等重大思想和概念所引致的广泛而深刻的影响.

高斯关于超几何级数收敛性的系统而严谨的研究,只是变量数学的一个小课题,根本不能与拉格朗日系统建立变分学这整个分支及柯西全面奠定分析数学和单复变函数论以及微分方程的初值问题等多个重大领域相提并论.

高斯关于最小二乘法及解线性代数方程组的研究,当然有重大的实用价值.但这两方面并非他的首创,前者早有勒让德(A. M. Legendre,1752—1833)与拉普拉斯(P.S.Laplace,1749—1827)的研究,后者也先有克拉美(G.Cramer,1704—1752)的讨论.不必说,尽管高斯在这两方面都有所推进,其影响终究是有限的.

高斯关于复数代数及算术的研究,也只是一个不大的课题,根本未进入复变量函数领域.

高斯对统计学虽也有所涉及,例如现在通称的高斯分布(正态分布),但这无论如何不能与拉普拉斯在概率论中引进分析方法的开辟性工作相比.

高斯所开创的唯一的领域是曲面的内在微分几何.但可惜的是:他停留于二维情形;而更深刻的一般讨论,则是黎曼的贡献.后者与爱因斯坦的广义相对论的关系,是众所周知的.

当然,更可惜的是:高斯不敢发表关于非欧几何的工作.须知,非欧几何在数学思想及其哲学意义方面,是有革命性的!

总结上面的分析和论证,可以看出,尽管高斯的确是一个天才的数学家,但他绝非伟大的革新者."他之面向过去,甚于面向未来."对于天才的高斯,这实在是一个时代的悲剧!

结合这一点,我也十分欣赏D. J. Struik在《数学简史》(《A Concise History of Mathematics》)一书中写出的结束语第285页:"但即便是Hilbert的天才,也不能预见今天实际上已出现的和正在出现的某些惊人的发展.20世纪的数学已按其自身的新途径在跃进."20世纪40年代以来出现的许多新的数学分支,特别是结合高速电子计算机的许多新领域,难道是Hilbert所能预见的吗?

所以,如果不去迎接数学发展的新主流,而仍然用一些古老的或半古老的"难题"去启蒙或引导新的一代,不也会引致一些新的历史悲剧吗?须知,天才确实是有的,而且在十亿人民的我国,大概是不会太少的!

A Remark on C.F. Gauss

Chen Qing-yi

Abstract

Gauss is a genius mathematician, but not a great mathematician. He should have to say: calculus is the queen of mathematics. He faced rather to the past, than to the future, as M. Kline said. This is quite a historical tragedy The key of this tragedy is: Gauss was educated in his youth by the spirit of ancient Greece mathematics, but not by the current(in his time) mathematics of variable quantities, as Euler, Lagrange and Cauchy were.

编后语　对一位数学家的评价应该是见仁见智，即使是像高斯这样伟大的数学家也不应例外，科学特别是社会科学应该有多个观点并存，多种声音齐鸣，方为健康，要避免一边倒，所以我们配发这篇文章，以飨读者．

几何学的起源①

[法] 胡塞尔

在这部作品中，那种曾经激发过我们的关注使我们有必要开始进入到一些反思之中，这些反思肯定与伽利略的很不一样．我们有权不把我们的目光仅仅置于流传给我们的完全现成的几何学之上以及几何学的意义在伽利略的思想中所具有的存在模式之上——在伽利略的思想中与在更加古老的几何学智慧的所有后来的继承者的思想中一样，几何学的含义具有相同的存在模式——不论他们是作为纯粹的几何学家进行工作还是对几何学作实践的应用．相反，这里也涉及，甚至首先涉及的是，以回溯的方式追问流传给我们的几何学的源初含义．几何学正是由于这一含义本身而从未失去其效用，它不仅没有失去其效用，同时也没有停止发展，而且在经过了一切新的形式之后仍然是"这个"几何学．我们的考察必然会导向最深刻的含义问题、科学问题和科学史一般的问题，甚至最后会导向世界史一般的问题；因此，我们的问题以及我们关于伽利略的几何学的说明便获得了一种例证性的意义．

首先我们必须注意：在我们对近代哲学所进行的历史的沉思的过程中，由于揭示了涉及几何学意义之起源的基础问题以及以此为基础对伽利略的新物理学意义之起源的揭穿，所以，在这里，在伽利略这里，一道光芒闪耀在我们全部的事业之上：想以历史沉思的形式实现对我们自身的当下的哲学状况的思义，并希望我们因此而最终能够获得哲学的意义、方法和开端，获得我们愿意并应当将我们的生命奉献给它的这一个哲学的意义、方法和开端．在这里，有一个例证将明见地表明，我们的研究在一种非同寻常的意义上，即根据一种课题的方向来看，恰恰是历史的，这种课题方向打开了一些通常的历史学(historie)完全不知道的基本问题．这些问题，就其类别而言，无疑也是历史的(historische)．当我们前后一贯地追随这些基本问题时，我们会被引向何处，这当然是在开始时我们还不能预见的事情．

几何学(为了简洁起见，我们把所有那些探讨在纯粹时空性中得到应用的数学存在形式的学科置于这一名称之下)起源的问题在这里不应该是历史文献的问题，也不应该因此而成为对第一批提出真正意义上的纯粹的几何学的命题、证明和理论的几何学家的

① 我们在译文中竭力保留了胡塞尔遣词造句的自发节奏，甚至当这种节奏的突出标志在于措述的未完成状态时．然而，为了明晰起见，我们不得不对原文的标点符号做了两三处的修改，并且把错位的词(代词或连词有时所指涉的正是这些词)放回到方括号[ ]之中．出于一致性的考虑，还有一些尖括号 < >，指的是《危机》和增补文本的编者所添加的单词．圆括号以及页脚注是胡塞尔的(对此可参见译文末尾的考注)．

调查，或者成为对他们所发现的特定的命题的研究，如此等等．与此相反，毋宁说，我们所关注的应该是回溯地追问最源初的意义，几何学正是根据这种意义才在某一天诞生，〈并且〉从那以后始终作为数千年的传统而存在，而且还是对我们而言的存在，它始终不停地发挥着活生生的作用①；我们追问这样一种意义，正是根据这种意义几何学才第一次出现在历史中 —— 应该出现在历史中，尽管我们对第一批创始者们一无所知，况且我们对此也不进行探讨．从我们所知道的东西出发，从我们的几何学出发，即从它的流传下来的古老形态（如欧式几何）出发，就有可能回溯地追问几何学被湮没的源初开端，就像这些开端作为"原创建" 活动而曾经必然是的那样．这种回溯的追问所坚持的不可避免的是一般之物，可是很快就会表明，这是一些可以做出各种解释的一般之物，随着这些解释，这样一些可能性得到了预先确定：抵达特殊的问题和作为回答的明见性规定．回问由之开始的所谓全部现成的几何学，是一种传统．我们人类的存在正是运行在无数的传统之中．就其全部形态而言，文化世界恰恰作为来自传统之物而在其总体性中存在．这些形态作为这样的东西，并不是以纯粹的因果方式产生的，我们也总已知道，传统正是在我们人类的空间中，从人类的活动出发，因而也就是在精神的起源中所产生的传统 —— 即使一般来说我们对于传统的确定来源以及在这里实际上已经运行的精神活动一无所知或几乎一无所知．然而，在这种无知中，本质上永远存在一种隐含的知识、一种因此也需要加以阐明的知识，可它的明见性是不容置疑的．这种知识开始于一些表面的、不言而喻的真理：如所有传统的东西都产生于人的创造；因此，存在过以前的人和人类，第一批创造者就属于他们，这些创造者根据现存的材料，不管是未加工的还是已经由精神所赋予形式，而构造出新事物的形式等等．但是，我们从这种表面的真理出发被引向深层的东西．传统在这种一般性中受到持续的追问，如果我们一以贯之地保持提问的方向，那么我们就会看到无限多的问题的展开，这些问题根据其含义会导向一些确定的答案．然而，只要我们在单个之物上所规定的仅仅是可通过归类而把握的东西，那么，它们的一般性的形式，甚至 —— 正如所认识到的那样 —— 无条件的普遍有效性的形式也就当然可以应用于那些在单个的意义上得到确定的特殊情况之中．

因此，关于几何学，我们应该从最容易理解的不言而喻的真理开始，就像我们在前面为了指出我们回问的含义而已经提出的情况那样．我们把由传统出发所提供给我们的几何学（我们学过这种几何学，我们的老师同样也学过）理解为精神成就的总体获得物，这种获得物在转化的过程中通过在新的精神活动中的新的获得物而得到扩展．从流传下来的较早的形态 —— 正是这些形态构造了它的起源．但对于每一个形态来说，向较早形态的参照都被一再地重复 —— 来看，我们知道，几何学因此很显然一定来自最早的获得物，来自最早的创建活动．这样我们便理解了它的持续的存在方式：这里涉及的不仅是从一个获得物到另一个获得物的不停的运动，而且还涉及一种连续的综合，在这种综合中，所有获得物的效力继续存在，它们全体以这样一种方式形成了一个总体性，即在每一个当下中，总体的获得物，对下一个阶段的获得物而言，都可以说是一个总的前提．这种几

① 对于伽利略以及文艺复兴以来的所有时代来说，它也不停地发挥着活生生的作用，但同时又作为传统而存在．

何学，与同一式样的几何学的未来视域一起，必然地处于这种运动之中；对于几何学家来说，几何学正是这样的，因为每一个几何学家都意识到（即持续地、隐含地知道）他们处于连续的进程之中、处于作为在这一视阈中进行活动的认知进程之中．对所有的科学来说都是这样．同样，[我们确信] 每一门科学都与研究者的开放的世代链条相连接，这些众所周知的或鲜为人知的研究者，作为为生动的科学总体性而进行构造的创建性的主体性，相互协作、共同工作．由于这样一种存在的意义，这种科学，尤其是几何学，必然曾有过一个历史的开端，而且这种意义本身必然曾有过在创建行为中的起源：首先是作为筹划，然后是在成功的实施之中．

很明显，这里的情况与所有发现的情况是一样的．每一种由最初的筹划到其实施的精神成就第一次都是以现实成功的明见性而存在于此的．然而，如果我们考虑到，数学的存在方式是一种连续的活的运动，这种运动从作为前提的获得物出发，目的是到达新的获得物，这些新的获得物的存在意义整合了每一个前提的存在意义（而且以后也是如此），那么很明显，几何学（作为发展了的科学，就像对每一种科学而言的情况一样）的总体意义便不能在开始时作为筹划而已经存在于此了，也不能继续活动在充实的运动中了．作为预备阶段，在此之前必然存在一个最原始的意义构成（sinnbildung），而且无疑是以这样一种方式，即它第一次出现在成功实现的明见性中．但是，说实话，这种说法有点同义迭用[①]．明见性绝不意味着其他任何东西，而只意味着在存在着的在此存在中以原本的和切身的方式对它的把握．由于成功地实现了筹划，因此这种实现对行为主体来说便是明见的；在这种明见性中，被实现的东西作为其本身是原本当下的．

但是，在这里出现了一些问题．这个筹划及其成功的实施毕竟仅仅发生在发明者的主观性之内，而且可以说，原本当下的意义及其总体性的内容也因此而仅仅存在于他的精神空间之中．可是，几何学上的存在并不是心理上的存在，它不是个人的东西在个人意识领域之中的存在；它是对"任何人"（对现实的或可能的几何学家，或对任何懂得几何学的人）都客观地存在于此的存在．的确，正如我们所确信的那样，几何学从它的原创建时起就具有一种独特的超时间的存在，一种能为各个民族和各个时代的所有的人，首先是现实的和可能的数学家所理解的存在；所有它的特殊形态也是这样．而且，不论是谁以预先被给予的形式为基础重新构造出来的任何形式都会立即呈现出同样的客观性．正如我们所看到的，这里涉及的是"观念的"客观性．这种客观性为文化世界整个类别的精神产物所固有，属于这类精神产物的不仅有科学的构成物以及科学本身，而且也包括例如文学作品这种构成物．[②]这一类作品不像工具（锤子、钳子）或建筑物以及类似的产品那样

① 胡塞尔的原文是"überfüllt"，根据语境，这里可译为"夸大的"．德里达译为"pléonastique"（同文迭用的），似不妥——中译者注．

② 但是，最广义概念的文学包括所有这些方面，就是说，隶属于这个概念的客观存在的有：语言中的被表达之物以及总是可以一再地得到表达之物，更准确地说，只有当我们仅仅把它们当做含义、当做话语意义进行考察时，它们才具有客观性，具有对每一个人而言的存在；从客观的科学来看，这一点也适用于一种更加特殊的方式，即对客观科学而言，它们的著作的原文与外国语言的译文之间的差异并没有取消同一理解的可能性，也不会使它成为不明晰的间接的可理解性．

具有在许多彼此相似的事例中进行重复的可能性.毕达哥拉斯定理以及整个的几何学只存在唯一的一次,不管它如何经常地被表达,甚至也不管它在什么语言中被表达.在同一性的意义上,几何学在欧几里得"原来的语言"中和所有的"译本"中都是相同的;不管它如何经常地从原本的口头言说及其书面记载出发,以感性的模式,在无数的口头表达或文字的以及其他的存贮物中得以表述出来,它在每种语言中依然是同一的.感性的表达在世界中具有一种时空的个体化过程,这就像所有的物体事件或所有那些在物体中得到具体化的东西一样;但是,我们在这里称之为"理念的对象"的精神形态本身却并非如此.然而,它们[理念客观性的形态]以某种方式在世界上具有一种客观的存在,可这仅仅依据双重层面的重复,并且最终依据感性的具体化过程.由于语言本身在其所有的特殊化了的词、句子和话语中,正如我们在语法态度中很容易看出的那样,完全是从理念对象性出发而被建构的;例如 Löwe[狮子]这个词仅仅在德语中出现过一次,它在其无论是谁所作的无论多少次的表达中,始终是同一东西.但是,几何学的词、句子和理论——在它们纯粹地被当做语言构成物时——的观念性并不是那种在几何学中构成被表达之物并且作为真理而有效的观念性,即几何学的理念的对象和事态等等.在任何一种陈述中,我们所言说的课题对象(它的含义)与陈述是不同的,在陈述过程中,陈述本身绝不是也不可能是课题.在这里,这种课题恰恰是观念的对象性,它与语言这个概念所涵盖的对象性是完全不一样的.现在,我们的问题所涉及的正是几何学的观念的和课题化的对象性:几何学的观念性(正如所有科学的观念性一样)是如何从其最初的个人之中的涌现(在这种涌现中,它表现为在第一个发明者的心灵意识空间中的构成物)达到它的观念客观性的?我们事先就看到:正是通过语言的中介,它才获得自身,可以说,正是借助于语言它才获得了它的语言的肉身;可是,语言的肉身化如何从纯粹内在的主观性出发产生出客观之物呢?这种客观之物,比如说作为几何学的概念或事态,实际上不仅对于所有的人,而且现在和永远都是在场的,它在其语言表达中作为几何学的话语,作为在其几何学的观念含义中的几何学命题已经具有有效性.

当然,尽管语言起源的一般问题在这里也已表现出来了,但我们不会在语言的观念存在中及其通过表达和记载而在现实世界里得到奠基的存在中探讨这一问题;可是,对于作为人性中人的功能的语言与作为人的存在的视阈的世界之间的关系,我在这里必须说上几句.

当我们在清醒状态中生活于这个世界之中时,不管我们是否注意到这一点,我们都持续地意识到这个世界,意识到这个作为我们生活的视阈、作为诸"物体"(Dinge)(实在对象)的视阈,作为我们现实和可能的兴趣和活动的视阈的世界.我们周围的人(mitmenschen)的视阈总是在世界视阈中被凸现出来,不管它们是否在场.甚至在我们作出任何注意之前,我们便已经意识到了我们共在人类的开放的视阈,这一视阈带有一个有限的核心,即我们的亲属和我们在一般意义上所认识的人.与这一意识相关,我们还存在一种对处于我们的陌生人的视阈中的人的意识,我们总是将这些人作为"他人"而意识到;我们总是"为我地"意识到他人,我们总是把他人作为"我的"他人而意识到,即我们总是把他人作为这样一种他人而意识到:我可以与他人一起进入到现实的和可能的、直接的和间接的移情关系之中.我可以与他们一起进入到自我与他人之间的相互理解之

中，我可以与他们一起以这种移情关系为基础进入到与他人的交往之中即与他人一起进入到任何一种特殊的共同体模式之中，并且我因此而可以与他们一起进入到对这一共同体化了的存在的习惯性的知晓之中．每一个人都完全像我一样具有自己的共在人类．正是这样．他才为我以及所有的人所理解，而且由于他总是把自己算在内．他便拥有了他知道自己生活于其中的一般意义上的人类．

普遍语言恰恰属于这种人类的视阈．人类首先是作为直接和间接的语言共同体而被意识到的．很明显，只是由于作为潜在交流的语言极其广泛的记录，人类的视阈才能像它对人们始终是的那样成为无限的开放视阈．在意识的维度中，正常的成年人（不包括疯子和儿童的世界）作为人类的视阈和语言的共同体享有优先地位．在这种意义上，对于每一个人 —— 对这个人而言，人类都是一个能够相互地、正常地和充分理解地进行自我表达的共同体；而且在这一共同体中，每一个人也都能够将所有那些在他的人类的周围世界中存在的东西当做客观存在者来谈论．一切东西都有自己的名字，或者毋宁说，在极为广泛的意义上，一切东西都是可命名的，就是说，可用语言表达的．客观的世界首先是对所有人而言的世界，是"每一个人"把它当做世界视阈来拥有的世界．世界的客观存在以那些作为具有共同语言的人［主体］的人为前提．语言就其自身而言，是被行使的功能和权能，它与世界相关，与作为按照其存在和如在方式可在语言中得到表达之物的对象的整体相关．这样，一方面，人，作为人、作为共在的人类、作为世界 —— 人们所谈论并总是能够谈论的世界，我们所谈论并总是能够谈论的世界，另一方面，语言，这两者不可分割地交织在一起．而且人们总已确信它们的不可分割的相互关联的统一性，尽管这种确信通常只是隐性地并处于视阈之中．

以此为前提，原创建的几何学家当然也能表述他的内在构成物．但又出现了这个问题：这种内在构成物在其"观念性"中是如何成为客观的？心理之物作为这个人的心理之物，由于能够得到理解和传诉，当然是客观的，这恰似他自己作为具体的个人．像处于事物世界一般之中的实在事物一样，是对每一个人而言可表达、可指称的对象．我们可以对此取得一致意见，可以以共同的经验为基础提出得到证实的共同的陈述等等．可是，以内在于心灵的方式所构成的构成物如何达到特殊的、作为观念对象性的交互主体性的存在呢？而这种对象性恰恰作为"几何学的"对象性，它虽然有其心理上的起源，但绝不是一种心理上的实在物．让我们来反省一下．在最初的现实的创建活动中，因而也在源初的"明见性"中，本原和自身存在一般来说并不产生任何一种能够具有客观存在的持久的获得物．活生生的明见性转瞬即逝 —— 当然是以这样的方式，即主动性立即转变为由对刚刚发生过的东西的逐渐暗淡的意识所组成的被动性①．这种"滞留"最终消逝了，但对于相关主体来说，这种"消逝了的"过程和过去并没有变成虚无，它们可以再度被唤醒．重新回忆的可能的主动性恰恰属于首先模糊地被唤醒之物的被动性，属于也许以越来越清晰的方式呈现出来的东西的被动性．在这种主动性中．过去了的体验是作为完全主动

① 这句话的法文翻译有误（胡塞尔的原文是"……die Aktivitaet alsbald in die Passivität des strömend verblassenden Bewusstseins vom Soeben – Gewesensein übergeht"，法文译文是"……l'activité dégénère aussitôt en passivité dans la conscience pâlissante et fluente du ce – qui – vient – juste – de – passer"）．故从德文原文译出 —— 中译者注．

性的再体验.现在,如果正是源初明见的创建,作为对其意向的纯粹充实,才构成了被恢复之物(被重新回忆起的东西),那么,实际创建的主动性便必然表现为与过去了的主动的再回忆相一致.与此同时,同一性的明见性也在源初的"一致"中显现出来:现在源初地得到实现的东西与此前明见地存在过的东西是同一个东西.相应地,对构成物进行任意重复的能力也通过重复的链条而奠基于同一性的明见性(同一性的一致)之中.然而,我们还没有超越主体及其明见的主观能力,我们因此也还没有产生出任何一种"客观性".可是,一旦我们考虑到移情的功能以及作为移情共同体和语言共同体的共在人类,这种客观性就会以可理解的方式初步地显现出来.在通过语言而相互理解的联系中,一个主体的源初创建及其产物能够被另一个主体主动地再解.如同在回忆中一样,在对由他人所创建的东西的完全的再解中,必然会发生一种在当下化的主动性中所进行的特有的和当下的共同活动,同时也会发生对在接受者和告知者的创建活动中的精神构成物之同一性的明见性意识,即使后来这两者成为交互性的.这些创建能够以相似的方式从一些人传播到人的共同体,而且明见性通过这些重复活动的理解链条进人到他人的意识之中.在由众多个人所组成的统一的交往共同体中,这种以重复的方式被产生的构成物,不是作为相似的构成物而是作为唯一的普遍构成物而被意识到的.

现在,我们还必须考虑到,通过这样一种现实的传递,即从在某个人那里源初地被创建之物向对它进行源初地再造的另一个人的传递,观念构成物的客观性还没有被完全构造出来.这里所欠缺的是"观念对象"的持久的存在,就是说,即使当发明者及其同伴不再清醒地处于这样的交往中的时候,或者一般来说当他们不再活着的时候,这些观念对象也会持存;这里所欠缺的是永恒的存在,就是说,即使没有任何人明见地实现过这些观念对象,它们依然存在.

书写的语言表述或记载的语言表述,其决定性的功能在于,它无需直接或间接的个人交谈便能够使传达成为可能,它可以说成潜在样式上的传达.因此,人类的共同体化跃上一个新的阶段.文字符号,从其纯粹的物体性方面来看,是单纯感性经验的对象,并且以一种持久的可能性的方式成为共同体中交互主体的经验对象.但是,作为语言符号,它们完全像语言声音一样能够唤醒它们通常的含义.这种唤醒是一种被动性.因此被唤醒的含义是被动地给予的,其方式类似于任何一种曾经沉人到昏暗之中的主动性,这种主动性在以联想的方式被唤醒时,一开始是作为或多或少明晰的回忆而被动地呈现出来.正如在回忆的情况中那样,在这里所提到的被动性中,这种被动唤醒之物可以说也必须回溯地转变①成相应的主动性:这是每一个作为语言存在的人源初所固有的重新激活的能力.这样,通过书写符号,便实现了意义构成物之源初存在样式的转变,[例如]在几何学领域中,便实现了以表述的方式而出现的几何学构成物之明见性的转变.可以说,这种构成物沉淀下来.但读者能够重新使它成为明见的,他能够重新激活这种明见性②.

因此,对表达的被动理解不同于通过重新激活意义而使它具有明见性.可是,也还存

---

① 这是一种在自身中被意识为重塑(ré - forme/Nachgestalt)的转变.

② 但这绝不是必然的.事实上它也不表示一种常规.即使没有这一点,读者也能理解.他能在没有自己的主动性的情况下,由于共同有效性而"立即"获得他所理解的东西.这样他的态度便是纯粹被动的和纯粹接受性的.

在主动性样式的可能性，存在这样一种思维的可能性：这种思维运行在以接受性的方式被采纳的纯粹的被动性之中，而且它仅仅处理被动地得到理解和接受的含义，缺乏源初主动性的明见性．被动性一般是联想的结合领域和融合领域，在这些结合和融合中，所有产生的意义都是被动的共同构成物(zusammenbildung)．这样，常常与一种表面的统一性一起出现的是一种可能的含义，也就是说，是一种通过简单的激活而出现的处于明见性之中的含义，然而这种实际上的重新激活的尝试所激活的只能是这种结合中的个别成分，而那种在总体中将它们进行统一化的意向却没有得到实现，相反却落空了，也就是说，这种意向在对无意义性的源初意识中摧毁了存在的有效性．

我们很容易看出，在一般的人类生活中，首先是在每一个个人从童年到成年的生活中，这种源初直观的生活 —— 它在其活动中以感性经验为基础创造出它的源初明见的构成物 —— 由于语言的误导便很快地在越来越大的程度上衰退下去．源初直观生活中越来越大的部分衰退到纯粹由联想所支配的言谈和阅读之中，因此，就如此获得的有效性而言，后来的经验常常是失实的．

现在人们会说，在我们这里感兴趣的科学领域中，在被用来获得真理并避免错误的思维领域中，很明显，我们从一开始就会非常关注防止联想的构成物(bildung)自由地发挥作用．由于精神产物在持续的语言获得物 —— 这些获得物最初以一种纯粹被动的形式为任何他者所重新承担和接受 —— 的形式中不可避免的沉淀过程，因此，这些联想的构成物仍然是一种经常的危险．我们对这种危险的预防不仅通过事后确信实际的可重新激活性，而且通过在明见的原创建之后立即确保它的重新激活及其永久保存的权能．当人们关注语言表达的单义性时，当人们关注通过对有关的词、句子以及句子关联进行精心的铸造而确保能单义性地进行表达的成果时，所发生的就是这种情况：每一个科学家 —— 不仅指发明者，而且也指每一个作为科学共同体成员的科学家 —— 在接受其他人必须接受的东西之后，都必然会这样做．因此这里所涉及的完全是特别意义上的处于与之相应的科学家共同体 —— 作为生活在统一的共同责任之中的认识共同体 —— 内部的科学传统．因此，根据科学的本质，科学工作者这一角色的持久的要求或个人的确信包括：所有由他们引入到科学陈述之中的东西，都是被“一劳永逸”地说出的，它们是“被确立起来”的，可以在同一性中无限地再造出来，可以在明见性中得到使用，并可用于以后的理论目的和实践目的 —— 因为按照其本真含义的同一性，它们可以毋庸置疑地被重新激活①．然而，对我们来说，还存在一个双重意义上的重要问题．第一，我们还没有考虑到这样一个事实，即科学思维在业已获得的成果的基础上获得了新的成果，这些新的成果又为更新的成果奠基，如此等等 —— 以一种确保含义传承这种增殖过程的统一性的方式．

从像几何学这样的科学的最终惊人的增长这一方面来看，可重新激活性及其要求和

① 当然，这首先涉及科学家在自身中为了获得可靠的重新激活能力而建立起来的坚定的意图指向．如果可重新激活性被赋予的目的只能以相对的方式得到实现，那么，根源于能够获得某物的意识之中的要求便同样具有相对性 —— 这种相对性也是明见的，并且会继续存在(persiste)．对真理的客观的、绝对确定的认识最终是一种无限的理念．

能力的情况如何呢?当每一个研究者在这个大厦中他所在的位置上工作时,那些在这里无法省掉的工作间隙和睡眠空隙的情况如何呢?当他重新开始他的现实的研究工作时,他必须首先穿越整个巨大的奠基性链条,直至原前提,并且现实地重新激活这个总体性吗?很明显,在这种情况下,一门像我们现代几何学这样的科学就是绝对不可能的.然而,蕴涵在每一阶段成果的本质之中的情况是:这些成果的观念存在的意义不仅是事实上较后发生的意义,而且,由于意义奠基于意义之上,在先的意义在有效性的维度中将某种东西传给后来的意义,它甚至以某种方式被并入到后来的意义之中;因此,在精神建筑物的内部,没有任何一个部分是独立的,因而也没有任何一个部分能够直接地被激活.

有一些科学尤为如此.它们像几何学一样在观念产物中、在观念性中有其课题性的领域,正是从这些观念性出发,一些新的更高阶段的观念性总是一再地被产生出来.在所谓的描述科学中,情况就完全不同了,在这里,理论旨趣在进行分类和描述的全部过程中保持在感性直观性之中,而感性直观性在这里代表着明见性.至少一般来说,这一点使得每一个新的命题就其自身而言都能明见地得到兑现.

可是,与此相对,像几何学这样的科学何以可能呢?它作为等级观念性的建构,作为系统的、无限增长的建构,如何能在活生生的可激活性中保持其源初的含义性的效力?而它的认知思维在没能激活以前的认识阶段(直至最底的层面)的情况下也一定能产生出新的东西.即使这一点在几何学的较为原始的阶段还是可行的,但最终这种权能一定会在获得明见性的努力中过分地耗尽自己,并且使更高阶段的创造力成为不可能.

在这里,我们必须在其原本性中考虑以特殊方式与语言连接在一起的"逻辑"活动,以及在这种活动中有其特殊源泉的观念的认知构成物.从本质上说,任何一种出现在纯粹被动的理解中的句子构成物都包含一种特有的主动性,对于这种主动性,我们最好用"解释"来标明它.以被动形式(也许处于回忆的维度中)呈现的句子,或是通过听而被动地得到理解的句子,首先在我的被动参与中作为有效之物而得到单纯的接受,而且在这种形态中,它已经是我们的观点了.我们把这一点与对我们的观点进行解释的具有重要意义的特殊的主动性区分开来.如果说这个句子在第一种形式中是以不加区分的方式接受的、统一的意义,是单纯有效的意义,具体地说,是单纯有效的话语,那么现在,这个未加区分的模糊性本身通过一种主动的方式得到解释.如果我们反思一下,例如,我们在马马虎虎的读报过程中的理解方式以及单纯的接受"新闻"的方式,那么,我们就会看到,这里具有一种对存在有效性的被动接受,通过这种被动接受,被读过的东西首先变成了我们的观点.

现在,正如已经指出的那样,解释的意向和主动性恰恰是一种特殊的东西,因为这种主动性以一种不同的方式表达出所读过的东西(或其中一个有趣的句子),即把一个个的意义成分从以被动的和统一的方式接受下来的东西的模糊结构中分离出来,然后依据新的样式,以个别有效性为基础,把整体的有效性带入到它的主动的履行中.现在从被动的意义形态出发,出现了一种通过主动的生产而形成的形态.因此,这种主动性就是一种特殊的明见性,一种在主动性中通过本原的创建样式而出现的构成物的明见性.在这种明见性方面,共同体化也是可能的.被解释、被说明的判断成为可传承的观念对象性.当我们谈到句子和判断时,逻辑学唯一所指的正是这种对象性.这样,由此就普遍地标明了逻

辑学的领域，也即普遍地标明了逻辑学与之相关的存在领域，只要逻辑学是关于一般命题的形式理论.

依赖这种主动性，更进一步的主动性才成为可能.如以对我们有效的判断为基础明见地[1]构成(bildungen)新的判断.这是逻辑思维及其纯粹逻辑明见性的特征.所有这些，即使当判断变成假设，也仍然不变，这时，不是我们自己进行判断，而是我们通过思想将自己置身于陈述和判断之中.

在这里，我们把我们的考察局限于我们被动地获得的以及只不过是接受到的语言学的句子.关于这一点，我们还必须注意到，句子本身在意识上表现为由源初的实际的主动性所产生的源初意义的再造性转变，因此本身指向这样一种生成.在逻辑明见性的领域，以前后一致的形式所进行的演绎和推论，经常起着本质的作用.另一方面，我们也必须注意到那些建构性的主动性，这些主动性活动于虽然“已经得到解释”但并没有达到源初明见性的几何学的观念性之中.(源初的明见性不可混同于“公理”的明见性；因为公理原则上已经是源初的意义构成(sinnbildung)的结果，而且总是为这种意义构成本身所支持.)

现在，在几何学以及那些所谓的“演绎”科学——人们这样称呼它们，尽管它们绝不仅仅限于演绎——的认识论的宏伟大厦中，通过向原明见性的回溯而在十足的源初性中所进行的完整的和真正的重新激活的可能性的情况又是怎样的呢?在这里，下面这条基本的法则以绝对普遍的明见性发生作用：如果这些前提直至最源初的明见性实际上都能够得到重新激活，那么，它们的明见性的结论便也是如此.显然，由此可见，从原明见性出发，起源的本真性必定会通过如此之长的逻辑推论的链条而传播开来.然而，如果我们考虑到个人以及共同体在通过统一的行动把数百年来的逻辑链条实际地转变成真正源初的明见性链条的能力方面具有明显的有限性，那么我们就会注意到，这个法则本身遮蔽了一种理想化过程：即解放了对我们能力的限制并以某种方式使之无限化.关于这样一种独特的理想化过程，我们以后还将讨论.

于是，在这里，正是这些对普遍的理性本质的洞见澄清了“演绎”科学整个的有条理的生成过程，并因此而澄清了对它们来说具有本质性的存在方式.

这些科学并不是以记载下来的命题形式出现的完全现成的遗产，而是处于一种活生生的、以生产的方式进步的意义形成过程中，这种形成过程通过逻辑的应用总是支配着被记载下来的东西，即以前生产的沉淀物.可是，逻辑的应用从带有被沉淀下来的意义的命题出发只能产生具有同样性质的其他命题.所有新的获得物都表达了一种实际的几何学真理，这一点是先天地确定的，前提是，演绎大厦的基础在源初的明见性中得到实际上的产生和对象化并因此而在普遍可理解的获得物中得以构造出来.人与人之间以及时代与时代之间的连续性必定已经是可行的.很明显，源初的观念性从文化世界的前科学的所予物出发的制作方法必定在几何学的存在之前就已经通过稳定的命题而被记录并被固定下来；此外，很明显，这样一种能力，即让命题从具有语言理解上的模糊性转入对其明见性含义进行重新激活的明晰性，肯定已经以自己的方式得到了传承，而且总是能够

① 德里达在译文中漏掉了“evidente”一词——中译者注.

得到传承.

只有当这一前提得到满足,或者只有当那种对这一条件是否在将来任何时候都能得到充实的关注始终存在时,几何学作为演绎科学,才能在逻辑构造(bildungen)的进程中保持其本真的起源意义.换言之,惟其如此,每一个几何学家才能从每一个命题 —— 这一命题不仅作为沉淀下来的(逻辑的)命题意义,而且作为它的现实的意义、真理的意义 —— 在自身中所包含的东西出发走向间接的明见性.整个几何学都是这样.

演绎法在其进程中遵循形式逻辑的明见性;可是,如果没有对包含在奠基性概念中的源初活动实际地进行激活的能力,如果因此也缺乏其前科学材料的对象和方式,那么几何学就会成为一种意义空乏的传统;如果我们缺乏这种能力,那么我们绝不可能知道,几何学是否具有一种本真的、实际上可兑现的意义.

可是,很遗憾,这正是我们的状况,这正是全部近代的状况.

前面所规定的"前提"事实上从未实现过.基本概念的意义构成(sinnbildung)的活生生的传统实际上是如何发生的,我们会在几何学的初等教育及其教科书中看到;我们在那里实际上学到的东西就是在严格的方法论的内部对完全现成的概念和命题进行使用.通过画出的图形对概念所进行的感性图解代替了原观念性的实际产生过程.接下来的事便由成功所为 —— 这种成功不是越出为逻辑方法所固有的明见性之外的实际的理性明见性,而是应用几何学的实践上的成功,是它的巨大的、虽然尚未得到理解的实践上的有用性.对此还要补充一点,即科学生活完全沉湎于逻辑活动的危险,以后我们对历史上的数学研究一定会表明这一点.

通过对本质前提 —— 像几何学这样的诸科学的真正源初的传统的历史可能性正是以这些本质前提为基础的 —— 的揭示,我们就会理解,几个世纪以来,这些科学如何能够生气勃勃地向前发展,但并没有因此而成为真正的科学.由对命题和方法的继承而来的传递,对于越来越新的命题的以及越来越新的观念性的逻辑建构来说是必要的.这种传递恰恰能够历经各个时代而不间断地持续下去,而对原开端进行重新激活的能力以及因此对所有后来阶段的意义之源泉进行重新激活的能力并没有被继承下来.于是,所缺少的正是那种曾经赋予或必定曾经赋予所有命题和理论以一种人们必须总是重新将其置于明见性之中的原 —— 开端的意义的东西.

无论如何,具有语法上的统一性的命题以及命题构成物,无论它们以怎样的方式被产生出来并变得有效 —— 即使是通过单纯的联想,当然都有其自身的逻辑含义,即人们必须通过解释而将其置于明见性之中的含义;这一含义因此必须总是被一再地认作同一的命题,不管它在逻辑上是一致的还是矛盾的.在后一种情况下,它在现实判断的统一性中是无法实施的.在与其领域内部相关的命题中,在人们可以以演绎的方式从这些命题所获得的体系中,我们具有一个观念同一性的领域,对于这些观念同一性来说,存在着一些容易理解的可以长期传递的可能性.但现在,一些命题表现为作为传统的过去了的文化构成物本身;可以说,它们提出了这样一种要求,即成为对人们必须以源初的方式将其置于明见性之中的真理意义所进行的沉淀过程,然而出于来自联想的歪曲,它们绝不是必然具有这样一种意义.因此,即使整个的预先被给予的演绎科学和处于统一的有效性之中的总体的命题体系,最初也只不过是一种只有通过重新激活的现实能力才能将自己

证明为对它所声称的真理含义进行表达的要求.

正是从这一状况出发,我们才能理解这一要求 —— 即在近代广泛传播并最终得到普遍贯彻的所谓对科学进行“认识论奠基”的要求 —— 最深刻的理由,然而我们从未弄清楚[①],这些如此令人钦佩的科学真正缺少的是什么.

现在,对于那些涉及真正源初的传统 —— 它的标志因此在于在其实际上的最初开端中的原明见性 —— 的断裂的更为详尽的情况,我们可以揭示出一些可能的并且完全可以理解的理由以便对它进行解释.在开端时期的几何学家的口头合作中,他们当然感觉不到这样一种需要,即对前科学的原材料的描述,以及对几何学的观念性与这些原材料之间相关联的方式的描述,然后是对这些观念性的第一批“公理性的”命题的出现方式的描述,做出精确的规定.此外,逻辑上更高的构成物(höherbildungen)还没有达到这样的高度,以至于我们不能一再地回溯到源初的意义.另一方面:对于源初的成果来说,对那些从这些成果中导出的法则的实际应用具有非常明显的可能性,这种可能性显然很快便在实践中导致一种由习惯教导给我们的方法,以便在需要的情况下借助于数学完成有用的任务.当然,这种方法即使在原明见性缺席的情况下也能得到继承.一般来说,正是这样,完全被抽空了意义的数学才能在连续的逻辑建构中得到传递,正如另一方面对技术应用的方法论情况一样.实践的有用性本身在其异乎寻常的领域中成为促进和评价这些科学的主要动机.因此,不言而喻的事情也就在于,源初真理的意义一旦丧失,我们便很难感觉到它了,以至于我们首先必须唤醒相应的回溯的追问这种需要本身,不仅如此,我们第一步还必须揭示出这种追问的真正意义.

我们的原理性的结果具有一般性,这种一般性延伸至所有所谓的演绎科学,甚至预示着所有科学所具有的那些相似的问题和相似的研究.所有科学肯定都具有这种从沉淀下来的传统出发所进行的运动性,处于传递之中的活动在产生出新的意义构成物的过程中一再地运用这些沉淀下来的传统.它们[这些科学]以这种存在方式持续地穿越各个时代,因为所有新的获得物又沉淀下来,并重新变成使用的材料.在任何情况下,这些问题,这些澄清性的研究,以及这些原理上的理性明见性都是历史的(historisch).我们处于人类的视阈之中,处于我们自己现在就生活在其中的唯一的人类视阈之中.对于这一视阈,我们具有一种活生生的、持久的意识,而且我们把它作为蕴涵在我们每一个瞬间的当下视阈之中的时间视阈而意识到.对于这唯一的人类,本质上有一个唯一的文化世界与之相对应,这个文化世界作为处于自己的存在方式之中的生活环境,对于每一个历史时代和历史人类来说,每一次恰恰都是传统.因此,我们处于历史的视阈之中,其中的一切都是历史的,不管我们所知道的确定的东西是多么的少.可是它[这种视阈]具有自己的本质结构,这种结构能够通过有条不紊的询问而得以揭示.通过这种结构得到预先规定的是一般可能的特殊问题,例如在各门科学中对起源的回溯性追问,即由于它们所经过的历史的存在方式而为它们所固有的追问.在这里,可以说,我们被引回到第一次意义构成(sinnbildung)的原材料上,引回到位于前科学的文化世界之中的原前提上.文化世界本身无疑也有自己的起源问题,但它暂时还没有成为问题.

① 休谟除了竭力回溯地追问已发生的观念以及科学观念一般的原印象之外,还做了其他的事情吗?

数学与哲学

当然，这些带有我们所赋予的特殊样式的问题立即就会引起与人类和文化世界相关的存在方式的普遍历史性以及这种历史性的先天结构的总体性问题．然而，像对几何学的起源进行阐明这样的问题具有自己的封闭性，它规定追问不要越过前科学的材料．

我们所进行的补充说明是与在我们的哲学——历史状况下可以料到的两点反对意见联系在一起的．

第一点是：想把几何学的起源问题彻底地追溯到某个无法找到的，甚至连传说也不是的几何学上的泰勒斯，这是怎样的咄咄怪事？几何学存在于它的命题、它的理论中．当然，我们必须而且也能够以明见的方式彻底地为这个逻辑大厦承担责任．毫无疑问，这样我们便达到最初的公理，而从这些公理出发，我们便抵达使基本概念成为可能的源初的明见性．它所讲的如果不是"认识论"，特别是在这里，如果不是几何学的认识论，那它讲的还能是什么呢？人们不会想到要把认识论的问题一直引回到那个虚构的泰勒斯——再说，这完全是多余的．在像这样当下地立于我们面前的概念和命题本身中，它们的意义首先并不是表现为明见的意指，而是表现为带有被意指的但尚被遮蔽的真理的真命题，对于这种真理，我们当然能够通过对［这些概念和命题］本身［的运用］并将其置于明见性之中的方式而把它揭示出来．

我们的回答如下：的确，任何人都没有想到这种历史的回溯；的确，认识论从未被看做一个特有的历史．但恰恰由于这一点，我们才对过去进行质疑．对于这样一种万能的教条，即在认识论的阐明与历史的说明以及精神科学范围意义上的心理学说明之间存在根本上的断裂，在认识论的起源与发生学的起源之间存在根本上的断裂，只要我们不以通常无法接受的方式对"历史"、"历史说明"以及"生成"等概念进行限制，它就会从根本上被推翻．或者毋宁说，这样被推翻的东西恰恰是这种限制，正是由于这种限制，历史的本原的和最深刻的问题才始终被遮蔽着．如果人们思考一下我们提出的分析（虽然很初步，但毫无疑问，这些分析今后必然会把我们引向新的深层的维度），那么这些分析恰好就会明见地表明，我们的知识，［对］几何学［进行规定的知识］，当下活生生的文化形态，它们作为传统同时又作为传承的活动，绝不是在历史形态的链条中引发连续性的外在因果性知识——甚至也绝不会是由归纳而来的知识，在这里以归纳为前提是完全荒谬的，相反，对几何学的理解以及被给予的文化事实一般就已经是对其历史性的意识，尽管是以"蕴涵的"方式．但这并不是一种空洞的言词，因为对于所有在"文化"这一标题下被给予的事实来说，不论它所涉及的是与生存需要相关的最低文化，还是最高文化（科学、国家、教会、经济组织等），下面的情况都具有完全普遍的真理性：在所有的把这一事实作为经验事实来理解的过程中，都已经存在这样一种"共同的意识"，即这一事实是由人的构成活动所产生的构成物．不管这种意义怎样地隐蔽，不管我们对这一意义的"共同意指"如何具有纯粹的"蕴涵性"，它仍然包含着说明、解释和澄清的明见的可能性．任何说明，任何从解释向明见化的过渡（即使它可能很快就会停下来）都不过是历史的揭示而已；就其自身而言，它本质上是一种历史（ein historisches）行为，而且作为这样的行为，它在其自身之中以一种本质必然的方式具有其历史（historie）的视阈．当然，这同时也就是说：被理解为总体性的当下文化之整体"蕴涵着"处于不确定的普遍性之中但在结构上又处于确定性的普遍性之中的过去文化之整体．更准确地说，这个当下文化之整体蕴涵着彼此

相互暗含的连续性过去，每一个过去本身都构造着一个过去了的文化的当下．这种整体的连续性是直至当下的传承过程的统一性，这一当下是我们的当下，而且由于它本身处于持续的活生生（lebendigkeit ）的流动之中，它也是一个传承者①．正如我们曾说过的那样，这是一种不确定的普遍性，可它具有一种原则上的结构、一种能够从已经表明的东西出发进行更为广泛的解释的结构，在这种结构中，对实际的具体的现实所进行的任何研究和规定的可能性也都得到奠基和“蕴涵”．

因此，将几何学置于明见性之中，就是揭示出它的历史传统，不管人们对此是否有明确的意识．为了不停留于空谈或无差别的一般性状态，这种认识所需要的只是，通过在自身中从当下出发所进行的探究，以一种既成的、有条理的方式恢复有差别的明见性．对于这种明见性，我们此前曾指出过它的形式（可以说，在有些段落中，我们曾不深人地讨论过它）．如果得到系统的实行，那么这些明见性所产生的就不是别的，而恰恰是具有其最丰富内涵的历史的普遍先天．

我们现在也可以说：历史从一开始就不过是源初的意义构成（sinnbildung）和意义沉淀之间的相互交织和相互蕴涵的（des miteinander und ineinander）活生生的运动．

任何作为历史事实 —— 不管是作为当下的经验事实还是作为由历史学家所证实的过去的事实 —— 被确定的东西，都必然具有其内在的意义结构；可是，我们每天因此在动机关联方面以可理解的方式所发现的东西比以往任何时候都更具有其深刻的、延伸到越来越远的内涵，对于这些内涵，我们必须加以询问和揭示．任何一种关于事实的历史学始终都是让人无法理解的，因为这种历史学总是直接从事实出发以纯粹素朴的方式做出结论，它从未把普遍含义的基础当做主题，尽管这种结论的整体正是奠定于其上的；因为这种历史性从未探究过为这种含义基础所固有的强大的先天结构．只有揭示出普遍的本质结构②—— 这种结构处于我们的历史当下之中并因此而处于一切过去或未来的历史当下本身之中，而且从总体性的观点看，只有揭示出我们生活于其中，我们全人类（从其总体性的普遍本质结构来看的全人类）生活于其中的具体的历史时间，只有这样一种揭示，才能使真正具有理解力和穿透性的历史学、使本真意义上的科学的历史学成为可能．这是具体的历史先天，这种先天包含了全部的存在者，而这些存在者都处于其历史性的正在生成和已经生成之中或处于其作为传统和传承活动的本质存在之中．刚才所说的东西涉及“历史当下一般”、历史时间一般这种总体的“形式”（form）．可是，那些在其统一的、作为传统和活生生的自我传承的历史存在中有其位置的特殊文化形态在这种总体性

① 这一句与胡塞尔的原文稍有出人．胡塞尔的原话是："Und diese gesamte Kontinuitaet ist eine Einheit der Traditionalisierung bis zur Gegenwart, die die unsere ist, und ist als sich selbst in strömend – stehender Lebendigkeit Traditionalisieren."（"这一总体的连续性是直至当下 —— 这一当下是我们的当下 —— 的传承的统一性，而且是作为以流动地持存着的生动性的方式自我传承的过程"）德里达的译文为："Et cette continuité dans son ensemble est une de la traditionalisation jusqu'au present qui est le nôtre et que, en tant qu'il se trouve lui – même dans la permanence d'écoulement d'une vie (Lebendigkeit), est un traditionaliser." 中文据德里达的文字译出 —— 中译者注．

② 在人类的社会历史本质结构中以外在的方式被构造起来的人的表面结构，但是还有对更深的历史性、对相关个人的内在历史性进行揭示的（结构）．

中仅仅具有一种位于相对独立的传统中的存在、一种仅仅作为依赖性成分而存在的存在.相应地,我们现在还必须考虑到历史性的主体,即那些创造文化形态(bildung)并作为总体性而发挥作用的个人:作为创造性个人的人①.

就几何学所涉及的东西而言,在我们展现出基本概念已经成为无法穿透的遮蔽之后,在我们依据其最初的基本特征使这些基本概念本身成为可以理解的之后,人们现在认识到,唯有对几何学的历史起源进行有意识的问题化(在历史性一般的先天之物这一总体性问题的内部)才能提供出本真源初的、同时能为普遍历史学所理解的几何学方法;这一点不论对于所有的科学,还是对于哲学,都是一样的.因此,从原则上说,依据通常的事实历史学的样式,哲学和特定学科的历史便绝不可能让人们真正理解它们的主题.因为哲学以及特定学科的本真历史不是别的,而是把当下被给予的历史意义的构成物即它们的明见性——完全沿着历史记载的返回链条——一直回溯到对这些构成物进行奠基的原明见性的被遮蔽的维度②.在这一方面,这一特有的问题本身只有通过诉诸作为一切可想象的理解问题之普遍源泉的历史先天才能得到理解.在科学中,真正的历史说明的问题,与"认识论的"论证和阐明的问题是一致的.

我们还必须预计到第二种反对意见,这是非常重要的意见.从历史主义——其帝国主义以不同的形式延伸得很远——这一方面来看,我只能指望它对超越通常的事实历史学的深层研究计划(正如本文所表述的那样)具有有限的感受性;特别是因为,这种研究正如"先天"这一表述已经表明的那样,要求一种绝对无条件的、超越一切历史事实性的明见性,一种真正决然的明见性.人们会提出反对意见:在我们已经获得了如此丰富的证据证明一切历史事物的相对性以及一切对历史地起源的世界统觉直至"原始"部落的统觉的相对性之后,还想揭示历史先天、绝对的超时间的有效性并声称已经把它们揭示出来了,这是多么的天真啊!每一个民族和部落都有自己的世界,对于这同一个既定的集团而言,不论是在神话——巫术的范畴中,还是在欧洲——理性的范畴中,这个世界中的一切都是很好地协调一致的,所有的东西都能够得到完美的说明.每一个民族或部落都有自己的"逻辑",因此,如果这种逻辑用命题来说明,那么它便有了"自己的"先天.

但是,让我们反思一下确立历史事实一般,因此也包括为反对意见提供基础的事实的方法论;就这一反对意见的对象而言,让我们反思一下这一方法论所预设的东西.在精神科学(作为"如其事实上所曾是"的科学)为自己所提出的任务中,难道不是已经存在着一种不言自明的预设吗?难道不是已经存在着一种从未得到过思考、从未成为主题的有效性基础吗?难道不是已经存在着一种绝对无懈可击的明见性的基础吗?——如果没有这种基础,历史性便成为一个无意义的事业.通常意义上所有的历史学的提问和指明

---

① 毫无疑问,这种历史的世界在开始时是作为社会历史的世界而被预先给予的.但是,这种历史的世界只有通过每个个人的内在历史性才是历史的,作为个别的个人,他们处于把他们与其他被共同体化了的个人连接起来的内在历史性之中.让我们回忆一下,我们在对记忆以及寓居于其中的恒久的历史性所作的某些最初的和不充分的阐述中所说的话.

② 可是,对于科学来说,原明见性是什么,这是由某个提出新的历史问题的知识人或知识界所规定的.这些问题既是处于社会历史世界中的外在历史性问题,也是深层维度上的内在历史性问题.

都已预设了作为问题之普遍视阈的历史，这一视阈虽然不明显，但仍是作为隐含的确信的视阈，这一视阈在其整个不确定的、模糊的背景中正是所有确定性的前提，就是说是所有想要对一定的事实进行确定和研究的计划的前提.

在历史中，本身最初的东西是我们的当下.我们总已意识到我们当下的世界，并意识到我们生活于其中，我们总是被未知现实的视阈的敞开的无限性所包围.这种知识作为视阈的确信并不是学会的知识，它从未在过去某一时刻化为现实，也没有单纯地变成作为再次被湮没的知识的背景；为了能够得到主题性的说明，这种对视阈的确信必须被设为前提，为了想知道我们还不知道什么，这一点已经被设为前提了.所有的非知都与无知的世界有关，然而对于我们来说，这一无知的世界作为世界、作为所有当下问题的视阈以及因此同样包含了所有特定历史的问题的视阈预先便存在着.这些特定历史的问题所针对的是人，因为这些人按照共同体化了的相关性方式，在世界中活动、创造，并一再地在持久的意义上改造着这个世界的文化面貌.此外，难道我们不知道 —— 我们已经谈到过这一点 —— 历史的当下在其身后具有自己的历史的过去?难道我们不知道历史的当下产生于历史的过去?难道我们不知道历史的过去是一个过去来源于另一个过去的诸过去的连续统，每一个过去作为过去了的当下都是传统并且从自身出发又产生出传统?难道我们不知道当下与蕴涵在当下之中的总体的历史时间，从历史的观点看，是统一的、独一无二的人类的当下吗?—— 这种统一所依据的是人类在文化活动中的世代链接及其不断的共同体化过程等，而这种文化活动的进行正是从总已由文化所塑造的东西出发的，不论这种塑造是在共同劳作中还是在相互关注中.难道所有这些没有表明一种普遍的关于视阈的“知识”、一种隐含的，但我们可以根据其本质结构加以系统阐明的知识吗?现在，在这里成为重大问题的东西，难道不就是所有的提问活动都融入其中，并因此而被所有的提问活动设为前提的视阈吗?于是，对于历史主义所强调指出的事实，我们首先还没有必要进行某种批判的考察；只要指出下面这一点就够了：关于它们的事实性的断言，已经以历史的先天为前提 —— 如果这种断言有意义的话.

但是，还是不由得产生一个怀疑，对于我们一直所诉诸的视阈的解释，不应该仍然停留在表面的和模糊的谈论中，它本身必须达到一种科学性.它借以表达的句子必须是确定的，并总是可以一再地被置于明见性之中.通过什么方法，我们才能获得历史世界的普遍的，同时又是确定的，而且永远是真正源初的先天呢?每一次当我们思义时，我们都明见地发现自己具有一种能力，一种根据自己的意愿进行反思的能力，一种对视阈进行审察并根据解释而深入其中的能力.但是，我们能够，而且我们自己也知道我们能够，通过思想和想象完全自由地对我们人类的历史存在以及在这里被解释为这种存在的生活世界的东西做出变更.恰恰在这种自由的变更行为中，在对生活世界的想象性的贯穿行为中，以一种决然的明见性的方式出现了一种普遍的本质成分，这一成分实际地存在于所有的变项中，就像我们以一种决然确信的方式相信它一样.这样，我们便摆脱了与事实意义上的历史世界的一切关联，而将这一世界本身看做是思想的诸种可能性之一.这种自由以及这种对决然常项的目光朝向一再地 —— 以能够随意对常项构成物进行重复的明见性的方式 —— 将常项作为同一的东西，即作为在任何时候都能够被置于源初的明见性之中的东西、作为在单义的语言中被确定的东西、作为始终蕴涵于活生生的视阈之流

中的本质的东西，而再造出来.

根据这一方法，通过对我们此前所提及的形式一般性的超越，我们也能把一定的决然之物当做主题.这种决然之物，几何学的原创建者能够从前科学的世界出发对其加以利用，并且必定把它看做进行观念化的材料.

同几何学和与之相关的诸科学打交道的是时空性以及其中的可能的，尤其是作为可测度的数量的形态、图形以及运动状态、形状变化过程等等.现在很清楚，尽管我们对最初的几何学家的历史环境知之甚少，但作为不变的本质成分，下面的情况是肯定的：这是一个诸“事物”(dinge)的世界(其中有作为这一世界之主体的人本身)；尽管不可能所有的事物都是单纯的物体，但所有的事物都必然具有一种物体性，因为必然存在于共同体之中的人就不可以被设想为单纯的物体，而且，不管在结构上与物体相符的文化对象是什么，它们无论如何都不可能仅仅局限于物体的存在.同样很清楚的是——至少在一个必须通过仔细的先天阐明而加以查证的本质核心中，这些纯粹的物体具有与“材料的”性质(颜色、温度、重量、硬度等)相关的时空形态.此外，还有一点很清楚的是，形态中的某些规格在实际生活的需要这一层面上显露出来，而且技术实践总是已经朝向对每一次都具有优先地位的形态进行修复并按照渐进的方向对同样的形态加以改进.

从事物形态中抽取出来的东西，首先是面——或多或少“光滑的”的面，或多或少完美的面；还有棱，或多或少粗糙的棱，或者以自己的方式或多或少“平滑的”棱；换言之，或多或少纯粹的线、角，或多或少完美的点；再说，例如，在线中，直线受到特别的偏爱，在面中，平面受到特别的偏爱：比如，为了实践的目的，由平面、直线和点所限定的平板特别受偏爱，而出于众多实践的兴趣，弯曲的面在总体上或对于个别用途而言则是不受欢迎的[①].因此，对平面的修复和完善(抛光)在实践中总是发挥着作用.这一点对于公平合理地进行分配的意向来说也是如此.在这里，对量的粗略估计转变成通过对相等部分的计算而进行的对量的测定.(在此处，本质形式也会从事实性出发通过变更的方法而得以认识.)所有的文化都包含测量，但在完善程度上高低不同.在[如其作为]本质可能性的历史现实中，在这里[如我们所知的]作为事实的历史现实中，某种或许低级或许高级的测量技术确保了文化的发展——于是我们也总是能够把某种建筑制图技术以及田地和道路距离丈量技术等等设为前提——[这种技术]总已存在于那里了，总已得到充分的加工了，而且这时已经被预先给予那位尚不知道几何学但可以被设想(denkbar)为几何学的发明者的哲学家了.作为哲学家，当他超越实践的有限的周围世界(由房屋、城市、地区等构成的世界以及在时间中由日、月等周期性事件所构成的世界)而走向对世界的理论观察和理论认识时，他便以一种有限的方式把已知和未知的时间和空间当做开放的无限视域中的有限的东西而拥有了.但是，他还没有因此而拥有几何学的空间、数学的时间以及所有那些通过充当材料的有限之物而应该成为新型的精神产物的东西；而且，他还没

---

① 这句话与原文有出入.胡塞尔的原话是，“… während die im ganzen oder an einzelnen Stellen krummen Flächen für vielfache praktische Interessen unerwünscht sind”(“而完全地或部分地弯曲的面，对于多种多样的实践兴趣来说，则是不受欢迎的”).德里达的译文为：“… alors que dans l'ensemble ou pour des usages particuliers, les surfaces courbes sont indésirables en raison de multiples préoccupations pratiques”——中译者注.

有借助于他的处于时空性之中的各种各样的有限形态而拥有几何学的形态和运动学的形态;很明显,< 这些东西 >[这些有限之物],这些 < 作为 >< 产生于 > 实践的构成物,这些抱有逐步完善的意图的构成物,仅仅是新型实践的支架,从这里出发所产生的是一些名称虽然相似但却是新型的构成物.

下面这一点预先就是一目了然的:这种新的类型将是来自观念化的精神活动即"纯粹"思维的产物.这种纯粹思维的材料位于我们已经描述过的这一人类的及其事实的周围世界中的普遍的预先被给予的东西之内.它从这些材料出发创造出这些"观念的对象性".

现在的问题就将在于,通过诉诸历史中的本质之物,从而揭示出历史起源的意义,这种意义已经能够且必然能够赋予所有几何学的生成以其持久真理的意义.

现在,突出并确定下面的洞察具有特别的重要性:只有在一切可想象的变更中所存在的由不变的时空形态领域所构成的决然普遍的内容以观念化的方式得到考虑时,观念的构成物才能诞生,这种观念的构成物对于人类所有未来的时代来说永远都是可以再次得到理解的,因此是可以传承的,并可以以其同一的交互主体性的意义被再造出来.这一条件远远超越了几何学,它对于所有那些应该以无条件的普遍性的方式而具有可传承性的精神构成物都有效.只要科学家的思想活动把某种"为时间所束缚的"东西,也就是说,为他的当下的纯粹事实性所束缚的东西,或是某种作为纯粹事实的传统而对他有效的东西,引入到他的思想中,那么,他的构成物也就同样具有仅仅为时间所束缚的存在意义;这一意义只有对那些有同样的纯粹事实的理解条件的人来说,才是可以重新理解的.

这是一种普遍的坚信:几何学及其全部的真理.不仅对于所有作为历史事实而存在的人,而且对于所有我们在一般意义上能够想象得到的人,对于所有的时代,所有的民族,都是无条件地普遍有效的.这种坚信的原则性前提从未受到过探讨,因为它们从未在严格的意义上成为问题.但对我们来说,下面这一点也变得很清楚了,即对于历史事实的每一次确定都对无条件的客观性提出了要求,而且它同样也以这种不变的或绝对的先天为前提.

只有 < 在对这种先天的揭示中 >,超越一切历史事实性,一切历史的环境、民族、时代和人类的科学才是可能的;只有这样,科学才能作为永恒真理(aeterna veritas)而出现.那种有保障的、从暂时被抽空了的科学明见性出发向原明见性进行回溯地追问的能力所依靠的恰恰是这个基础.

这样,我们不就面临着理性的广袤而深邃的问题视阈吗?即那种在每一个不管多么原始的人那里,也即在作为"理性动物"的人那里,发挥作用的同一个理性的问题视阈吗?

这里不是探讨这种深刻问题的地方.

从所有这一切出发,我们无论如何必须认识到,历史主义想从为时间所束缚的人属(menschentum)的神秘阶段[①]或其他的统觉类型方面、阐明数学的历史的或认识论的本质,这样一种历史主义是彻头彻尾的颠倒.对于具有浪漫主义情怀的人来说,数学的历史

① 德里达用了"阶段"(stade),胡塞尔的措辞是"性质"(bewandtnisse)——中译者注.

方面或史前方面的东西可能具有特别的吸引力;可是,在数学方面沉迷于纯粹的历史事实性,这恰恰是误入浪漫主义的歧途,而且忽略了特有的问题、内在历史的问题以及认识论的问题.这样,不言而喻,人们的目光不可能不关注这样一个事实,即不论每一种类型的全部的事实性是什么,不论为了证明反对意见而提出的这种类型的事实性是什么,它们在人类的普遍之物的本质成分中都有其根基,一种贯穿于所有历史性的目的论的理性恰恰表现在这一根基之中.这样便显示出与历史的总体性有关,并与最终赋予历史以其统一性的总体意义有关的独特的提问方式.如果通常的事实历史学一般,尤其是在现代实际上普遍地扩展到整个人类的历史学一般,归根到底还有某种意义的话,那么,这种意义只能奠基在我们在这里可以称之为内在历史的东西之中,而且作为这样的东西,奠基在普遍的历史先天之中.这一意义必然进一步导向我们曾表明的最高问题,即理性的普遍目的论问题.

如果在这些详述——这些详述阐明了我们向非常一般的和多方面的问题视阈的内部所作的纵深探讨——之后,我们把下面这一点看做某种有充分保障的基础,即人的周围世界本质上是同一的,现在和永远都是同一的,因此对于那种与原创建和持续传承这方面相关的东西来说,也是同一的,那么,我们便可以根据我们自己的周围世界,按照某些步骤并仅仅以预测的方式指明,对于被称为"几何学"的这种意义构成物(sinnbildung)的观念化的原创建问题而言,我们应该更仔细地思索什么东西.

译者后记 这是一本有着奇特出身的书.

1936年胡塞尔写成一篇对几何学进行历史的和现象学的沉思的文稿(手稿编号为K III 23),1939年欧根·芬克以《论几何学的起源》(《Vom Ursprung der Geometrie》)为题,将其发表于布鲁塞尔《国际哲学评论》(《Revue Internationale dePhilosophie》)杂志第一年度第2卷上.这篇文章后于1954年作为附录III收入《胡塞尔全集》第六卷《欧洲科学的危机与超越论的现象学》中.在附录III中没有出现《论几何学的起源》这一标题,后人通称这一附录为《几何学的起源》.

文章发表后,虽有学者据此对胡塞尔前后期思路的连续性表示过怀疑(如梅洛-庞蒂),或者对胡塞尔晚期思想与马克思主义进行融合的可能性抱有期待(如唐·迪克陶).但实际上,在学术界,尤其是在法国学术界,这一沉思并未引起广泛关注.

德里达在巴黎高师读本科时便已敏锐地注意到胡塞尔的这一文本.他在写于1953~1954年的第一部著作《胡塞尔哲学中的生成问题》(1990年由法国大学出版社出版)中对胡塞尔在《几何学的起源》中所提出的新思路产生了浓厚的兴趣并作过专门的探讨.当时的德里达从基础本体论和辩证法出发,竭力证明的是起源的辩证性、综合性和差异性,这也是他从中得出的显性结论.但真正深入地解读是在八年之后.1961年,德里达为完成他的教授资格再一次进入胡塞尔的现象学.他挑选了胡塞尔的这篇不太为人熟知的短文,把它译成法文并配上了长篇的引论,引论的篇幅是胡塞尔原文的六倍多.这篇论文以《胡塞尔<几何学的起源>:译文与引论》(《Edmund Husserl〈l'origine de la géométrie〉: traduction et introduction par Jacques Derrida》)为题于1962年出版.1964年该书获J.卡瓦耶奖.

这是一本书中之书,一篇文中之文.这就是它的奇特的出身.

更为奇特的是，德里达以《几何学的起源》为主线，以胡塞尔的整个思想发展为背景，从现象学的内部出发，在对胡塞尔晚期的思路进行认真审视和对话的过程中发现并论证了解构理论的最重要支柱——延迟原理.

译者下面谈谈自己对胡塞尔在《几何学的起源》中的思路以及德里达在《引论》中的辨明、反诘和引申的粗浅理解.

几何学创立至今，几千年的时间已经过去了，几何学也经历了几次大的飞跃，从欧式几何到非欧几何，从平面几何到立体几何再到黎曼空间等，几何学与其当初第一次创立时相比，已经得到了极大的丰富和深化.面对这样的状况，胡塞尔为什么要提出追溯几何学的起源呢?这种追溯难道不是毫无意义的吗?如果有意义，该如何踏上返回的路途呢?

对于追溯的意义问题，胡塞尔指出："希望我们因此而最终能够获得哲学的意义、方法和开端，获得我们愿意并应当将我们的生命奉献给它的这一个哲学的意义、方法和开端."但胡塞尔为什么偏偏选中了几何学并把它作为一个范例提出来加以研究呢?这是由于他看中了几何学的独特存在方式——观念对象性（"ideale Gegenständlichkeit"）.胡塞尔在《逻辑研究》时期就曾指出："这些观念对象性不在世界的某处，也不在'天国'之中."[①]当然，它也不在几何学家的心中存在."几何学上的存在并不是心理上的存在，它不是个人的东西在个人意识领域之中的存在；它是对'任何人'（对现实的或可能的几何学家，或对任何懂得几何学的人）都客观地存在于此的存在."这种观念对象性既不存在于世界之中，也不存在于主体之中，但这并不妨碍它成为一种实存，那么这种实存究竟存于何处呢?胡塞尔的回答是，它的存在方式是先验的，它一经诞生，便超越时空和经验，比如说，"毕达哥拉斯定理以及整个的几何学只存在唯一的一次，不管它如何经常地被表达，甚至也不管它在什么语言中被表达."因此，对它的存在地点的讨论必然要回溯到对它的诞生过程和起源方式的研究.

路漫漫其修远兮，返回的道路是畅通无阻还是荆棘丛生布满歧义?胡塞尔小心翼翼地选择了前者，而德里达则坚定地选择了后者.

胡塞尔的思路是，第一个几何学家在原初明见性中对几何学的观念对象进行了第一次制作（erzeugung），这样制作出来的对象不仅具有明见性，而且还具有客观的存在性.可是，由于时间化运动的缘故，客观的存在也不得不进入"滞留"（retention），以至于最终消失.但这种"消失了的"过去的存在并没有走向虚无，在某一特定的时刻，通过某种特殊的方式，它又能够在主体的意识活动中被唤醒，并变得越来越清晰.通过这样的方式，我们便又能找回原始的"一致".

编后语　Bordas Demollins 曾说：没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有这两者，人们就什么也看不透.在数学文化中哲学是一个不可缺少的内容，选编此文，用心在此.

2007 年在越南河内举行的第 48 届 IMO 上获金牌的深圳中学的学生王恒说他喜爱数学的同时也特别喜爱哲学，所以我们才有信心一定会找到本文相应的读者.

---

① 胡塞尔.《逻辑研究》第二卷第一部分第 31 节，倪梁康译，上海译文出版社，1998 年，第 106 页.

从原逻辑思维与计数的关系看原逻辑思维[①]

[法]列维－布留尔

用语言学的研究来论证我之前提出的理论，是完全可能的．但是，在下面的叙述中，我将限制在一个容易搜集到很多材料的个别的点上来论证这个理论．这就是：在各种民族那里，尤其是在我们所知的一些最低等民族那里是怎样进行计数的．计算和数数、数的名称的形成及其使用的各种方法，也许能让我们看出原始人的思维在它特别不同于逻辑思维的地方是怎样在实际中发生作用的．计数似乎可以作为我不能在这里详细转述的那些事实材料的一个范例．

1

在非常多的原始民族中间（例如在澳大利亚、南美等地），用于数的单独的名称只有一和二，间或也有三．超过这几个数时，土人们就说："许多，很多，太多．"要不然他们就说三是二、一，四是二、二，五是二、二、一．由此，常常有人得出结论说，土人智力的低劣或他们的极端懒惰，使他们不能去区分超过三的任何数．这个结论无论如何是太草率了．诚然，这些"原始人"不拥有四、五、六等数的抽象概念，但由此得出他们不计算二或三以上的数的结论则是不对的．他们的思维很不适于我们所习惯的那些运算，但是通过他们所固有的特殊方法，他们是能够在一定程度上达到与我们相同的结果的．由于综合表象是不可分析的，所以，原始思维更需要记忆．它不使用那种给我们提供真正的概念，特别是数的概念的概括的抽象，而使用一种能保持所有总和的特征的抽象．简而言之，他们是用一种在与我们相比之下完全可以叫做具体的方法来数数和计算的．

由于我们是借助数来计算，而且差不多不使用其他计算方法，所以我们认为，在那些根本没有三以上的数名的原始社会中，不可能计算三以上的数．可是，应不应当认为对物的确定的复数的理解只能通过一个途径来产生呢？原始民族的思维就不能用自己特殊的运算和方法来达到我们用计算法所达到的那种结果吗？事实上，假如什么确定的和相当有限的一群人或物引起了原始人的注意，他必定连同这个群的一切特征一起来记住这个群．在他的表象中，包含了这些人或物的准确的总数：这好像是这个群用以区别于其他在数量上多一个或少一个，多几个或少几个的群的一些特征．因而，当这个群在原始人的眼

① 摘自[法]列维－布留尔．原始思维．丁由，译．北京：商务印书馆，1986．

里再次出现时，他就知道它还是从前那个总数抑或比从前多了还是少了.

已经在某些动物那里，在十分简单的场合中发现了这种性质的能力[①]. 常常有这样的情形：家畜、狗、猿或象能在它熟悉的某种限定的客体总和中发觉某个客体不见了. 在许多种动物那里，母畜能用绝对明确的表示来表明它知道它的一个崽子被夺走了. 如果我们回想一下，用大多数的观察者的话来说，原始人的记忆是"惊人的"（斯宾塞和纪林语）、"奇迹般的"（查理注语），那就有更多的理由认为他们没有数词也能对付得了. 由于习惯，他们所注意的每个总和在他们的记忆中保持得这样准确，以致使他们能够正确无误地认出这个人或那个动物、这个人或那个人的踪迹. 只要在这个总和中出现缺额，立刻就会被他们发现. 在这个如此准确保持着的表象中，人或物与其数还是不可分开的：没有什么东西能让数的存在得到单独的表现. 而且，数是在性质上被感知的，或者说被感觉到的，如果乐意这样说的话.

多布里茨霍菲尔用阿比朋人的例子证实了这个事实. 阿比朋人拒绝像我们那样来计算，亦即拒绝借助数词来计算. "他们不但不知道算术，而且还讨厌算术. 在算术方面，他们的记忆大都不中用(因为人们想要迫使他们去进行他们所不习惯的运算). 他们忍受不了乏味的计算过程；因此，为了摆脱给他们提出的问题，他们随便伸出几个手指，这里面，或者是他们自己弄错了，或者是他们想要瞒过提问的人. 常常在你问的数超过三的时候，阿比朋人为了免得用手指表示的麻烦，干脆就叫道：'Pop'（很多），或者'Chiceyekalipi'（无数的）."[②]

但是，他们仍然有自己的计数方法. "当他们猎捕野马或者屠宰家马回来，没有一个阿比朋人这样问他们：'你带回家来多少马？' 而是问：'你赶回家来的一群马要占多大地方？'"[③]当他们收拾好去打猎，"一骑上马，就环顾一周，要是他们养的许多犬当中少了一只，他们就唤它 …… 我常常奇怪，他们不会数数又怎么能够立刻说出在这样大一群猎犬当中少了一只哩."[④]多布里茨霍菲尔指出的这最后一点是极有特征的. 它解释了为什么阿比朋人和其他这类部族的成员没有数词也能对付，但初次教他们使用数词，他们就难于对付这些数词了.

同样的，瓜拉尼人(Guaranis)[⑤]所有的数词只到四为止（虽然他们有符合下述拉丁语的词：singuli，bini，trini，quaterni—— 按一个，按两个，按三个，按四个)[⑥]. "和阿比朋人一样，当问到瓜拉尼人数目在四以上的东西时，他们马上就回答：'无数的'…… 一般说，我们教他们音乐、绘画、雕塑，要比教他们数数容易得多. 他们全都会用西班牙语说出数目来，但是在用这些数来计算时，他们是这样容易出错而且常常出错，以至在这类事情中不

---

① Ch. Leroy, Lettres sur Les Animaux, 123.

② Dobrizhoffer, An Account of the Abipones, ii.170.

③ Dobrizhoffer, An Account of the Abipones, ii.170.

④ Dobrizhoffer, An Account of the Abipones, ii.115-116.

⑤ 南美印第安人，主要居住在巴拉圭.—— 汉译者注

⑥ 没有三以上数词的澳大利亚各部族，同样也有单数、双数、三数和复数的语法变化.

能对他们太信任."[①]计算法是他们不感到需要的也不知道应用的方法.除了他们能以自己的方法很容易地计算出的总和以外,他们用不着跟数目打交道.

然而,如果是这样,那就要问:是不是原始人只能表现和记住这些总和呢?是不是最简单的加减法都是他们力所不能及的呢?根本不是这样;他们是能够进行这些运算的.原逻辑思维在这里(如同一般在其语言中一样)是以具体的方式发生作用的.它依靠的是在原来总数中加或减个位数的运动的表象.在这方面,它拥有的手段,其效率比抽象的数低得多,其复杂程度又比抽象的数高,但它能够进行简单的运算."这种思维把协调的一系列运动和与这些运动联系着的身体各部位同那些一个接一个的总和联想起来,这样,它在需要的时候重复这个系列,又能重新找到这些总和.比如说,需要决定一个日子,大量的部族必须在这一天集合起来共同举行某些仪式,这个日子应是几个月以后的某一天,因为需要很多时间来通知一切有关的人,同样,也需要很多时间大家才能在约定的地点集合起来.澳大利亚土人在这种场合下怎么办呢?"要规定部族集合的确切日期……必须计算途中将有的站数或宿营次数或者新月出现的次数.如果要计算的数目很大,土人们就求助于身体的各个部位,每个部位在这个计算法中都有一个公认的名称和明确规定的位置.从一只手的小指开始计算的这许多的身体部位,就是按情况所要求的那样表示了同样多的站数、天数或月数."(在计算时,起初从身体一边的各部位算起,如果需要,接着算另一边).豪维特正确观察到,"这个计算法彻底推翻了那种认为澳大利亚各部族的语言中缺少数词,似乎是由于他们没有想象二、三或四以上的数的能力的见解."[②]

实际上,在原始人那里缺少数词,是不是原逻辑思维所固有的习惯呢?要知道,几乎凡是在缺少数词的地方(我们应当从数还没有与被计算的东西分开这点来考虑缺少的原因),我们都发现了这种具体的计数法.在墨累群岛[③]、托列斯海峡,"土人们只有 netat(1) 和 neis(2) 两个单数数词.这以上的数他们或者是使用重复法,如 neis netat = 2,1 = 3;neis neis = 2,2 = 4,等等;或者是借助于身体的什么部位.用后一种方法可以数到 31.数时从左手小指开始接着转到各手指、腕、肘、腋、肩、上锁骨窝、胸廓,接下去又按相反的方向顺着右手到右手小指结束.这可以数到 21.然后,用脚趾数,再得 10."[④]"吉尔(Wyatt Gill)博士说:'托列斯海峡的岛民对 10 以上的数是用视觉[⑤]来数的:他们顺次轻轻摸一下每个手指,接着摸一下右手的腕、肘和肩,然后摸一下胸骨,然后摸一下左手的腕关节,也不忘记左手的手指.这样可以数到 17.如果还不够,他们就加上脚趾、足踝、膝和大腿(右和左).这样再得出 16,一共是 33.这以上的数他们就只能用一束小棍来数了.'"[⑥]

---

① Dobrizhoffer, An Account of the Abipones, ii.171-172.

② Howitt, "Australian Message Sticks and Messengers," J.A.I., xviii.317-319.

③ 在澳大利亚.——汉译者注

④ Hunt, "Murray Islands, Torres Straits," J.A.I., xxviii.13.

⑤ 这真是一个惊人的用语,它使我们想起原始人的语言,在他们的语言中,口语似乎是视觉和动觉心象的"复写".

⑥ A. Haddon, "The West Tribes of Torre Straits," J.A.I., xix.305-306.

海顿正确地看出，这里既没有数词，也没有真正的数，只不过是一种"帮助记忆"的方法，以便在需要时可以想起某个总数．他说："也有另一个计算方法：从左手小指开始，从它转到无名指、中指、食指、拇指、腕、肘关节、肩、左胸，到右手小指结束(共得19)．数的名称也就是身体各部位的名称，不是数词．我认为，这个方法只能像结绳记事那样作为一种计算的辅助手段来用而根本不是什么数列．肘关节(kudu)可以表示7或13，我不能弄清，kudu实际上是表示这两个数中的哪一个，但在交易中，土人能记得他在计算物品时曾经数到自己身体的哪个部位，再算时，从自己左手小指开始，他总是能够重新找到他所要找的数．"①

同样，我们在英属新几内亚也发现了下列计数方法：

1 = monou—— 左手小指；

2 = reere—— 无名指；

3 = kaupu—— 中指；

4 = moreere—— 食指；

5 = aira—— 拇指；

6 = ankora—— 腕；

7 = mirika mako—— 手肘之间；

8 = na—— 肘；

9 = ara—— 肩；

10 = ano—— 颈；

11 = ame—— 左胸；

12 = unkari—— 胸；

13 = amenekai—— 右胸，

14 = ano—— 颈右边，等等②．

我们见到，同一个词ano表示颈的右半部或左半部，同时表示10或14；如果我们在这里是与数和数词打交道，那就根本不可能见到这样的事．但是，这里却没有模棱两可的情形，因为在计算的时候本来就是指着身体的部位，而且是按一定顺序来指的，所以不会发生混乱．

英国科学考察团在托列斯海峡搜集的一些事实，完全证实了上述的一切．我只举出其中的几个．在马布亚，"通常都是用手指数数，从左手小指开始数起．这里也有从左手小指开始按身体部位计数的方法：1 = kutadimur(小指)；2 = kutadimur gurunguzinga(小指边的东西)(无名指)；3 = il get(中指)；4 = klak nitui get(食指)(掷矛的手指)；5 = kabaget(握桨的指)(拇指)；6 = perta 或 tiap(腕)；7 = kudu(肘关节)；8 = zugu kwuick(肩)；9 = susu madu(胸肉，胸骨)；10 = kosa dadir(右乳头)；11 = wadogam susu madu(另一边胸肉)，等等；数另一边时各部位名称同前，但在每个名称前面加上

① "The West Tribes of Torres Straits." J. A. I. xix. 305.

② James Chalmers, "Maipua and Namau Numerals." J. A. I., xxvii. 141.

wadogam(另一边)一词;这个序列到右手小指结束……这些名称只不过是身体部位的名称,不是数词."①

墨累群岛的一个土人马鲁斯是按下述方式来数数的:

1 = kebi ke—— 小指;

2 = kebi ke neis—— 无名指;

3 = eip ke—— 中指;

4 = baur ke—— 投矛指(食指);

5 = au ke—— 大指(拇指);

6 = kebi kokne—— 小关节骨(腕);

7 = kebi kokne sor—— 背面的小骨(腕背);

8 = au kokne—— 大关节骨(肘内部);

9 = au kokne sor—— 关节骨背部(肘);

10 = tugar—— 肩;

11 = kenani—— 腋窝;

12 = gilid—— 上锁骨窝;

13 = nano—— 左乳头;

14 = kopor—— 肚脐眼;

15 = nerkep—— 胸上部;

16 = op nerkep—— 喉前部;

17 = nerut nano—— 另一边乳头;

18 = nerut gilid—— 另一边锁骨窝;

19 = nerut kenani—— 另一边腋窝;

20 = kebi ke nerute—— 另一只手的小指②.

在英属新几内亚也是用列举身体一定部位的办法来数数的,其方法与上述稍有不同,但也是从左边开始,数完了还要数右边."在艾利马区是这样数的.1 = haruapu(小指),2 = urahoka(无名指),3 = iroihu(中指),4 = hari(食指),5 = hui(拇指),6 = aukava(腕),7 = farae(前臂),8 = ari(肘),9 = kae(臂),10 = horu(肩),11 = karave(颈),12 = avako(耳),13 = ubuhae(口),14 = overa(鼻),15 = ubwauka(眼),16 = avako kai(另一眼),17 = karave haukai(颈,另一边),等等,直到 27 = ukai haruapu……15 以后各数中的 kai、ukai、haukai 各词意思大概是另外的或者第二的."③

最后看一看英属新几内亚东北部的巴布亚语中的一个例子."按照威廉·马克格列高爵士(Sir William MacGregor)的说法,在穆查河流域一带的所有落后村落中,都发现了用身体部位计数的习惯.他们从右手小指开始数起,数完右手手指,继续数右边的腕、肘、

① The Cambridge Expedition to Torres Straits, iii. 47.

② The Cambridge Expedition to Torres Straits, iii. 86-87.

③ The Cambridge Expedition to Torres Straits, iii. 323.

肩、耳和眼，然后数左边的眼、肩并往下数左臂和手，直到小指．他们当中的许多人数到脸部时都数得很忙乱．"[①]"这里是这种方法的一个例子：1 = anusi(右手小指)，2，3，4 = doro(分别表示右手的无名指、中指和食指)，5 = ubei(拇指)，6 = tama(右手腕)，7 = unubo(肘)，8 = visa(肩)，9 = denoro(右耳)，10 = diti(右眼)，11 = diti(左眼)，12 = medo(鼻)，13 = bee(口)，14 = denoro(左耳)，15 = visa(左肩)，16 = unubo(左肘)，17 = tama(左腕)，18 = ubei(拇指)，19，20，21 = doro(左手的食指、中指和无名指)，22 = anusi(左手小指)．"[②]

在这里，我们十分清楚地看到了所用的这些词不是数词．同一个词 doro，如果不由手势来加以区别，即说的时候由右手或左手的一个特定的手指来表示出，那怎能够既表示 2，3，4，又表示 19，20，21 呢？

如果以一定次序被列举的身体部位是与其他一些更易于计算的东西相联想，则用这个计算方法可以算到相当大的数目．这里是婆罗洲达雅克人(Day aks)的一个例子．谈的是通知一定数目的被征服的起义者的村庄应付罚款的数额．在这种场合下，土人使者应当怎样完成他的任务呢？"他带来几张枯叶，把它们撕成碎片；我用一些更便于使用的纸片替换了这些树叶片．他在桌子上把纸片分开来摆好，利用手指数到 10．接着他把一只脚放到桌子上，数着每个足趾，同时指着一张纸片，这张纸片必须符合村名、首领名、党羽数目和罚款数目；当他数完所有的足趾，又回过头来数手指，数到我的单子的末尾时，已在桌上摆好了 45 张纸片．于是他请求我重复一次我的委托，我这样做了．这时，他又按以前的次序一面数足趾和手指，一面数自己的纸片．他说：'这是我们的一种文字；你们白种人是不像我们这样读的．' 后来在傍晚，他顺次把手指指着每张纸片，准确地重数了一遍，然后说：'如果明天早晨我还记得，那一切就好了；我们把这些纸片留在桌子上吧．' 这以后，他就把所有纸片混成一堆．第二天一早，我和他就来到桌子跟前．他把纸片按昨天晚上的次序摆开，完全准确地重做了昨天做过的一切动作．将近一个月以后，他从一个村走到另一个村，远至海岛内地，一次也没有忘记各种不同的数目，等等．"[③]用纸片代替手指和足趾，这是特别值得注意的：它给我们提供了原逻辑思维所习惯的一个实际上仍然是具体的抽象的明显实例．

托列斯海峡的岛民，只有很少几个数词，但他们有"一个租赁独木舟期满三年即作为购买的习惯法，期满时必须付代价．这种购买方法要求相当复杂的计算方法和某些基本的数学计算"[④]．甚至没有 2 以上数词的澳大利亚土人，也有一种算加法的计算方法．"皮塔皮塔族(Pitta - Pitta)土人只有头两个数有名称 ……4 以上的数土人一般都说：'很多''数目很大'．他们对更大的数目一定有一种视觉概念．"(这个用语与上面引述过的海顿的用语相仿)"我常常实地证实了这个事实，我请他算一算他有多少手指和足趾，要他

① The Cambridge Expedition to Torres Straits, iii. 364.

② The Cambridge Expedition to Torres Straits, iii. 364.

③ Brooke, Ten years in Sarawak, i. 139-140.

④ A. Hadden, "The West Tribes of Torres Straits," J. A. I., xix. 316, 342.

把数目记在沙地上.开始算时他张开手,每次屈一屈这个手的两个手指,在沙上给每两个手指划出双道的记号…… 这些记号……是彼此平行的,计算结束时,他说每两个手指是pakoola(2).这种计数方法在全区通行,它常常被部族的酋长们用来查明营地现有的人数."①(着重点是作者加的.—— 列维 – 布留尔)

常常有这样的情形,观察者不是像上面刚刚引述的那样准确地描写具体的计数,但却能使我们在他们的报道里看出这种计数.例如,传教士乔梅尔斯(J. Chalmers)告诉我们,他在英属新几内亚的布吉来人(Bugilai)那里发现了下列数词:1 = tarangesa(左手小指),2 = meta kina(无名指),3 = guigimeta(中指),4 = topea(食指),5 = manda(拇指),6 = gaben(腕),7 = trankgimbe(肘),8 = podei(肩),9 = ngama(左胸),10 = dala(右胸)②.

从我们在上面刚刚引述过的事实中可以看出,更细致深入的观察定能表明,我们在这里见到的,与其说是数词,还不如说是用于具体计数的身体部位的名称.其次,随着名称(特别是头五个数的名称)在意识中引起的关于身体部位的表象渐趋衰弱,而那种趋向于脱离身体部位并变成可以附于任何对象的关于一定数的观念增强起来的时候,这种计数可以不知不觉地变成半抽象半具体的计数.然而,没有什么能证明数词就是这样形成的.看来,1 和 2 两个数的形成常规恰恰还是循的相反的途径.

海顿在托列斯海峡西部各部族那里发现 1 至 6 的数词,他补充说:"这以上的数他们一般都说 ras 或者'很多'…… 我还在穆拉奴发现 nabiget = 5,nabiget nabiget = 10,nabikoku = 15,nabikokunabikoku = 20.get 表示'手',koku 表示'脚'."但海顿又补充说:"很难说 nabiget 是数词 5 的名称,它只是表示所谈的东西与一只手上的指头一般多."③换句话说,数还不是抽象的.

在安达曼群岛,尽管"语言词汇非常丰富,数词却只有两个:1 和 2,3 的意思实际上是'多一个',4 是'多几个',5 是'全部',他们的算术止于此.但是在某些部族里,借助鼻子和手指却能数到 6,7,甚至可能数到 10.他们开始计数时用右手或左手的小指碰一下鼻子,同时说 1,接着用无名指碰一下鼻子,数'2'等等一直到 5,每次接着碰鼻子时都要说出一个词 anka(就是这个).接着,继续用另一只手,数完后,两只手合起来表示 5 + 5,同时用 ardura(全部)一词来结束数数.但是只有少数土人能数到这个数,通常,这种计数都不超过 6 或 7."④

在能够追溯数词的最初意义的地方,常常显露出具体计数的事实,这种计数如果说不是相同至少也是类似于我们已经提供若干例子的那种计数.但是,计算时按上升的次序依次点数身上一边的各部位,接着转到另一边下降着数下去,这是一种与计算时手指进行的运动相联系的具体计数.这样就产生了喀申十分恰当地叫做"手语"概念的那些概念.喀申对这些概念进行了独创的、细致的甚至可说是实验的研究,因为他的方法的一

① W. E. Roth, Ethnological Studies Among the N. W. Central Queensland Aborigines, No.36.

② James Chalmers, "Maipua and Namau Numerals," J. A. I., xxvii.139.

③ "The Western Tribes of Torres Straits." J. A. I., xix.303-305.

④ Portland, "The Languages of the South Andaman Tribes," J. A. I., xix.303-305.

个重要方面，就是强迫自己准确地执行原始人在计算时所作的那些连续的动作，以此来再现他们的心理状态．下面就是朱尼人用于计数的一些“手语概念”(用于头几个数)：

1 = töpinte—— 用于开始的手指；

2 = kwilli—— 与前一个一起伸出的手指；

3 = ha'i—— 把手分成两半的手指；

4 = awite—— 除一个外，其余手指全伸直；

5 = öpte—— 整只手；

6 = topalik'ya—— 在已数过的当中再加一个手指；

7 = kwiilik'ya—— 两个手指与其余的手指一同伸直；

8 = hailik'ya—— 三个手指和其余的手指一同伸直；

9 = tenalik'ya—— 除一个手指外，全都伸直；

10 = ästem'thila—— 所有的手指；

11 = ästem'th la topayäthl'tona—— 所有手指伸直，再加一个手指，等等①．

柯南特(Conant)在其题为《数的概念》一书中也引述了类似“手语概念”的计数法．下面是取自巴拉圭的恰科的伦瓜族印第安人(Lengua Indians)的最后一个例子：“Thlama(1)和 anit(2)显然是两个词根；其他数的表示决定于这两个词和两只手．Antathlama(3)由1和2两个数联合成；4 = ‘手的相同的两边’；5 = ‘一只手’；6 = ‘转到另一只手，一个手指’；7 = ‘转到另一只手，两个手指’，如此等等．10 = 动作完结，两只手；11 = ‘转到一只足，一个足趾’；16 = ‘转到另一只足，一个足趾’；20 = ‘动作结束，两只足’．这以上的数就说‘很多’了，如果谈到很大的数，那就用‘头发’来算．”②但是应当注意，计数的情形是随着这些或那些部族所达到的发展程度而改变的．朱尼人至少可以数到1 000，而且，对他们拥有真正的数词这一点是不能怀疑的，尽管在这些数词中还能看出昔日的具体计数来．相反的，巴拉圭的恰科的印第安人大概跟澳大利亚土人一样使用确定的一系列具体的专门名词，在这些名词中包含着数的意义，但是数还没有从这些名词中分离出来．

2

通常，人们都是不作任何预先的考查，就认为下述的东西是合乎自然的事实：计数是从1开始的，各种数是通过对先前的每个数连续加1的办法来形成的．实际上，这是逻辑思维在它开始意识到数的功能时所不能不接受的一个最简单的方法．

Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum(只要有1，就能从无中引出一切)．然而，不拥有抽象概念的原逻辑思维却不是这样行事．原逻辑思维不能清楚地把数与所数的物区别开来．这种思维由语言表现出的那个东西不是真正的数，而是“数－总和”，它没有从这些

① American Anthropologist, 289(1892).

② Hawtrey, "The Lengua Indians of Paraguayan Chaco," J. A. I., xxxi. 296.

总和中预先分出单独的1.要使这种思维能够想象从1开始的、按正确序列排列的整数的算术序列，必须使它把数从其所表示的那些东西中分离出来，而这恰恰是它所办不到的.相反的，它想象的是实体或客体的总和，这些总和是它按其性质及其数而得知的，数则是被感觉到和感知到的，而不是被抽象地想象的.

所以，海顿在谈到托列斯海峡的土人时说，"他们有按两个或成双来计数的明显倾向."柯德林顿说："在约克亲王岛，是以成双来计数的，他们根据双的数量给这些双起上不同的名称.波里尼西亚的计算方法其所用数字不是意味着有多少单个的东西，而意味着有多少双；hokorua(20)应表示40(20双)."我们可以在这个例子中再一次假定土人们是以2为单位开始计数的，可以有条件地把2看成是等于1.但是，柯德林顿又补充说："在菲吉群岛和所罗门群岛，有一些集合名词是表示十分随便放在一起的10个东西，它们表现的既不是数，也不是东西的名称."(这就是我们刚说过的那些完全确定的但没有把数分离出来的"数 - 总和".)"例如在佛罗里达，na kua是10个蛋，na banara是10篓粮食……在菲吉群岛，bola是100只独木舟，koro是100个椰子，salavo是1 000个椰子……在菲吉群岛，把4只驶行着的独木舟叫做a waqasaqai va，从qai一词变来，意为行驶.在莫塔，张帆同行的两只独木舟叫做aka peperu(蝴蝶——两只独木舟)——这是由两张帆的样子而来的，等等."①

由于这些"数 - 总和"能够变化无穷，所以原逻辑思维只拥有极少量真正的数词，但却拥有极大量的、多得惊人的、包含了数的意义的用语.例如，在美拉尼西亚的各种语言中，"在遇到特定情况需要计算人或物时，不是简单地使用数，而是把这个数包括在或多或少表征了这些情况的用语中.如果谈的是结伴同行的10个人，那就不说o tanum sanaval，而说o tanum pul sanaval，pul表示紧密地结合在一起的意思；在独木舟上的10个男人则说tanum sage sanaval；等等."②

在这一点上，我们拥有关于新玻麦拉尼亚土人的十分值得注意的观察材料."对他们来说，数10以上的数，比我们的孩子掌握'一一得一，一二得二'的乘法表要更加困难.他们连足趾也不利用.作了许多次尝试以后，发现他们分不清12和20；这两个数都叫salaul lua，亦即10 + 2与10 × 2的表示法一样.显然，他们感觉不到有在语言中作这种区分的必要，因为他们从来就不是抽象地计数，而只是与名词一起连用数词(数 - 总和)：例如，他们说12个椰子，20块芋头，而这20块又是以10个一堆作单位的.所以在这样的表示下，能够看出所谈的是10 + 2个椰子呢，还是两个10的堆."③

常常给一些尽管数目相同但是由不同的东西组成的总和起上各种名称.在这些场合下，语言必须拥有极大量的数词；但是应当注意，在这里，数与物不是完全分离的.柯南特在其十分有益的著作中搜集了大量这类的事实，我只引述其中的几个.

在加拿大西部的地尼(Dènè)方言之一的卡利埃族(Carrier)语言中，tha——3件东

① Melanesian Languages，241-242.

② Melanesian Languages，304-305.

③ Dr.Stephan，"Beiträge zur Psychologie der Bewohner von Neu - Pommern."Globus，lxxxviii，206(1905).

西;thane——3 个人;that——3 次;thatoen—— 在 3 个地方;thauh—— 用 3 种方法;thailtoh——3 件东西在一起;thahultoh—— 总起来看的 3 次①.在英属哥伦比亚的井美辛语(Tsimshian Language)中,有 7 个不同的数列用于计算不同等级的客体.第一个数列是在谈到不确定的客体时用于计算的;第二个数列用于平面的物体和动物;第三个数列用于圆形物和时间划分;第四个数列用于人;第五个数列用于长形物,这个数列的数与 kan(树)一词配合使用;第六个数列用于独木舟;第七个数列用于度量.这最后一个数列好像还包括 anon(手)一词.伯阿斯给上述 7 个等的头 10 个数列了一个表.

	一般的计算	平面物体	圆形物体	人	长形物体	独木舟	度　量
1	gyak	gak	g'erel	k'al	k'awutskan	k'amaet	k'al
2	t'epqat	t'epqat	goupel	t'epqadal	gaopskan	g'alpēeltk	gulbel
3	guant	guant	gutle	gulal	galtskan	galtskantk	guleont
4	tqalpq	tqalpq	tqalpq	tqalpqdal	tqaapskan	tqalpsqk	tqalpqalont
5	ketōne	ketōne	ketōne	kcenecal	k'etoentskan	ketoōnsk	ketonsilont
6	k'alt	k'alt	k'alt	k'aldal	k'aoltskan	k'altk	k'aldelot
7	t'epqalt	t'epqalt	t'epqalt	t'epqaldal	t'epqaltskan	t'epqaltk	t'epqaldeont
8	guandalt	yuktalt	yuktalt	yuktleadal	ek'tlaedskan	yuktaltk	yuktaldelont
9	ketemac	ketemac	ketemac	ketemacal	ketemaedskan	ketemack	keteasmilont
10	gy'ap	gy'ap	kpēel	kpal	kpēetskan	gy'apsk	kpeont

我们要指出,第一级,即一般的用于计算的词的一级差不多是与第二级等同的,只有 1 和 8 的词中有点细微的差别.因而可以认为,第一级不是与其他级同时形成的,或者说不依赖于其他级,相反的,用于客体的这个或那个范畴的专门数词是在开始简单地计算这些客体以前就存在的.这一点可以由对英属哥伦比亚的邻近各部族的语言的研究来加以证实.在这里,数词的序列几乎是"无限的".这里是海特萨克族(Heiltsuk)②方言中的几个数词序列.

被计算的事物	1	2	3
生物	menok	maalok	yutuk
圆形物	menskam	masem	yutqsem
长形物	ments'ak	mats'ak	yututs'ak
平面物	menaqsa	matlqsa	yutqsa
日子	op'enequls	matlp'enequls	yutqp'enequls
噚	op'enkh	matlp'enkh	yutqp'enkh
联合的	——	matloutl	yutoutl

① Morice, The Dénè Languages, quoted by Conant in The Number Concept, 86.

② 加拿大西北一部族.——汉译者注

群	nemtsmots'utl	matltsmots'ult	yutqtsmots'utl
满杯	menqtlala	matl'aqtlala	yutqtlala
空杯	menqtla	matl'aqtla	yutqtla
满箱	menskamala	masemala	yutqsemala
空箱	menskam	masem	yutqsem
载重的独木舟	mentsake	mats'ake	yututs'ake
独木舟及其船员	ments'akis	mats'akla	yututs'akla
全在岸上	——	maalis	——
全在房里	——	maalitl	—— 及其他[①].

关于夸桂提尔人,伯阿斯说:"除了用于生物、圆形物、平面物、长形物、日子、㖊的等级后缀外,数词可以使用任何名词后缀……等级的数是无限制的.这里是数词与名词的简单的复合语."[②]这形成了词的罕见的冗长,但如果我们回顾一下这些语言的一般性质,即很少抽象而是极端的"绘声绘影",我们就容易理解这种现象了.数词不单独使用,是没有什么奇怪的.

这也说明了柯南特认为"十分值得注意的"北美米克马克(Micmac)语的一个特点.柯南特说,在这种语言中,数词实际上是用作形容词的动词,或者如我们偶尔见到的是用作名词的动词.它们在式、时、人称和数的一切形式中都是同根词.例如,naiooktaich——"那里有一个人"(现在时);naiooktaicheus——"那里曾有一个人"(半过去时);encoodaichdedou——"那里将有一个人"(将来时).不同人称由下列词尾变化来表示:

现在时

第一人称　tahboosee - ek　我们是两个人

第二人称　tahboosee - yok　你们是两个人

第三人称　tahboo - sijik　他们是两个人

半过去时

第一人称　tahboosee - egup　我们曾是两个人

第二人称　tahboosee - yogup　你们曾是两个人

第三人称　tahboosee - sibunik　他们曾是两个人

将来时

第三人称　tahboosee - dak　他们将是两个人,等等.

这里也有否定变化:tahboo - seekw—— 他们不是两个人;mah tahboo - seekw 他们将

---

① F. Boas, "The North - western Tribes of Canada." Report of the British Association for the Advancement of Sciences, 658(1890).

② F. Boas, "The North - western Tribes of Canada." Report of the British Association for the Advancement of Sciences, 655-656.

不是两个人,如此等等,naiookt意思是一个,而tahboo则是两个[①].

柯南特解释这些形式说,数在这里是动词,它们是同根的.但如他刚刚恰当地说过的那样,也可说这些动词是数词,是数词化的动词.我们知道,原始语言不完全像我们的语言那样分出词性,最好认为它们是"起动词作用"的词,虽然在其他方面它们可能是名词、形容词等,所以我们要简单地说,在我们所考虑的这种情形中,我们在自己的语言中叫做数词的那种词在这里则是"起动词作用"的词.

我们见到的这类事实不只是在北美才有.格利尔森在印度搜集了类似的例子.例如在藏缅语族的库克钦语组中,"数词就是用这个办法来限制其范围,以便适用于客体的某种特殊的种类."他报道说,这些语言表现了"专门化和个别化的趋向"[②].例如,在伦克霍尔(Rūng Khōl)语中,前缀dar用在表金钱的数词中,而dong则用于表房屋的数词中[③].这些前缀还要随客体的形状而变化:"pūm用于圆形物;pōrr用于担或包.例如,mai pūmkat意思是一个南瓜;thing pōrr kat则是一担木柴."[④]有时还有用于确定物类的专门前缀."例如在计算人时用sak,计算无生物时用ge,计算动物时用māng,计算树时用bol.这些名词都放在数词的前头.mānde sak gui表示两个男人.前缀ge还用于简单的计数:gē sa、gé gui,gé gitam——1,2,3.20以后则在十位与个位之间加上这些前缀."[⑤]在藏缅语族的纳加(Nāgā)语组的米基尔(Mikir)语中,普通前缀与数一起用,如

用于人——hang

用于动物——jón

用于树和直立的东西——rong

用于房屋——hum

用于平面的东西——pàk

用于圆的东西——pūm

用于身体的部位以及环形、手镯和其他饰物——hong

最后,根据柯南特引述的观察材料,在阿芝特克人(Aztecs)中间也"多少"有同样复杂的情形.日本人也是通行这样用数词,克劳福德(Crawfurd)发现14种不同的数类,还不是详尽无遗的[⑥].

在我们看来,这些事实都归根于原始思维的一般趋向,因为这种思维的抽象化与其说是要进行概括,还不如说它永远是在进行专门化,当它发展到了一定程度时则形成数词,但这不是我们所使用的那种抽象的数.它们永远是人或物的一定种类的数-名称,而种类的划分又往往取决于客体的形态、形状、位置和运动.我们在上面已经见到,这些原

---

① Schoolcraft, Archives of Aboriginal Knowledge, v.p.587, quoted by Conant, The Number Concept, 160.

② Linguistic Survey of India, iii.3, 19.

③ Linguistic Survey of India, iii.3, 184.

④ Linguistic Survey of India, iii.3, 118.

⑤ Linguistic Survey of India, iii.2, 71.

⑥ The Number Concept, 89.

始语言给客体在空间中的轮廓、相对位置和运动的表现赋予多么巨大的意义．常常可以发现，在口头的句子中，在把同样的东西传达给眼睛的画面中以及在通过动作来表现同一个实在的手势语言的句子中，词所表现的细节是彼此符合的．

我们可以用这一点来解释一个相当普遍的而且与前面的事实密切联系着的事实．在某些语言中，计数不仅包括或多或少脱离了所计事物的数词，而且还包括一些辅助的专门名词，把它们与某些数连用，以指出或划分出计数的阶段．英国或美国的作者们把这些专门用语叫做“分类者”．波威尔少校说：“这些动词表现了一些计算方法并属于一种形式，亦即它们在每个场合中都代表着那个按 10 个一群计算着有特殊形状的客体的印第安人．”①伯阿斯在英属哥伦比亚的各种方言中搜集了这一类的许多例子．它们清楚地说明了，这些辅助词的作用可说是要使算术运算的连续阶段成为看得见的．波威尔说：“附加的动词用做分类者，表示放置．然而，我们在印第安人的语言中却找不到像放置这个词那样有如此高度独立性的词．我们在这里见到的是一系列带有分别表示有条件地放置的动词和副词的词，例如，我放到，我靠着放，我站着，我站在附近，等等．”

因而，这些附加的动词乃是加倍特殊化的东西：这首先是在涉及进行计算的主体所完成的动作方面，其次是在涉及被计算的客体的形状方面．盖捷特说：“作为分类者的动词（在克拉马特语中）根据被计算的客体的形状而有所不同，但它们全都一致表示放置，放在 …… 的上面．”②盖捷特补充说：“从 1 到 9 的个位数不附上这些专门名词，这个事实必须以印第安人的计算方法的特点来解释 …… 头 10 个数过的东西（鱼、篓、箭，等等）在地上放成一行或列；从第 11 件开始放成新的一行 …… 或新的一堆．”

此外，我们知道，“这些附加的动词既不用于 10，也不用于 10 的倍数．这些后缀只是给 10 以后的个位或一些个位进行分类，而不是给 10 本身分类．这个细节阐明了使用辅助词的理由和来源．甚至紧跟着 10 或 10 的倍数的数，如 11，31，71，151，等等，有时也附加着与从 32 到 39，从 72 到 79 等等的数不同的分类者；因为在前一种场合下分类者所涉及的是一件东西，而在其他场合下则涉及多数．当我说 21 个水果 ——lóp ni ta unepanta nóäh lutish likla—— 直译应为：我在 20 个水果上面放一个．当我说 26 个水果 ——lópēna to unepanta nódshkshapta lutish péula—— 我指的是：我在两次 10 个水果上多放 6 个（likla 和 péula 两词只是在谈到球状物时才使用）．但是分类者不提上面数过的 20 个水果，它们只涉及由数表示的单位．分类的动词可以由不固定的用语‘数过了的，算好了的’来表示；它前面的代词省略了，但在它的分词 liklato，péulatko 前面则不省略．简单的动词形式，绝对的或者区分的形式是在说话人或者其他人重数东西时使用的；以绝对的或区分的形式置于直接格或间接格中的过去分词，则是在这些东西早已被数过或者现在提起它们的数目时才使用．”必须补充一点：这些附加的动词并不经常为印第安人正确地使用，而且他们常常省略这些词．据盖捷特说，大概他们感觉到了这是“无用的和累赘的补充”．但这绝不是一个补充．没有什么东西能使我们认为原逻辑思维必定在计数时采用一些比在语言

---

① “The Evolution of Language，” E. B. Rept.，i. xxi.

② A. Gatschet，The Klamath Language，534.

中表现其观念的总和时更为省事的方法.在这里,计数只不过是表现了我们在原始人的语言的一般结构中发现的那种极端专门化和"绘声绘影"的描写的同一种性质.

柯德林顿十分精细地研究了美拉尼西亚的各种语言中的计数.我在上面试着解释了他搜集的某些事实.在这里,我想来探讨下面的一点:同一个词可以连续不断地表示不同的数.柯德林顿想到的是那个可以叫做数-极限的东西,亦即计数所止于其上的那个数.他说:"用以表示计数终极的那个词本身(尽管我们不能追溯它的最初的意义),随着计数过程的进步也自然地升高了,进而表示大于它最初表示的那个数.例如在萨窝岛,tale 或 sale 表示 10,但在托列斯群岛则表示 100;在这里,无疑是同一个词.tini 可以表示 3,这是门公岛上的极限数,它在非吉群岛却表示 10,在毛利人的语言中甚至表示 10 000.这样一来,当计数不超过 10 时,tale 可以表示一种计数极限,它可以在萨窝岛上保持 10 的意义;但在计数进步以后,它却在托列斯群岛表示 100 了.'许多'一词在较晚时代中比在较早时代中表示的意义要多.gapra (10) 一词只表示'许多'(在拉科纳岛);在某几种语言中不确定地表示'许多'的 tar 一词,在另一种语言中表示 100,而在其他一些语言中则表示 1 000."①

显然.这个数-极限在其最初的形式中不是一个数,而表示这个数的词也不是一个数词.这是一个专门名词,它包含了对于超过"数-总和"(原始人的思维对它拥有清楚而习惯的直观观念)的一群东西的比较模糊的理解.但是,随着计数的进步,这个专门名词变成了数,而且是越来越大的数.最后,当开始借助像我们那样的抽象的数来进行计数时,数列就被想象成是无穷的,而极限的专门名词则消失.在这里,数已经最终地与被计算的东西分开来了,而原逻辑思维的方法则为逻辑思维的运算所代替.

3

从上述一切中得出的结论,似乎是要改变那些老问题,并采用新的方法来研究它们.例如,柯南特在收集了世界各地的许多原始民族使用的数词以后,对他所见到的计数法的如此繁多简直大惑不解.这些使用者的彼此相差极大的计数法的基础是从哪里来的呢?当人开始计算时,那个好像是暗示给他的,甚至是强迫他接受的以 5 为单位的计数法怎么就是一切计数法当中最合乎自然的呢?为什么这个计数法又不被普遍采用呢?这么多的以 2,4,20 为单位的混杂而不规则的计数法的根据是什么呢?人用手指数数,难道就一定不可避免地达到以 5 为基数的计数法吗?特别使柯南特大惑不解的是相当常见的以 4 为基数的计数法.人们能够数到 5(借助手指)和 5 以上,却要回到 4,以 4 作为自己计数法的基数,这在他看来似乎是不可思议的.他坦白地承认,这是他求解无门的一个谜.

然而,这个谜是人为的.这样表述这个谜,必须假定是那些与我们相似的个体意识(即具有相同的机能并习惯于同一些逻辑运算的个体意识)在用这些运算造成了计数法,而且这些个体意识必定为这个计数法挑选出一个最符合它们的经验的基数.但是,这

① Codrington, Melanesian Languages, 249.

种假设是没有根据的.事实上,计数法也和语言一样(不应当把它们与语言分开),乃是取决于集体思维的社会现象.在任何社会集体中,这种思维都是完全决定于该社会集体的类型及其制度.在原始社会中,思维是神秘的和原逻辑的;它在语言中得到表现,而在它们的语言中,实际上是不知道像我们所使用的那样的抽象概念.这些语言也没有真正的数词,或者说差不多没有数词.它们使用的是一些"执行数的功能"的词,或者更正确地说,它们是求助于"数-总和",亦即求助于一些具体表象,在这些表象中,数还没有与被数的东西分离开来.简而言之,下面一种说法不管看来多么离奇,但它是正确的,这就是原始人在拥有数以前的漫长时期中就会数数了.

如果是这样,那么,有什么根据可以认为这个或那个计数法的基数比其他任何基数都更合乎自然呢?须知每一个实际被采用的计数基数都是奠基于社会集体的集体表象上.在几乎纯粹使用具体的计数的地方我们所能观察到的最低阶段上,根本就没有基数,也没有任何计数法.在从左手小指经左手各指上升到左边的腕、肘等等以及以相反的次序下降到身体的右边直到右手小指的连续动作,并不强调其中的任何一次动作.例如,它们并不在符合2,5或10的身体部位上停留得比在其他什么部位上更长久.所以,海顿说得很对:说出来的词是身体部位的名称,不是数的名称.只是在有规则的周期性开始让人觉察出数列时才出现了数词.

实际上,这个周期性往往是由手指和足趾的数来确定的:换句话说,以5为基数的计数法是最普遍的.然而不要相信,在我们见到这个基数的任何地方,它都正好具有这种我们觉得如此合乎自然的起源.几乎所有的原始人都利用手指来数数,而那些不知道以5为基数的计数法的人,常常与知道用这个方法的人一样能很好地利用手指.在这一点上,"手语概念"的研究是很有益处的.这里是地尼丁杰(Dènè-dindjie)族印第安人(加拿大)计数方法的一个例子."他伸出左手,把手掌对着自己的脸,弯起小指,说1;接着他弯起无名指,说2;又弯一下指尖,接下去弯起中指,说3;他弯起食指来指着拇指,说4;只数到这个手指为止.然后,他伸开拳,说5;这就是我的(或者一只,或者这只)手完了.接着,印第安人继续伸着左手,并起左手三个手指,使它们与拇指和食指分开,然后,把左手的拇指和食指移拢来靠着右手的拇指,说6;亦即每边3个,3和3.接着他把左手的4个手指并在一起,把左手的拇指移拢来靠着右手的拇指和食指,说7(一边是4,或者还有3个弯起的,或者每边3个和中间1个).他把右手的3个手指碰一碰左手拇指,这就成了两对4个手指,他说8(4和4或者每边4).接着,他出示那个唯一弯着的右手小指,说9(还有1个在底下,或者差1个,或者小指留在底下).最后,印第安人拍一下手,把双手合在一起,说10,亦即每边都完了,或者数好了,数完了.接着他又开始同样一番手续,说:全数加1,数好的再加1,等等."①

这样看来,地尼丁杰人在用自己的手指计数时根本没有以5为基数的观念.他不像我们在其他一些部族那里见到的那样说6是第二个1,7是第二个2,8是第二个3,等等.相反的,他说6是3和3,又重新回到那个数完了手指的手上,把没有数过的手的两个手指

① Petitot, Dictionnaire de la langue Dènè-dindjie, Iv.

移拢来加在那只手的拇指上.这说明,他在数5时,在数完"一只手"时,并不比在数完4或6的时候停留得更久.因此,在这种情形下以及在其他许多与此相似的情形下,周期性原则,即作为计数法的基础的那种东西,并不包括在计数法本身中,也不包括在这时完成的动作中.

基数可能是由于那些与计数的方便绝无任何共同之处的原因而产生的,同时,数的算术使用的观念在这里还根本谈不上.原逻辑思维是神秘的,它与我们的思维的趋向不同.它对待事物的最明显的客观属性常常采取不关心的态度,相反的,它关心的是一切种类的存在物的神秘的和秘密的属性.例如,4这个基数和以4为基数的计数法,其起源可能归因于在所考查的民族的集体表象中,东南西北四方,与这四个方位互渗的四个方向的风、四种颜色、四种动物等等的"数 - 总和"起了重要的作用.因此,我们根本不必滥用我们的心理学洞察力去猜测为什么那些能够用自己手上的5个指头数数的人一定要去选择4这个基数.在我们见到使用这个基数的地方,这个基数不是被挑选出来的.它好像是先于自己而存在,就像数在那个还没有从被数的东西中分离出来、"数 - 总和"还占据着真正计数的地位的漫长时期里就先有了数一样.如果想象是"人类智力"为自己设计出了用于计算的数,那就错了,因为正相反,人们在想出数的本身以前先就以艰难而辛苦的方法进行着计数了.

4

当数已经有了名称,当社会集体拥有了计数法时,还不能得出结论说数就因此而开始在事实上被抽象地想象了.相反的,它们大都仍然与关于最常被计算的事物的观念连接着.例如,约鲁巴人(Yorubas)①就拥有相当出色的计数法,这可以从他们的减法使用上看出来.

11,12,13,14,15 = 10 + 1,10 + 2,10 + 3,10 + 4,10 + 5;

16,17,18,19 = 20 - 4,20 - 3,20 - 2,20 - 1;

70 = 20 × 4 - 10;

130 = 20 × 7 - 10;等等.

这个事实应当用约鲁巴人经常使用贝壳充当货币一点来解释:他们总是把贝壳放成5个一堆,20个一堆,200个一堆,等等.报道这个事实的观察者说:"在约鲁巴人的脑子里,数词有两种意义:其一是数,其二是约鲁巴人主要点数的那种东西,这就是货币(贝壳)…… 其他东西只是通过与贝壳的相等数比较的办法来点数,因为没有文字和学校的民族,根本就不知道抽象的数."②这个结论用于所有处于同一发展水平的社会集体都是同样正确的.数,尽管它也有名称,但仍然与主要作为计算对象的某一类东西的具体表象或多或少密切地联系着,而其他东西则只是通过一种可说与这些东西套叠的办法来计算

① 西苏丹最大最发达的民族之一.——汉译者注

② Mann, "On the Numeral System of the Yoruba Nation." J. A. I., xvi. 61.

的.

但是,假定说这种密切的联系渐渐断绝了,数不知不觉地开始被独立地来想象了,也绝不要认为数在某点上变成抽象的了,这又恰恰是因为每个数都有了自己的名称.对原始民族来说,任何东西或者差不多任何东西都不是像我们认为合乎自然的那样被感知的.对它们的思维来说,不存在纯粹是现象的自然现象,不存在只是图像的图像,不存在完全是形状的形状.在这里,被感知的任何东西都同时包括在那些以神秘因素占优势的集体表象的复合中.同样,在这里也不存在简单地只是名称的名称,也不存在只是数词的数词.我们暂且不谈比如说原始人在计算他做了多少小时的工应得多少报酬或者他在某一天捕到了多少鱼时所给予数的那种实际应用.每当他想到作为数的数时,他就必然把它与那些属于这个数的,而且由于同样神秘的互渗而正是属于这一个数的什么神秘的性质和意义一起来想象.数及其名称同是这些互渗的媒介.

因此,每个数都有属于它自己的个别的面目,某种神秘的氛围,某种"力场".因此,每个数都是特别地、不同于其他数那样地被想象(甚至可说是被感觉).从这个观点看来,数并不构成一个同类的序列,因而,它们根本不适合于最简单的逻辑运算或者数学运算.每个数的神秘特性使它们不能进行加、减、乘、除.可以对这些数进行的唯一运算,乃是不像算术运算那样服从于矛盾律的神秘的运算.简而言之,我们可以说,在原始人的思维中,从两方面看来数都是在不同程度上不分化的东西.在实际应用中,它还或多或少与被计算的东西联系着.在集体表象中,数及其名称还如此紧密地与被想象的总和的神秘属性互渗着,以至与其说它们是算术的单位,还真不如说它们是神秘的实在.

应当指出,这样被神秘气氛包围着的数,差不多是不超过头十个数的范围.原始民族也只知道这几个数,它们也只是给这几个数取了名称.在已经上升到关于数的抽象概念的民族中间,正是那些形成了最古老的集体表象的一部分的数,才真正能够十分长久地保持着数的真义和神秘力量.但是,这些真义和神秘的力量根本不扩及它们的倍数,一般的也不扩及大的数.这一点的理由是显而易见的.为原逻辑的和神秘的思维所习惯的头几个数(大致到 10 或 12) 是与这种思维的本性互渗的,它们只是在很晚的时代才成为纯粹算术的数.可能,甚至没有这样一个社会集体,在那里,这些数只是算术的数,如果不算数学家的话.相反的,在原始人的思维中,那些极少分化的较大的数从来就没有与自己的名称一起进入这个思维的集体表象中,它们从一开始立刻就是算术的数,除某些例外,它们就不是其他什么东西.

由此可见,我可以在什么程度上赞同乌节尼尔(H. Usener) 的题为《Dreiheit》(《论三》)[①]的杰出著作中的一些结论.乌节尼尔详尽无遗地列举了能证明 3 这个数的神秘性质,特别是它自古以来所具有的神秘的意义和力量的证据以后,他和笛尔斯(Diels) 一样,得出结论说,这个数的神秘性质起源于人类社会在计数中不超过 3 的那个时代.那时,3 必定表示一个最后的数,一个绝对的总数,因而它在一个极长的时期中必定占有较发达社会中的"无限大" 所占有的那种地位.当然,在某些原始部族那里,3 这个数无疑可

① Rheinisches Museum, N.F., lviii.1-48,161-208,324-364.

能享有这种威信.但是不能把乌节尼尔的解释看成是令人满意的.首先,事实上我们没有在任何地方发现计数的确止于3的例子.甚至在那些只有1,2,偶尔也有3的数词的社会集体中(在澳大利亚、托列斯海峡、新几内亚),原逻辑思维也有自己的方法来使它数得更多.不论在什么地方,3都不是“最后”的数.此外,被使用的或者有名称的数的序列,从来就没有止于某个显然是最后的和表现了完整性的数上.相反的,搜集到的所有事实,其中不仅涉及上面提到的那些原始部族的事实,而且还涉及美拉尼西亚、南北美各部族、印度的德拉维人(dravidians)等等的事实,统统说明了数列止于一个意为“许多”、“太多”的不确定的词上,这个词在后来又变成了5、6或者其他什么数的确定的数词.最后,正如毛斯所正确地指出的那样[1],如果乌节尼尔的理论是正确的,如果在许多世纪中人类智力一直停留在3这个数上,给这个数赋予了几乎是不可磨灭的神秘性质,那么,这个神秘性质就应当为一切人类社会中3这个数所共有.但是,我们在北美和中美各部族那里没有发现这种情形.在这些部族的集体表象中,经常见到4、5的数及其倍数,而3这个数在那里或者不起重要作用,或者根本没有任何作用.

这些反驳意见不仅针对乌节尼尔的理论,而且也是给作类似解释的任何企图的一击.例如,以对北美土著居民的观察为根据的马克吉(MacGee)的理论[2],其实是十分出色的,但它不能解释在其他原始民族中间搜集到的事实.所有这些理论的一个通病,就是对它们的拥护者所相信的在这个或那个环境中分析了的并被用来解释这些社会集体中某几个数所具有的神秘意义的心理过程加以概括.这种概括不能为事实所证明,这类“解释”无所用之.由于原始民族的制度和这些民族的思维的一致,所以毋宁说原始民族的集体表象是原逻辑的和神秘的,那么,这些表象所包含的数能够不同于它们所包含的其他东西吗?这里,没有一个拥有名称并在这些表象中表现出来的数不具有神秘的意义.然而,就算是这样,也还有一个问题:为什么在这里恰恰是3,而在其他地方又是4或2或7或其他什么数获得了优势的意义和完全特别的价值呢?原因不应当在纯粹心理的动机里面去寻找,因为,对一切人类群体来说,不管它处于什么状态,这些动机都是相同的;原因应当在我们所研究的人类群体或这一类的人类群体所固有的特殊条件中去寻找.在这一点上说,邓尼特在其题为《At the Back of the Black Man's Mind》(《在黑人心灵的背后》)一书中揭露的那些事实是最有益不过的[3].

社会集体的类型分类还没有推进到足可以在这种场合下给我们提供一条切合需要的引路线的程度.然而,就是在现在,我们也能够确定,对这个或那个社会集体来说,在头十个数中,没有一个数不具有特别的神秘的意义.在这里,在头三个数方面引述证据,完全是不必要的.即使在最进步的民族中间,也还可以在宗教和形而上学中分辨出这种神秘性质的痕迹.“1”在一神教和一元论哲学体系中保持着自己的威信.“2”常常以自己对称的对立属性与“1”对立着,因为它表示的、包含的、产生的东西是与由“1”所表示的、包

[1] Annee Sociologique, Vol.vii.310(1904).

[2] “Primitive Numbers,” E.B.Rept., xix.821-851.

[3] London,1906.

含的、产生的东西严格对立的.凡在1是善、秩序、完美的本原的地方,2就是恶、混乱、缺陷的本原;2是灾难之朕,不幸之源①.许多语言仍然在自己的语汇中保留了这种对立的痕迹(如"双重灵魂""二重性"等等).我不来更多地谈3这个数的神秘属性,只要提一提上面谈到过的乌节尼尔的专著就足可使人回想到这一点.我将限于引述有关4这个数及其后的数的一些事实上.

这些事实自然不能在我们所知的最原始的民族中间找到,因为这些民族还没有给4这个数及其后的数起名称.大多数北美印第安人部族给4这个数赋予的神秘意义超过了其他一切数."几乎在一切红种人印第安人部族那里,4及其倍数都具有神圣的意义,因为它们专门涉及东南西北四方和从这四方吹来的风,而且希腊人画各端相等的十字,也是4这个数的自然崇拜的标记和符号."②在纳发觉人(Navajo)③的长篇史诗中,"所有的神都是4个一组地出现,他们全都按4个方位排列并被涂上每个方位所固有的颜色.这里可以见到4个熊神、4个豪猪、4个松鼠、4个身材高大的女神、4个年轻的圣徒、4只闪电鸟,等等.给主人公4天4夜来叙述他的故事,主人公的沐浴要4天时间,等等."同样,在喀申所如此出色地解释了的朱尼人的神话中以及在史蒂文森(Stevenson)夫人所描写的他们的仪式和风俗中,到处都见到了4这个数的神秘作用的证明."挑选4个年轻人,要不近女身,元阳未泄的处子……你们4个要陪伴他们……你们要绕祭台走4圈,为每个方位各走一圈,为每一方的风、每个季度各走一圈……他们带着定数的彩箭,数目是4支,相当于人的四肢."④在苏兹人中间,"动力神塔库斯坎斯坎(Takuskanskan)被认为是住在四方的风中,四个夜黑魔执行着他的命令……四方的风则是由'某种运动着的东西'发遣下来的."⑤在他们那里还有4个雷神,或者至少有"一个雷神的4种不同的外部表现,因为实质上它们是一个神"(这里表现了互渗律的作用)."一个神是黑色的,另一个是黄色的,第三个是紫红色的,第四个是蓝色的.他们住在天边的高山上.他们的住宅是朝大地的四方开门的,每一方的门前站着一个卫兵:东方站着蝴蝶,西方站着熊,北方站着鹿,南方站着海狸."⑥

按时兴的作法,对这一类不可数计的事实通常都给以心理学上的解释.在以4这个数为一方和以东南西北正好四个方位,从这四个方向吹来的风,在这四方的上面居住着的神,那里住着的神圣的动物,象征着四个方位的四种颜色为另一方之间被认为是确立了联想.但是要知道,原逻辑思维从来就不拥有这些彼此孤立的观念.它并不是一开始就想到这个作为空间方位的、东在其右和西在其左的北方,而随后又把关于冷风、雪、熊、蓝色的观念与北方联系起来……相反的,所有这些观念从一开始就包括在一个复合的表

① MacGee, "Primitive Numbers,"E.B.Rept.,xix,821-851.

② Buckland, "Four as a Sacred Number," J.A.I.,xxv.96-99.

③ 现在美国西南各州的一支印第安人.——汉译者注

④ F.H.Cushing, "Zuñi Creation Myths," E.B.Rept.,xiii,442.

⑤ Dorsey, "Siouan Cults," E.B.Rept.,xi.446.

⑥ Dorsey, "Siouan Cults," E.B.Rept.,xi.442.

象中,这个表象具有集体的和宗教的性质,在它里面,神秘的因素遮盖着我们叫做实在的那些因素.在这些因素里也包括了神秘的互渗的媒介——4这个数,因而这个数具有极为重要的作用,这个作用很难为逻辑思维所再现,但它却是原逻辑思维所绝对必需的.当神秘的互渗已经不再被感觉到,则这些到处都稍许保留着的联想就好像是那些互渗留下来的残渣.这时,它们实际上就只是一些联想了,因为把它们结合在一起的内部联系消失了.但是,最初的时候它们却不是联想,而是某种根本不同的东西.例如在中国广为流行的东南西北四方、一年四季、四种颜色等等之间的联想关系就是这样的东西.格罗特给我们提供了下述的例子:

东	春	蓝	龙
南	夏	红	鸟
西	秋	白	虎
北	冬	黑	龟[①]

许多例子表明了在北美各部族的观念中通过4这个数实现着神秘的互渗.凯特林告诉我们,在曼丹人那里,"在帐篷的地上放着四件非常重要的、极受崇敬的东西.这是四只各装着三四加仑水的皮囊……是一些迷信崇拜的对象,制造这些东西很费事,做得很精巧……缝成仰躺着的大乌龟的形状,用一束鹰羽粘在后面当尾巴……这四只水囊的样子很古老.巫医对我的问题一本正经地回答说'这四只龟保存着取自东南西北四方的水,从开天辟地之时起这些水就装在这里了'."凯特林觉得这个解释非常可笑.他还告诉我们,野牛舞(目的在于迫使野牛接近猎人)头一天跳4次,第二天跳8次,第三天跳12次,第四天跳16次,也就是第一天给每个方向跳一次,这时巫医就把烟斗的烟吹向这一方;第二天则是给每个方向跳两次,第三天三次,第四天四次[②].

我们知道,在契洛基人的巫术经咒中,4这个数也具有这种神秘性质.孟尼在这一点上谈得很详细.他说:"印第安人永远认为4是主要的神圣的数,还有一个稍许次于它的数也是神圣的.契洛基人的两个神圣的数是4和7……4这个神圣的数是与4个方位直接有关的,而7除了4个方位以外,还包括'在下'、'在上'和'这里,在中间'.在许多部落的仪式中,颜色(有时则是性别)分属于每个方位.在契洛基人的经咒中,东方、南方、西方、北方各神分别相当于红、白、黑、蓝.每种颜色也有其象征意义.红色表示力量(战争),白色表示和平,黑色表示死亡,蓝色表示失败."[③]孟尼也谈到"他们的医生对4和7这两个数的崇敬.他们说,自从人被安置在大地上以后,就规定要用4天7夜来治好人体的各种疾病……"[④]

在英属哥伦比亚,在斯台特鲁蒙赫(StatlumH)部族那里,4这个数也是最重要的神圣的数."分娩后,母亲和婴儿至少要留在帐篷里4天,如果气候允许,这个时期还要拖长到

① J. J. M. de Groot, The Religious System of China, i. 317.

② The North American Indians, i. 185-186.

③ "Myths of the Cherokee." E. B. Rept., xix. 431.

④ Heywood, quoted by J. Mooney, "The Sacred Formulas of the Cherokee." E. B. Rept., vii. 322.

8,12或20天,也就是拖长到萨利斯族印第安人的神秘的数4的各倍的天数."①在温哥华岛②,在举行巫医的成年礼时,"他站起来以后,必须向左边转四圈.接着他必须向前伸足4次,但不走出一步.在走出门去以前,他必须照样走4步……他必须使用特别的水壶、盘子、匙子和杯子,这些东西只属他一人所有,用了4个月以后就扔掉……吃饭时,每口不能嚼过4下,等等."③

4这个数大概也是北美的南部和西部以及中美出现的复杂而扑朔迷离的数的神秘主义的基础."在仪式继续期间的9天……各有名称,这些名称使人想到4天一组共两组的划分……根据这一点,我们见到,经常在蒲埃布洛印第安人的宗教仪式中出现的4这个数,也在蛇崇拜仪式的天数规定中占优势.我还要请大家注意这个事实:9天的仪式加上4天的狂欢,合成了13这个神秘的数.还应当记住,图查安人(Tusayan)的最讲究的仪式的理论上的持续时间——20天一期,也是墨西哥其他较文明民族的特征,而13套仪式,每套20天,总计为260天(一年)——这又是玛雅人(Maya)④及其有关民族的仪式的持续时间."⑤我不在这里讨论这个复杂的问题,只要指出4这个数在这里占有的地位,与在契洛基人的土地崇拜仪式中所占的地位相等就够了.⑥

最后,我再举出赫维特(Hewitt)关于易洛魁人(Iroquois)⑦的一个神话(谈的是四个孩子——两个男孩和两个女孩)的评语."这里,4这个数的使用是值得注意的.看来,把两个女孩引进故事中,只不过是为了保持4这个数,因为她们在神话的事件中不起任何作用."⑧

因此,神秘的数获得了一种范畴的面貌,在这个范畴中必须包含集体表象的内容.这个特征也在远东明显地表现出来.钱伯兰(Chamberlain)说:"欧洲人的语言中有'大善有四'或'七恶不赦'一类的成语;但像从印度起向东去的各民族那样按照不变的风俗来把几乎一切看得见和看不见的东西划分成数的范畴的智力趋向,在我们这里却是没有的."⑨在北美,这个"范畴"好像是与四个方位或者空间部分十分紧密地联系着.但是,不应当认为原逻辑思维多少总可以抽象地想象这些方位或部分,不应当认为它是根据关于这些方位或部分的观念来把4这个数提出去作神秘的应用.这里,如同在一切地方一样,原逻辑思维服从于互渗律;它只是以这样一种神秘的复合来想象空间方向、四个方位及其数,对这种神秘的复合来说,4这个数依靠的是一种神秘的范畴,而不是逻辑的范畴.

① Hill Tout, "The Ethnology of the StatlumH of British Columbia," J.A.I., xxxv.140.

② 在加拿大.——汉译者注

③ F.Boas, "The North-west Tribes of Canada," Reports of the British Association, 618(1890).

④ 原中美洲的印第安人,有高度文化.——汉译者注

⑤ Fewkes, "Tusayan Snake Ceremonies," E.B.Rept., xvi.275.

⑥ J.Mooney, "Myths of the Cherokee," E.B.Rept., xix.423.

⑦ 北美印第安人.——汉译者注

⑧ Hewitt, "Iroquoian Cosmology," E.B.Rept., xxi.233(note).

⑨ Things Japanese, 353-354.

"按照朱尼人的观点,神呼出的气——云,在北方染成黄色,西方染成翠绿色,南方染成红色,东方染成银灰色."[①]

在这个复合中自然也包括社会来源的因素.空间区域的划分符合于部族群体的划分.杜尔克姆和毛斯认为,部族群体的划分决定于空间区域的划分,这也就是他们叫做分类的那种东西的一般原则[②].他们引证了从澳大利亚土人、中国人和北美蒲埃布洛人那里,特别是从朱尼人那里观察到的事实.我已经在上面详细谈过斯宾塞和纪林叫做"local relationship"("地方亲属关系")的那种东西,即由居住地的共同性和群体与一定空间部分之间的互渗所决定的亲属关系.比如说,某个部族在某个地方临时或永久居住时,各个氏族或图腾不能随意选择一个地方来居住.每一个氏族或图腾都有自己预先规定好的位置,这位置是由氏族或图腾与方位之间的神秘联系来决定的.我们在北美也见到了这类事实.在其他一些观察材料中也表现了这种神秘的联系.例如,多尔赛告诉我们,从前堪萨部族(Kansa)有一个风俗,就是把被杀死的敌人的心挖出来扔到火里,以此来向四方的风献祭.雅塔(Yata)男人们,即那些住在部族的圆圈形村落左边的氏族的成员们必须举起左手来,顺次向东、南、西、北各方的风弯一下左手.[③]仪式的程序是由存在于这些氏族与它们所占有的空间位置之间的神秘联系来确定的.多尔赛继续说,每次当奥萨吉(Osage)和堪萨部族在永久性的村落定居下来时,在允许部族的成员布置自己的房屋以前,要举行住宅的祓除仪式,这个仪式是与对四方的风的崇拜联系着的."在我参加过或听印第安人说过的一切仪式上,经常出现达科他人的土地的象征——U－ma－ne.这是一块肥沃的泥土,它代表土地的不可替代的生命或力量……它是正方形或者长方形,每个角尖上突出一条缝,这总是被解释成有四种风吹向土地的象征.带直角或斜角的十字架也象征四方的风或者四个方位."[④]

在北美各部族那里,5,6,7几个数有时也有神圣的性质,尽管不像4这个数那样经常有这种性质.例如,盖捷特写道:"在这里,我们也发现5这个数是个神圣的数,它经常出现在俄勒冈[⑤]各部族的口头传说、神话和风俗中."[⑥]"许多被崇拜为神的动物都是集体出现的(五兄弟、十兄弟、五姊妹),有时候也和自己的老双亲一起出现."[⑦]方位或空间部位的数目不一定是4;在北美各部族那里,这个数有时也是5(包括天顶),6(再加上天底),甚至7(还包括中心或者数数的那个人所占的位置).例如,在曼丹人那里,巫师"拿起烟斗,接着把烟管伸向北方、南方、东方、西方,最后伸向他头顶上的太阳……."[⑧]——在西

---

① Stevenson, "The Zuñis," E.B.Rept., xxiii.23.

② Année Sociologique, vi.1-72.

③ Dorsey, "Siouan Cults," E.B.Rept., xi.380.

④ Dorsey, "Siouan Cults," E.B.Rept., xi.451.

⑤ 美国西北部一州.——汉译者注

⑥ The Klamath Language, 86.

⑦ The Klamath Language, 101.

⑧ Catlin, The North American Indians, i.258.

亚族(Sia)印第安人那里，"祭司站在祭坛前面，摇了一会儿祭神响板，然后摇着它绕着祭坛转圈，他重复这个动作六次，是给空间的六个方位……圆圈表示全世界的一切云神都被招来湿润土地……向各方位洒水的动作重复四次."[①]——"俄马哈族(Omaha)和朋卡族常常在抽烟的时候把烟斗向六个方向伸去：向四种风的方向，向地面和上界."[②]"蛇族的首领用神粉铺成一个直径大约20英尺(1英尺 = 0.304 8米)的圆圈……他用这种粉在圆圈里画了六条与空间的六个方位相符的半径."[③]最后在契洛基人那里，4这个神圣的数表示四个方位，但是，7这个神圣的数也表示方位，那就是在前四个上再加天顶、天底和中心[④].

我们发现5，6，7这些数也像4那样包括在复杂的神秘的互渗中.史蒂文森夫人在朱尼人中间搜集了有关6这个数的若干例子.我们只举其中的一个."这些原始的庄稼人作了极大的努力来使谷类和豆类带上符合空间六个方位的颜色：北方是黄的，西方是蓝的，南方是红的，东方是白的，天顶是花的，天底是黑的."[⑤]

如果不谈印欧和闪族各民族，类似的事实在整个远东都可见到.在中国，包括数在内的对应和互渗的复杂程度达到无穷无尽.而这一切又是错综复杂甚至互相矛盾的，但这丝毫不扰乱中国人的逻辑判断力.在爪哇，土人的一个星期包括五天，爪哇人相信这五天的名称与颜色和地平面的划分有神秘的联系."第一天的名称表示白色和东方；第二天——红色和南方；第三天——黄色和西方；第四天——黑色和北方；第五天杂色和中心……在古代爪哇的手写文件里，由五天组成的一个星期是画五个人形来表示的：两个女的和三个男的."[⑥]在印度，5这个数是福是祸得视地区或所涉及的是什么特殊的互渗而定."1817年，在贾索尔，大规模地流行着可怕的霍乱病.疫情是在八月份开始猖獗的，当时立即发现这年的八月份有五个星期六(星期六这个日子是处在不吉的沙尼(Sani)的影响之下).由于5这个数属于破坏神湿婆(Siva)所有，所以，神秘的联系立即确定了，怀疑这种联系的致死的效果，就是亵渎神灵."[⑦]在其他地方，5这个数则又有善的力量."农民用自己的铲掘5个土团.5是幸福的数，因为它比4多四分之一……接着他用神圣的芒果树枝溅水，给一条沟轻轻地洒5次水……然后，一个选定的人用犁犁5条沟……在米扎普尔，只有对着喜马拉雅山的田地的北头才在5个地方用芒果树的尖木棍掘土."[⑧]这一类的土地崇拜仪式和风俗屡见不鲜.

7这个数首先是在中国人或亚述巴比伦人的信仰发生影响的地方带上了特别神秘

---

① Stevenson, "The Sia," E.B.Rept., xi.79,93.

② Dorsey, "Siouan Cults," E.B.Rept., xi.375.

③ Fewkes, "Tusayan Snake Ceremonies," E.B.Rept., xvi.285,295.

④ J.Mooney, "Myths of the Cherokee,"E.B.Rept., xix.431.

⑤ Stevenson, "The Zuñis," E.B.Rept., xxiii.350.

⑥ Skeat, Malay Magic, 545(note).

⑦ Crooke, "The Folklore of Northern India,"i.130.

⑧ Crooke, "The Folklore of Northern India,"ii.288.

的性质[①].在马来西亚,“人们认为,每个人……有7个灵魂,或者更确切地说,有7重灵魂.也许,这个‘统一中的七重性’有助于解释马来人的巫术中给7这个数赋予的那种惊人而巩固的意义(7根桦树枝,从身体里抽出灵魂要念7次咒语,7根扶留藤,给灵魂7个打击,收割时为稻谷的灵魂割下7枝谷穗).”[②]斯凯特的这个理论显然是那个贯穿了他的研究的万物有灵论暗示给他的.我倾向于认为,这个理论完全是本末倒置.马来人之所以到处使用7这个数,并不是因为他们给每个人赋予7个灵魂或者7重灵魂.相反的,这是因为7这个数在他们眼里具有巫术的力量,以至这个数在他们那里变成了一种不仅能规定他们的巫术仪式而且也能限制他们的观念(其中也包括关于灵魂的观念)的“范畴”.事情确实是这样,以至斯凯特自己也补充说:“这7个灵魂是什么?如果没有更多的证据,是不可能来给它们下定义的.”既然7个灵魂中的每一个是如此少有独立性,以至能够以同等权利说它是一个7重灵魂,那就很难假定一般的7这个数所具有的意义其来源应归因于这个观念.

“当印度教徒焚烧死者以后收灰的时候,他们就在焚尸的地方写上49这个数.梵学家是这样解释这个风俗的:用北印度语写上的这个数与贝壳或者毗湿奴神[③]的轮子相像;或者说这是召天上的49种风来清扫大地.但是,最可能的是,这个仪式是奠基于下述观念,即7这个数拥有某种神秘的用途,这和世界各地都能见到的迷信一样.”[④]——“在印度,在灯节之夜,从7口井里打水来给不妊的妇女洗澡,这被认为是治疗不妊症的方法……在印度的整个北部,恐水病的疗法是连续到7口井前往里瞧.”[⑤]——“天花女神西塔拉(Sitala)只是那些被认为能引起一切长脓疱的疾病的7姊妹中的大姐……同样,我们在更古老的印度教神话中也见到了7个母亲、7个利西(Rishi)、7个阿地蒂亚(Aditya)和达纳瓦(Dānava)、太阳的7匹马以及这个神秘数的许多其他组合.”[⑥]“在日本,7这个数和一切包含7的数(如17,27等等)都是不吉之数.”[⑦]同样,在亚述巴比伦人那里,第7,14,21,28这几天都是不吉的日子[⑧].——在印度教徒那里,如同所有的一般巫术经咒一样,医方也由于数的神秘属性而给数添上了巨大的意义.例如,“方符是一种最受欢迎的符,这是以特殊方式排列起来的某些数.比如说,为了治疗不妊症,最好的办法是在一块面包上写一系列的数,这些数两两相加等于73,拿这块面包喂黑狗……医肿病最好是画个十字形的图,中间3个数,四端各1个数.这个符应当在星期天制作,要戴在左臂上.”克

① Vide Von Adrian, "Die Siebenzahl im Geistesleben der Völker," Mitteilungen, pp.225-271(Vienna,1901);W.H. Roscher, "Die Siebenzahl," Philologus,360-374.(1901).

② Skeat, Malay Magic,50,590.

③ 印度教三大神之一.——汉译者注

④ Crooke, The Folklore of Northern India,ii.51.

⑤ Crooke, The Folklore of Northern India,i.50-51.

⑥ Crooke, The Folklore of Northern India,i.218.

⑦ Chamberlain, Things Japanese,439.

⑧ Jastrow, The Religion of Babylonia and Assyria, 377.

鲁克(W. Crooke)补充说:"这些符多得不可胜数."①这种情形不但在印度如此,在古希腊罗马,在阿拉伯,在中世纪,在欧洲以及在拥有数词的一切民族的巫术和医学里,可以见到无数类似的护符.民间创作的研究提供了这方面的许多证明.

在大数字已经通用的较发达的民族那里,有神秘意义的数的某些倍数是与这些数的特殊属性互渗的.例如,在印度,"当新月出现时逢星期一,虔诚的印度教徒就要绕着它(无花果树)走108圈."②可能,108作为9和12的公倍数,所以具有特殊的力量,而9和12又是3和6的倍数.在印度的西北各邦,84和360这两个数有特殊的意义.例如,Chaurasi(84)是区的辖村数,总计有84个村庄."然而,不只是在涉及行政区划时,84和360这两个数才享受特别优待.这两个数进入了印度教、佛教和耆那教的整个结构中,进入了宇宙起源说、仪式和神话故事中.十分明显,这两个数不是偶然地、随意地取来用的,而是因为它们符合了想要在普通用语下隐藏某种遥远的暗示的企图."③佛教徒使用这两个神秘的数比印度教徒更经常.

这个事实也许可以这样来解释:84同时是7和12的倍数,而360则是4,6,9,5和12的倍数.这样一来,在84和360两个数里实现着以它们为倍数的各个数的所有属性的互渗.

柏尔根(A. Bergaigne)屡次着重指出吠陀诗中神秘的数的本性和对这些数的神秘的运算.在这里,乘法的运算似乎主要是通过把起初用于整数的除法来用于整数的各部分.例如,对宇宙除以3——天、地、大气的算法,可以是对这3种世界的每一种重复除以3——3个天、3个地、3种大气,一共是9个世界.各种除法用于宇宙以后,其中两种方法所求得的数又可以互乘,例如:$3\times 2=6$个世界,3个天和3个地④.或者,为了形成新的神秘的数,就给神秘的数加1:$3+1$,$6+1$,$9+1$,等等."这样做的目的是要把关于看不见的世界的观念引进某种宇宙体系中去,或者把关于种类相同但因被神秘气氛包围而又不同于其他的人或物的观念引进某一群人或物中去."⑤例如,7这个数可以具有独立的神话意义;但是利西无疑是用$6+1$合成的(即用6个世界加1的办法).这些神话的数的属性来自它们与空间各部分的神秘关系:例如,分世界为7份(7个世界,即$6+1$)是与神话的7份(7个地方、7个种族、7条河,等等)相符合的.

在这些已经系统化了的集体表象中发生作用的原逻辑思维,可以由那个使"一"和"许多"等同的方法来证实.例如,用柏尔根的话来说,"大多数神话生物群或物群可以归结为一个具有许多面貌、把群作为统一体来表现的生物或物.因而,每一群的组成部分则是那个唯一本原的同等数量的表现;而这些表现的复数则由世界的复数来解释……7种祷告只是1种祷告的7种形式,从统一中来看,同时又从不同的表现中来看,这一种祷告就成了7项祷告或赞美歌……祷告的主人的7头母牛自然就是由他的7张嘴念出来的7

① Crooke, The Folklore of Northern India, i.159-60.

② Crooke, The Folklore of Northern India, ii.100.

③ Elliot, Memoirs of the Races in the North-west Provinces of India ii.47 et seq.

④ Bergaigne, La Religion Védique, ii.115.

⑤ Bergaigne, La Religion Védique, ii.123 et seq.

种祷告……阳性的生物有2个或3个母亲,2个或3个妻子,等等."[1]

由此导致了一个初看起来觉得奇怪的结果:各种不同的数又是相等的数."同时地、无差别地使用3和7……只说明了它们的意义完全相同……如我们已经见到的那样,不同的数之所以彼此代替着用,是因为它们在各种划分方法中全都表示宇宙各部分的总和,因此,这些不同的数可以用一种彼此并列的重叠形式来使用.实际上也往往如此.这样一来,3就是7或者是9."逻辑思维所视为荒唐的这种相等,则是原逻辑思维所认为理所当然的,因为这个首先对神秘的互渗感到兴趣的思维,并不是从这些数与其他数的抽象关系上,也不是从它们与所产生的算术定律的关系上来看待这些数的.原始思维把这些数中的每一个都理解成一种实在,它不需要把这种实在看成和规定成其他数的功能.因而,每个数都有它自己的不可侵犯的个性,这种个性使它能够准确地符合其他也有同样不可侵犯的个性的数."梨俱吠陀[2]的大部分神话数,特别是2,3,5,7不只是简单地表示一个不确定的多数,而且还表示一个总数,这个总数又是在原则上符合世界的总和."[3]例如,只要看一看神话的公牛吧,它有"4只角、3条腿、2个头、7只手;被捆3圈的公牛在吼叫,等等"(这里是2,3,7个世界,4个方位).描写中的各种细节暗示着世界划分的各种方法,全都力图表现所谈的主人公是无处不在的[4].我们已经从其他方面知道,无处不在或用莱布尼茨的话来说"在许多地方存在"的观念,乃是原逻辑的和神秘的思维所十分熟悉的.

最后,柏尔根在完成对这些神秘的数的评述时继续说:"3和7必须在吠陀神话的总体系中看成是预先定出的框子,它们并不依赖于那些可以装进其中去的个别的东西."[5]预先定出的框子——用上述钱伯兰的话来说,就是有关这些数的范畴.要弄清这些神秘的数和用于算术运算的数之间的差别,是不可能的.客体的数量不是使数依赖于被感知或被想象的客体的实际数量,相反的,而是靠预先确定的神秘的数来确定的,并从这个神秘的数那里获得自己的形式.数的属性可说是预先决定了集体表象中复数的属性.

可能有人会问:数的神秘性质怎么不以最大的明显性表现在集体表象的神秘性最深的地方,亦即表现在我们所知的最原始的民族中间呢?为什么在已经发展了逻辑思维的地方,在逻辑思维已经知道用真正的算术的方法来使用数的地方,例如在北美或远东一些民族那里,反而最明显地表现了这种神秘的性质,而在澳大利亚土著居民或在南美或印度的原始人那里,数的这个神秘的性质却又没有表现出来呢?初看起来,我们的理论不能解释这些事实,因而必须采用其他原则,而不是采用集体表象中以数为媒介的互渗原则,才能解释数所带有的神秘属性.

可以提出下面两点理由来反驳这种反对意见:

① Bergaigne, La Religion Védique, ii.147-148.

② 印度最古经典四吠陀之一.——汉译者注

③ Bergaigne, La Religion Védique, ii.156.

④ Bergaigne, La Religion Védique, ii.151.

⑤ Bergaigne, La Religion Védique, iii.99.

（1）在仍然完全原始的民族中间，数（超过2或3）还是与被数的东西分不开的，因而它们在集体表象中不是作为真正的数而出现的.由于它们不是抽象化的对象，也不是原逻辑思维所固有的那种孤立的、非概括的抽象化的对象，所以它们从来不被想象成数的本身.特别重要的是，它们没有名称，所以它们不能起到在更发达的民族的集体表象中所起的那种神秘属性的"凝结器"的作用.

（2）然而，也许正是在这种不可分的和无名的状态中，数的神秘效能才特别巨大.社会集体划分为图腾、氏族、胞族，而它们本身又有划分，尽管它们没有数的表示，但却包含了一定的数的意义；同时我们见到，包含了数的意义的这些划分是推广到一切被想象的实在上去的，是推广到动物、植物、无生物、星辰、空间中的方位上去的.制度、信仰、宗教和巫术的仪式，一贯要求在这些划分中，在这些"分类"中以暗式的形式来拥有数.但是，正因为神秘的和原逻辑的思维在这里也是像在它最如意的环境中一样发生作用，所以我们是很难再现它的.不管我们做什么努力，那种可以感觉到但不能想象到的错综复杂而又不能分出的数，仍然是我们所不能想象的东西.数，如果是我们不能想象的，那对我们来说就不是数；而当我们能够想象它时，我们又是连同它的名称一起来逻辑地想象它的.当然，数一旦有了名称，我们就可以或者是以抽象思维的观点来想象它，亦即把它想象成丧失了性质，与其他的数完全同类的数；或者是把它想象成神秘属性的神圣的媒介.我们的宗教，有时也有我们的形而上学的体系，还能够告诉我们这样一些数，而我们的神话、传说、民间创作也使我们习惯于这些数.可是，要返回到那个没有名称的数并分清它在原始民族的集体表象中所实现的功能，那是万分困难的.

编后语　这是一本编者早年在数学系当教师时十分爱读并引用多次的哲学名著的片段.因为数学早期就是研究数量关系的学科（后来又注重研究结构）."数"（shù）源于"数"（shǔ），"量"（liàng）源于"量"（liáng）.所以计数是人类最原始的数学活动，也是组合数学的源头.人类是如何开始计数是每一个好奇心重的学生都会提出的问题，也是每一个负责任的教师所必须回答的问题.当时曾翻阅了大量数学史著作，最后发现居然讲得最透的是这部哲学书.哲学是所有学科的概括和总结，并非虚言，摘编此文，希望对今天数学教师的"那一桶水"有所贡献.

数学赞

邓寿才

什么是“美”?古今中外有各种不同的说法.从中国古代“美”的造字意义上来看:“羊大”为美,即肥大的羊,其肉吃起来味美,这是古代人们最先从味觉感受的“美”;其后,孔子闻韶乐而“三月不知肉味”,把味觉感受的“美”扩展到听觉,音乐之美有过于肉味之美;广而大之,有绘画、舞蹈、书法等艺术美,唐诗、宋词、元曲、散文、小说的文学美,物质世界中的和谐、对称美等科学美,以及模式秩序中蕴含的数学美.

总之,美是客观事物(外观与内涵)作用于人的感官和思想所引起的一种愉悦情绪或兴奋的心理反应,因此,美是客观存在的,但因各人的取向不同,所感受的美的事物或程度也各不相同,甚至大相径庭,然而有几点却是为多数人所承认的:

第一,“真、善、美”是紧密联系在一起的,凡“美”的事物,一定是真的,与人为善的;假的、恶的东西,总与“丑”连在一起,它一定不美.

数学正是真、善、美的统一.

第二,美分为感性美与理性美两个层次,前者层次较低,后者层次较高,科学美属于较高层次的理性美,而数学美属于科学美的较高阶段.

第三,美的价值,不仅在于供人们欣赏,还在于它在方法论上的意义.一方面,人们利用数学美去发掘和创造美好的事物,另一方面,数学家对于数学美的追求,是研究和发现数学新理论的推动力.

数学美,可以用一个“妙”字来概括其回味无穷,但是只有具备一定数学素养的人,才能真正发现和欣赏数学美.

数学美不是自然之物,而是高度智慧的产物,是人类思维的结晶,我们对它的称赞,只能用一个“妙”字来表达.

数学美,包含着科学美的基本要素——和谐美、对称美、简捷美、奇异美.

不爱数学的人,总觉得数学园林里浓雾弥漫,模糊不清,好像覆盖了一层神秘的面纱;总觉得围墙密不透风,高不可攀;总觉得数学深奥、难懂,枯燥无味;总觉得数学不可理解,莫名其妙.看数学就像看天书,使人望而生畏……

其实,数学世界山清水秀,鸟语花香;数学世界莺歌燕舞,彩云飘飞;数学世界空气清新,温暖如春……

其实,数学是彩云、是星月,五彩缤纷、光彩照人;数学是乐曲、是歌声,清新悦耳、悠扬动听;数学是鲜花芳草,是玉液琼浆,芳香四溢,香甜可口,回味无穷……

当你走进美丽的数学世界，你自然会被那无限的绮丽风光深深地陶醉 —— 布洛卡尔点、费尔马点；欧拉线、西姆松线；费尔马大定理、哥德巴赫猜想、四色定时、拿破仑定理；亲和数、完全数、无限数 ……

其实，一个酷爱数学的人，当他一接触数学时，顿时就会感到舒心愉快，热血沸腾；就会忘却了冷热、忘却了忧愁烦恼、忘却了时光春秋、忘却了自己；数学是他的爱人 —— 他们相亲相爱，情深似海，他们白头到老、永不分离！

数学诗

（其一）

何故终生迷数学？天高海深太痴情！
如诗如画如歌舞，似星似月似彩云．
鸟语花香非人间，水秀山清疑仙景．
神秘面纱谁揭幕？风光无限非凡尘．

（其二）

万物何为最？数学总牵心．
锦绣山川水，变幻风雨云．
人间金珠玉，天上日月星．
喜娶数学仙，相伴度终生．

编后语　邓寿才先生好舞文弄墨，虽文笔稍显幼稚不够老道，似中学生作文，但感情真挚，充满热情，这与某些语句时尚、文笔先锋却心如死灰的圈内人士形成鲜明对比．热爱是最好的老师，是最强的动力，愿我们都有一颗像老邓一样爱数学的心．

一道美国奥赛题的探讨

邓寿才

1 加 强

在许多中学数学资料上，都有这样一道常见的题：

题1 设 a,b,c 为正数，则

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$$

从结论上讲，上式的一个配对式为：

题2(MMO—26) 对任意正数 a,b,c，有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\tag{A}$$

题2是在"遥远"的1963年第26届美国数奥题之一，因此不等式(A)显得格外"古色古香".(A)式简单，证明容易，许多数奥资料上都有关于它的表面探讨，下面我们将对它作一些比较深入的探讨.

(A)式有几个加强式，其中一个间接加强"一枝独秀"最漂亮：

加强 对于任意正数 a,b,c，有

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\geqslant\frac{3}{4}\tag{B}$$

这是因为，如果我们记 $p=a/(b+c)$，$q=b/c(c+a)$，$r=c/(a+b)$，并证(A)式左边的式子为 P，则(A)式即

$$P=p+q+r\geqslant 3/2\tag{A}$$

(B)式为

$$pq+qr+rp\geqslant 3/4$$

由三元对称不等式知

$$p^2=(p+q+r)^2\geqslant 3(pq+qr+rp)\geqslant\frac{9}{4}$$

因此，从(B)式可推出(A)式，而反之则不能.

证明 证(B)式左边为 M，则

$M\geqslant 3/4\Leftrightarrow$

$$4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\geqslant 3(b+c)(c+a)(a+b)\Leftrightarrow$$

$$4[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)] \geqslant$$
$$3[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc] \Leftrightarrow$$
$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \geqslant 6abc \Leftrightarrow$$
$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow M \geqslant \frac{3}{4}$$

即(B)式成立,等号成立仅当 $a=b=c$.

2　加权推广

如果我们再设 λ,μ,v 为正数,那么我们就可从系数方面建立(A)式的加权推广:

推广 1(加权推广)　设 a,b,c 及 λ,μ,v 均为正数,则有不等式

$$P_\lambda = \frac{(\mu+v)a}{b+c}+\frac{(v+\lambda)b}{c+a}+\frac{(\lambda+\mu)c}{a+b} \geqslant \sqrt{3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)} \tag{C}$$

从外观上瞧,(C)式"貌若天仙""秀如丽人",虽然,当 $\lambda=\mu=v$ 时,(C)式化为(A)式,当 $a=b=c$ 时,(C)式化三元对称不等式

$$\mu+\lambda+v \geqslant \sqrt{3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)} \qquad ①$$

因此(C)式将(A)式和①式"和谐"地统一在了一起.

证明　证 $p=a/(b+c)$,$q=b/(c+a)$,$r=c/(a+b)$,应用柯西不等式有

$$\lambda p+\mu q+rv+2[(\lambda u+\mu v+v\lambda)]^{\frac{1}{2}}(pq+qr+rp)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\lambda p+\mu q+vr+\sqrt{2(\lambda u+\mu v+v\lambda)}\sqrt{2(pq+qr+rp)} \leqslant$$
$$[\lambda^2+\mu^2+v^2+2(\lambda u+\mu v+v\lambda)]^{\frac{1}{2}}[p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)]^{\frac{1}{2}}=$$
$$(\lambda+\mu+v)(p+q+r) \Rightarrow$$
$$(\lambda+\mu+v)(p+q+r)-(\lambda p+\mu q+vr) \geqslant \qquad ②$$
$$2\sqrt{(\lambda u+\mu v+v\lambda)(pq+qr+rp)} \Rightarrow$$
$$(\mu+v)p+(v+\lambda)q+(\lambda+\mu)r \geqslant$$
$$2\sqrt{(\lambda u+\mu v+v\lambda)(pq+qr+rp)}$$

等号成立仅当 $\frac{\lambda}{p}=\frac{\mu}{q}=\frac{v}{r}$.

而前面的(B)式即为

$$pq+qr+rp \geqslant \frac{3}{4}$$

②式和(B)式结合,得

$$(\mu+v)p+(v+\lambda)q+(\lambda+\mu)r \geqslant \sqrt{3(\lambda u+\mu v+v\lambda)}$$

这即为(C)式,等号成立仅当 $\lambda=\mu=v$ 及 $a=b=c$.

(A)式的第二个加权推广是:

推广 2(加权推广)　设 $a,b,c>0$,权系数 $p,q,r\in(0,1)$,且 $p+q+r=1$,则

$$\frac{pa}{b+c}+\frac{qb}{c+a}+\frac{rc}{a+b} \geqslant \frac{pa+qb+rc}{(1-p)a+(1-q)b+(1-r)c} \tag{D}$$

特别地，当取 $p = q = r = \frac{1}{3}$ 时，(D) 式化为(A) 式，当 $a = b = c$ 时，(D) 式化为等式

$$\frac{1}{2}(p + q + r) = \frac{p + q + r}{3 - (p + q + r)} = \frac{1}{2}$$

证明　设 $S = a + b + c, x \in (0, S)$，关于 x 的函数为

$$f(x) = \frac{x}{S - x} = \frac{S}{S - x} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{S}{(S - x)^2} > 0 (f(x) \text{为凸函数}) \Rightarrow$$

$$pf(a) + qf(b) + rf(c) \geqslant f(pa + qb + rc) (\text{房森不等式}) \Rightarrow$$

$$\frac{pa}{S - a} + \frac{qb}{S - b} + \frac{rc}{S - c} \geqslant \frac{pa + qb + rc}{S - (pa + qb + rc)} \Rightarrow$$

$$\frac{pa}{b + c} + \frac{qb}{c + a} + \frac{rc}{a + b} \geqslant$$

$$\frac{pa + qb + rc}{(1 - p)a + (1 - q)b + (1 - r)c}$$

等号成立仅当 $a = b = c$.

不仅如此，(A) 式还有第 3 个加权推广：

推广 3(加权推广)　设 $a, b, c, \lambda, \mu, v > 0$，则有

$$P_\lambda = \frac{\lambda a}{b + c} + \frac{\mu b}{c + a} + \frac{vc}{a + b} \geqslant \sqrt{\lambda\mu} + \sqrt{\mu v} + \sqrt{v\lambda} - \frac{1}{2}(\lambda + \mu + v) \qquad \text{(E)}$$

特别地，当 $\lambda = \mu = v$ 时，(E) 式化为(A) 式. 当 $a = b = c$ 时，(E) 式化为不等式

$$\lambda + \mu + v \geqslant \sqrt{\lambda u} + \sqrt{\mu v} + \sqrt{v\lambda} \qquad ③$$

证明　作代换

$$\begin{cases} b + c = 2x > 0 \\ c + a = 2y > 0 \\ a + b = 2z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z - x \\ b = z + x - y \\ c = x + y - z \end{cases} \Rightarrow P_\lambda = \sum \frac{\lambda a}{b + c} = \frac{1}{2}\sum \lambda\left(\frac{y + z - x}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum \lambda\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1\right) = \frac{1}{2}\sum\left(\lambda \frac{y}{x} + \mu \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sum \lambda \geqslant$$

$$\sum \sqrt{\lambda u} - \frac{1}{2}\sum \lambda \Rightarrow P_\lambda \geqslant \sum \sqrt{\lambda u} - \frac{1}{2}\sum \lambda$$

这即为(E) 式，等号成立仅当 $\lambda = \mu = v$ 且 $a = b = c$.

(A) 式还有一个加权推广便是：

推广 4(加权推广)　设 $a, b, c > 0$，权系数 $\lambda, \mu, v \in (0,1)$，且 $\lambda + \mu + v = 1$，则

$$P_\lambda = \frac{\lambda a}{b + c} + \frac{\mu b}{c + a} + \frac{vc}{a + b} \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} + \sqrt{v})^2 \frac{\lambda a + \mu b + vc}{a + b + c} \qquad \text{(F)}$$

当 $\lambda = \mu = v = \frac{1}{3}$ 时，(F) 式化为(A) 式. 当 $a = b = c$ 时，(F) 式化为

$$\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} + \sqrt{v} \leqslant \sqrt{3} \qquad ④$$

证明 不妨设

$a \geqslant b \geqslant c > 0 \Rightarrow \frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{a+b}$(应用切比雪夫不等式的加权推广)$\Rightarrow$

$P_\lambda = \sum \frac{\lambda a}{b+c} \geqslant (\sum \lambda a)\left(\sum \frac{\lambda}{b+c}\right)$(应用柯西不等式)$\geqslant$

$(\sum \lambda a)(\sum \sqrt{\lambda})^2 / \sum (b+c) \Rightarrow P_\lambda \geqslant \frac{1}{2}(\sum \lambda)^2 \left(\frac{\sum \lambda a}{\sum a}\right)$

(F) 式成立,等号成立仅当 $\lambda = \mu = v = \frac{1}{3}$ 及 $a = b = c$.

3 参数推广

现在我们从参数方面去推广(A)式.

推广5(参数推广) 设 a, b, c, p, q 均为正数,则有

$$P_q = \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geqslant \frac{3}{p+q} \tag{G}$$

显然,当 $p = q$ 时,(G)式化为(A)式.

证明 设

$$S = a(pb+qc) + b(pc+qa) + c(pa+qb) = (p+q)(bc+ca+ab)$$

应用权方程不等式,有

$$P_q = \frac{a^2}{a(pb+qc)} + \frac{b^2}{b(pc+qa)} + \frac{c^2}{c(pa+qb)} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{S} \geqslant$$

$$\frac{3(bc+ca+ab)}{(p+q)(bc+ca+ab)} \Rightarrow P_q \geqslant \frac{3}{p+q}$$

等号成立仅当 $a = b = c$.

(G)式的配对形式便是(A)式的第二个参数推广:

推广6(参数推广) 设 $a, b, c > 0 - 2\lambda \geqslant \mu \geqslant 0$,则

$$P_\lambda = \frac{\lambda+a}{\mu+b+c} + \frac{\lambda+b}{\mu+c+a} + \frac{\lambda+c}{\mu+a+b} \geqslant \frac{3}{2} \tag{H}$$

一看便知,当 $\lambda = \mu = 0$ 时,(H)式即为(A)式.

证法1 记

$$S = \sum(\lambda+a)(\mu+b+c) \leqslant \sum(\lambda+a)(2\lambda+b+c) =$$

$$\sum[2\lambda^2 + \lambda(b+c+2a) + a(b+c)] =$$

$$6\lambda^2 + \lambda\sum(b+c+2a) + \sum a(b+c) = 6\lambda^2 + 4\lambda\sum a + 2\sum bc \leqslant$$

$$6\lambda^2 + 4\lambda\sum a + \frac{2}{3}(\sum a)^2 =$$

$$\frac{2}{3}(3\lambda + \sum a)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}(3\lambda+\sum a)^2P_\lambda \geqslant SP_\lambda =$$

$$\sum(\lambda+a)(\mu+b+c)\cdot\sum\frac{\lambda+a}{\mu+b+c} \geqslant$$

$$[\sum(\lambda+a)]^2=(3\lambda+\sum a)^2 \Rightarrow P_\lambda \geqslant \frac{3}{2}$$

等号成立仅当 $a=b=c$,且 $2\lambda=\mu$.

证法2 记

$$S=\sum(\mu+b+c)=3\mu+2\sum aP_\lambda+3=\sum\left(\frac{\lambda+a}{\mu+b+c}+1\right)=$$

$$(\lambda+\mu+\sum a)\sum\left(\frac{1}{\mu+a+b}\right)=$$

$$\frac{1}{2}(2\lambda+2\mu+2\sum a)\sum\left(\frac{1}{\mu+a+b}\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}(3\mu+2\sum a)\sum\left(\frac{1}{\mu+a+b}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum(\mu+a+b)\sum\left(\frac{1}{\mu+a+b}\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\times 3^2 \Rightarrow P_\lambda \geqslant \frac{3}{2}$$

等号成立仅当

$$\mu+b+c=\mu+c+a=\mu+a+b$$

且 $2\lambda=\mu$,即 $a=b=c$ 及 $2\lambda=\mu$.

证法3 我们设

$a \geqslant b \geqslant c \Rightarrow$

$$\begin{cases}\lambda+a \geqslant \lambda+b \geqslant \lambda+c \\ (\mu+b+c)^{-1} \geqslant (\mu+c+a)^{-1} \geqslant (\mu+a+b)^{-1}\end{cases}(\text{应用切比雪夫不等式}) \Rightarrow$$

$$P_\lambda=\sum\frac{\lambda+a}{\mu+b+c} \geqslant \frac{1}{3}\sum(\lambda+a)\sum\left(\frac{1}{\mu+b+c}\right)=$$

$$\frac{1}{3}(3\lambda+\sum a)\sum\left(\frac{1}{\mu+b+c}\right)=\frac{1}{6}(6\lambda+2\sum a)\sum\left(\frac{1}{\mu+b+c}\right)=$$

$$\frac{1}{6}\sum(2\lambda+b+c)\sum\left(\frac{1}{\mu+b+c}\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{6}\sum(\mu+b+c)\sum\left(\frac{1}{\mu+b+c}\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{6}\times 3^2=\frac{3}{2}$$

等号成立仅当 $a=b=c$ 且 $2\lambda=\mu$.

推广5和推广6是不等式(A)的两个简洁美观的参数推广,我们可以把它俩合二为

一统一成：

推广 7 设 a,b,c,λ,μ,p,q,r 均为正数，且 $\lambda(p+q)=\mu r$，则有

$$P_\lambda=\frac{\lambda+ra}{\mu+pb+qc}+\frac{\lambda+rb}{\mu+pc+qa}+\frac{\lambda+rc}{\mu+pa+qb}\geqslant\frac{3r}{p+q}\tag{I}$$

虽然，当 $p=q=r=1$ 时，(I) 式化为(H) 式.

证明 记 $S=a+b+c$，注意到记号

$$\sum a=\sum b=\sum c=S$$

及
$$\sum ab=\sum bc=\sum ca=ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}S^2$$

再证
$$\begin{cases}x=(\lambda+ra)(\mu+pb+qc)\\y=(\lambda+rb)(\mu+pc+qa)\\z=(\lambda+rc)(\mu+pa+qb)\end{cases}$$

$$x+y+z=\sum x=\sum(\lambda+ra)(\mu+pb+qc)=$$
$$\sum[\lambda\mu+\lambda(pb+qc)+r\mu a+r(pab+qca)]=$$
$$3\lambda\mu+\lambda\sum(pb+qc)+r\mu\sum a+r(p\sum ab+q\sum ca)=$$
$$3\lambda\mu+\lambda(p+q)S+r\mu S+r(p+q)\sum ab\leqslant$$
$$3\lambda\mu+[a(p+q)+r\mu]S+\frac{r}{3}(p+q)S^2=$$
$$3\lambda\mu+2\mu rS+\frac{\mu r^2}{3\lambda}S^2=$$
$$\frac{\mu}{3\lambda}(q\lambda^2+6\lambda rS+r^2S^2)=$$
$$\frac{\mu}{3\lambda}(3\lambda+rS)^2\Rightarrow$$
$$\frac{\mu}{3\lambda}(3\lambda+rS)^2P_\lambda\geqslant(\sum x)\sum\frac{(\lambda+ra)^2}{x}\geqslant$$
$$[\sum(\lambda+ra)]^2=(3\lambda+r\sum a)^2\Rightarrow$$
$$P_\lambda\geqslant\frac{3\lambda}{\mu}=\frac{3r}{p+q}$$

等号成立仅当 $a=b=c$，且 $\lambda(p+q)=\mu r$.

推广 7 也并非"孤家寡人"，它还有两个可爱的"伙伴"：

推广 8 设 a,b,c,λ,μ,v,p,q 均为正数，则有

$$P_\lambda=\frac{\lambda a}{pb+qc}+\frac{\mu b}{pc+qa}+\frac{vc}{pa+qb}\geqslant$$
$$\frac{pq}{p^3+q^3}[2\sqrt{\mu v}+\sqrt{v\lambda}+\sqrt{\lambda\mu}-(\lambda+\mu+v)]\tag{J}$$

特别地，当 $p=q$ 时，(J) 式化为推广三中的(E) 式.

证明 设 $k>0$，令

$$\begin{cases}x=b+kc>0\\y=c+ka>0\\z=a+kb>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=(k^2y+z-kx)/(1+k^3)\\b=(k^2z+x-ky)/(1+k^3)\\c=(k^2x+y-kz)/(1+k^3)\end{cases}\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{\lambda a}{b+kc}=\sum\frac{\lambda a}{x}\Rightarrow$$

$$(1+k^3)P_\lambda=\sum\frac{\lambda}{x}(k^2y+z-kx)=\sum\lambda\left(k^2\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-k\right)=$$

$$\sum\left(\lambda k^2\frac{y}{x}+\mu\frac{x}{y}\right)-k\sum\lambda\geqslant 2k\sum\sqrt{\lambda\mu}-k\sum\lambda\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{k}{1+k^3}\left(2\sum\sqrt{\lambda\mu}-\sum\lambda\right)$$

令 $k=q/p$，代入上式得

$$P_\lambda\geqslant\frac{pq}{p^3+q^3}\left(2\sum\sqrt{\mu v}-\sum\lambda\right)$$

易推得等号成立仅当 $a=b=c,p=q,\lambda=\mu=v$.

推广 9 设 a,b,c,λ,μ,v,p,q 均为正数，则有

$$P_\lambda=\frac{(\mu+v)^2a}{pb+qc}+\frac{(v+\lambda)^2b}{pc+qa}+\frac{(\lambda+\mu)^2c}{pa+qb}\geqslant\frac{4}{p+q}(\mu v+v\lambda+\lambda u)\qquad(\mathrm{K})$$

如果 $\lambda=\mu=v$，则(K)式化为推广 5 中的(G)式.

证明 应用权方和不等式和推广 1 证明中的(2)式，有

$$P_\lambda=\sum\frac{(\mu+v)^2a}{pb+qc}=\sum\frac{[(u+v)a]^2}{pab+qca}\geqslant$$

$$\frac{[\sum(\mu+v)a]^2}{\sum(pab+qca)}\geqslant\frac{4(\sum\mu v)\sum bc}{(p+q)\sum bc}=$$

$$\frac{4}{p+q}(\mu v+v\lambda+\lambda u)$$

等号成立仅当 $a=b=c$ 和 $\lambda=\mu=v$.

4 指数推广

和许多优美的不等式一样，我们也可以建立不等式(A)的指数推广. 为了节省篇幅，(A)式的单纯的指数推广将安排在下一节，作为特例体现.

推广 10 设 $a,b,c,\lambda,\mu,v,p,q,\alpha,\beta$ 均为正数，且 $\alpha\geqslant 1$，则有

$$P_\lambda^{(\alpha)}=\frac{\lambda a^\alpha}{(pb+qc)\beta}+\frac{\mu b^\alpha}{(pc+qa)\beta}+\frac{vc^\alpha}{(pa+qb)\beta}\geqslant\frac{(3^{1-\alpha}\cdot\delta^{1+\beta}\cdot t^{\alpha-\beta})^{1/2}}{(p+q)^\beta}\qquad(\mathrm{L})$$

其中

$$\begin{cases}\delta=2\sum(\mu v)^{\frac{1}{1+\beta}}-\sum\lambda^{\frac{2}{1+\beta}}\\t=bc+ca+ab\end{cases}$$

显然，当 $\alpha=\beta=1$ 时

$$t^{\alpha-\beta}=1$$

$$\delta=2\sum\sqrt{\mu v}-\sum\lambda$$

(L) 式被简化.

证明　注意到 $\alpha \geqslant 1, \beta > 0$,记 $\theta = \dfrac{\alpha + \beta}{1 + \beta} \geqslant 1$.

应用权方和不等式和幂平均不等式,有

$$P_\lambda^{(\alpha)} = \sum \frac{\lambda a^\alpha}{(pb + qc)^\beta} = \sum \frac{\lambda a^{\alpha+\beta}}{(pab + qca)^\beta} =$$

$$\sum \frac{(\lambda^{\frac{1}{1+\beta}} a^\theta)^{1+\beta}}{(pab + qca)^\beta} = \frac{(\sum \lambda^{\frac{1}{1+\beta}} a^\theta)^{1+\beta}}{[\sum (pab + qca)]^\beta} =$$

$$\frac{(\sum \lambda^{\frac{1}{1+\beta}} a^\theta)^{1+\beta}}{[(p + q)\sum bc]^\beta} \geqslant \frac{[\delta \sum (bc)^\theta]^{\frac{1+\beta}{2}}}{(p + q)^\beta (\sum bc)^\beta} \geqslant$$

$$\frac{\left[3\delta\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^\theta\right]^{\frac{1+\beta}{2}}}{(p + q)^\beta (\sum bc)^\beta} \Rightarrow$$

$$P_\lambda^{(\alpha)} \geqslant \frac{(3^{1-\alpha} \cdot \delta^{1+\beta} \cdot t^{\alpha-\beta})^{\frac{1}{2}}}{(p + q)^\beta}$$

等号成立仅当 $a = b = c$ 和 $\lambda = \mu = v$.

有趣的是,如果我们记 $\triangle ABC$ 的三内角为 A, B, C,作置换

$$(a, b, c) \to (\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2})$$

则

$$t = \sum bc = \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$$

(L) 式转化成一个不平凡的三角不等式

$$\sum \frac{\lambda(\tan \frac{A}{2})^\alpha}{(p\tan \frac{B}{2} + q\tan \frac{C}{2})^\beta} \geqslant \frac{\sqrt{3^{1-\alpha} \cdot \delta^{1+\beta}}}{(p + q)^\beta} \tag{※}$$

我们则建立的(L) 式,做到了从权系数 λ, μ, v,参数 p, q,指数 α, β 三个方面推广了(A) 式,起到了"三国归晋" 的和谐统一作用,但是,由于表达式 δ 的特殊性,不十分令人满意,为此,我们另建一个更完美的推广式.

推广 11　设 $a, b, c, \lambda, \mu, v, p, q, \alpha, \beta$ 均为正数,且 $\alpha \geqslant 1$,则

$$\frac{(\mu + v)a^\alpha}{(pb + qc)^\beta} + \frac{(v + \lambda)b^\alpha}{(pc + qa)^\beta} + \frac{(\lambda + \mu)c^\alpha}{(pa + qb)^\beta} \geqslant \frac{2}{(p + q)^\beta [3(\mu v + v\lambda + \lambda\mu)t^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{2}}} \tag{M}$$

其中

$$t = \frac{1}{3}(bc + ca + ab)$$

证明　记(M) 式左边为 $P_\lambda^{(\alpha)}$,$\theta = \dfrac{\alpha + \beta}{1 + \beta} \geqslant 1$.

$$\begin{cases}x=pab+qca\\y=pbc+qab\\z=pca+qbc\end{cases}\Rightarrow x+y+z=3(p+q)t\Rightarrow$$

$$yz+zx+xy\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2=3(p+q)^2t^2$$

再设 $M=\sum\frac{(ab)^{\alpha}}{[(pb+qc)(pc+qa)]^{\beta}}=\frac{(ab)^{\alpha+\beta}}{(xy)^{\beta}+}+\frac{(bc)^{\alpha+\beta}}{(yz)^{\beta}}+\frac{(ca)^{\alpha+\beta}}{(zx)^{\beta}}=$

$$\frac{[(ab)^{\theta}]^{1+\beta}}{(xy)^{\beta}}+\frac{[(bc)^{\theta}]^{1+\beta}}{(yz)^{\beta}}+\frac{[(ca)^{\theta}]^{1+\beta}}{(zx)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{[(ab)^{\theta}+(bc)^{\theta}+(ca)^{\theta}]^{1+\beta}}{(xy+yz+zx)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{[(ab)^{\theta}+(bc)^{\theta}+(ca)\theta]^{1+\beta}}{[3(p+q)^2t^2]^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{[3(\frac{ab+bc+ca}{3})^{\theta}]^{1+\beta}}{[3(p+q)^2t^2]^{\beta}}=$$

$$(3t^{\theta})^{1+\beta}\cdot[3(p+q)^2t^2]^{-\beta}=3^{1+\beta}t^{\alpha+\beta}\cdot 3^{-\beta}(p+q)^{-2\beta}\cdot t^{-2\beta}\Rightarrow$$

$$M\geqslant\frac{3t^{\alpha-\beta}}{(p+q)^{2\beta}}\Rightarrow \qquad ①$$

$$P_{\lambda}^{(\alpha)}=\sum\frac{(\mu+v)a^{\alpha}}{(pb+qc)^{\beta}}\geqslant 2[(\sum\mu v)M]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\frac{2}{(p+q)^{\beta}}[3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)t^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{2}}$$

等号成立仅当 $a=b=c$ 和 $\lambda=\mu=v$.

下面我们再将推广 7 中的(I) 式进行指数推广:

推广 12　设 $a,b,c,p,q,r,\lambda,\mu,\alpha,\beta$ 均为正数,且 $\lambda(p+q)=\mu r,\alpha\geqslant 1$.

$$P_{\lambda}^{(\alpha)}=\frac{(\lambda+ra)^{\alpha}}{(\mu+pb+qc)^{\beta}}+\frac{(\lambda+rb)^{\alpha}}{(\mu+pc+qa)^{\beta}}+\frac{(\lambda+rc)^{\alpha}}{(\mu+pc+qa)^{\beta}}\geqslant$$

$$3\left(\frac{r}{p+q}\right)^{\beta}\left(\frac{3\lambda+rs}{3}\right)^{\alpha-\beta} \qquad (N)$$

显然有,当 $\alpha=\beta=1$ 时,(N) 式化为(I) 式.

证明　记 $\theta=\frac{\alpha+\beta}{1+\beta}\geqslant 1,t=\frac{1}{3}(3\lambda+rs)$.

$$\begin{cases}x=(\lambda+ra)(\mu+pb+qc)\\y=(\lambda+rb)(\mu+pc+qa)\\z=(\lambda+rc)(\mu+pa+qb)\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}m=\sum x=x+y+z\leqslant\frac{3\mu}{\lambda}t^2\\\sum(\lambda+ra)=3\lambda+rs=3t\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$P_{\lambda}^{(\alpha)}=\sum\frac{(\lambda+ra)^{\alpha}}{(\mu+pb+qc)^{\beta}}=\sum\frac{[(\lambda+ra)^{\theta}]^{1+\beta}}{x^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{[\sum(\lambda+ra)^{\theta}]^{1+\beta}}{(\sum x)^{\beta}}\geqslant\frac{1}{m^{\beta}}\left\{3\left[\frac{\sum(\lambda+ra)}{3}\right]^{\theta}\right\}^{1+\beta}=$$

$$\frac{(3t^{\beta})^{1+\beta}}{m^{\beta}} \geqslant \left(\frac{\lambda}{3\mu t^2}\right)^{\beta} \cdot 3^{1+\beta} \cdot t^{\alpha+\beta} =$$

$$3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta} \cdot t^{\alpha-\beta} \Rightarrow P_{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant 3\left(\frac{r}{p+q}\right)^{\beta} \cdot t^{\alpha-\beta}$$

5　元数推广

不等式(A)是关于3个正元数 a,b,c 的分式和不等式，由于它抛砖引玉，自然一石激起千层浪，激发我们分析它，探讨它，研究它．我们不仅要将(A)式从3元推广到 $n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 元，还要从系数、参数、指数、配数方面去开发它，使之云雾散见日出．

推广 13　设 $a_i > 0, \lambda_i \in (0,1)(1 \leqslant i \leqslant n; 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$，且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i a_i}{S - a_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\right)^2}{n-1} - 1 \tag{O}$$

其中 $S = \sum_{i=1}^{n}a_i$．

当 $n = 3$ 时，(O)式等价于推广3中的(E)式．

证明　我们令

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n}x_i \\ S - a_i = (n-1)x_i \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(S - a_i) = (n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow$$

$$(n-1)S = (n-1)x \Rightarrow S = x \Rightarrow a_i = S - (n-1)x_i =$$

$$x - (n-1)x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i a_i}{S - a_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i[x - (n-1)x_i]}{(n-1)x_i} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_i x}{(n-1)x_i} - \lambda_i\right] = \frac{x}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x_i} - 1 \geqslant \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\right)^2 - 1$$

等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{x_1} : x_1 = \frac{\lambda_2}{x_2} : x_2 = \cdots = \frac{\lambda_n}{x_n} : x_n \Rightarrow \\ \frac{\lambda_1}{(S-a_1)^2} = \frac{\lambda_2}{(S-a_2)^2} = \cdots = \frac{\lambda_n}{(S-a_n)^2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_i = \frac{(S - a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(S - a_i)^2}, i = 1,2,\cdots,n$$

推广 13 中的(O) 式是一个非常简洁明快的推广结论,其等号成立的条件也有趣.

是否有与(O) 式相配对的推广式呢?结论是肯定的,不过,在推导时要应用如下:

引理 设 $x_i,y_i>0(i=1,2,\cdots,n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$,记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$,则有

$$[(x_2+x_3+\cdots+x_n)y_1+(x_1+x_3+\cdots+x_n)y_2+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})y_n]^2\geqslant 4(\sum x_ix_j)(\sum y_iy_j) \qquad ①$$

等号成立仅当

$$x_1:y_1=x_2:y_2=\cdots=x_n:y_n$$

特别地,当 $n=3$ 时,① 式化为

$$[(x_2+x_3)y_1+(x_3+x_1)y_2+(x_1+x_2)y_3]^2\geqslant 4(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)(y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2) \qquad ②$$

② 式具有广泛的应用,我们在以前多次应用它.建立了漂亮的系数推广,我们今后还要长期应用它.

推广 14 设 $a_i>0,\lambda_i\in(0,1)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\lambda_i)^2a_i}{S-a_i}\geqslant 2\sum\lambda_i\lambda_j \qquad (P)$$

其中 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

证明 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(S-a_i)=S\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=2\sum a_ia_j$$

及

$$1-\lambda_i=\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_n,约定\ \lambda_0=0,i=1,2,\cdots,n$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\lambda_i)^2a_i}{S-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{[(1-\lambda_i)a_i]^2}{a_i(S-a_i)}\geqslant\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)a_i]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(S-a_i)}=\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)a_i]^2}{2\sum a_ia_j}\geqslant$$

$$\frac{4(\sum\lambda_i\lambda_j)(\sum a_ia_j)}{2\sum a_ia_j}=2\sum\lambda_i\lambda_j$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n,\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$.

推广 13 中的(O) 式与推广 14 中的(P) 式,虽然都带有系数,却没有带指数,故略显美中不足.为此,我们给它"锦上添花",从元数、系数、指数三方面综合推广(A) 式.

推广 15 设 $a_i>0,p_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N}),\alpha\geqslant1,\beta>0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}P_i=n-1$,记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$,有

$$t = \frac{\sum a_i a_j}{C_n^2}, p = \frac{\sum (1-p_i)(1-p_j)}{C_n^2}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_i^{\alpha}}{(S-a_i)^{\beta}} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{\beta}} \cdot \sqrt{p t^{\alpha-\beta}} \quad (Q)$$

证明 记(Q)式左边为 $P_n^{(\alpha)}$,令

$$1-p_i = \lambda_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n - \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$\theta = (\alpha+\beta)/(1+\beta) \geqslant 1, S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\lambda = \left(\sum \lambda_i \lambda_j\right)/C_n^2$$

并注意到

$$p_i = 1-\lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n, 1 \leqslant i \leqslant n, \text{约定 } \lambda_0 = 0$$

记

$$b_i = a_i(S-a_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(Sa_i - a_i^2) = S\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} b_i = 2\sum a_i a_j = 2tC_n^2 \\ &\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right)^2 \geqslant \frac{\sum b_i b_j}{C_n^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum b_i b_j \leqslant \left(\frac{2t}{n}\right)^2 (C_n^2)^3$$

由于

$$P_n^2(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_i^{\alpha}}{(S-a_i)^{\beta}}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^{\beta}}\right)^2 \geqslant 4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \sum \frac{(a_i a_j)^{\alpha+\beta}}{(b_i b_j)^{\beta}} =$$

$$4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \sum \frac{[(a_i a_j)^{\theta}]^{1+\beta}}{(b_i b_j)^{\beta}} \geqslant 4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \frac{\left[\sum (a_i a_j)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{\left(\sum b_i b_j\right)^{\beta}} \geqslant$$

$$4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \frac{\left[C_n^2\left(\frac{\sum a_i a_j}{C_n^2}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{\left(\sum b_i b_j\right)^{\beta}} = 4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \frac{(C_n^2 t^{\theta})^{1+\beta}}{\left(\sum b_i b_j\right)^{\beta}} \geqslant$$

$$4\left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) \frac{(C_n^2)^{1+\beta} \cdot t^{\alpha+\beta}}{\left[\left(\frac{2t}{n}\right)^2 (C_n^2)^3\right]^{\beta}} = 4\lambda C_n^2 \cdot (C_n^2)^{1+\beta} \cdot (C_n^2)^{-3\beta} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{2\beta} \cdot t^{\alpha-\beta} =$$

$$4\lambda \left(\frac{n}{2}\right)^{2\beta} \cdot (C_n^2)^{2(1-\beta)} \cdot t^{\alpha-\beta} \Rightarrow$$

$$P_n^{(\alpha)} \geqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\beta} (C_n^2)^{1-\beta} \cdot (\lambda t^{\alpha-\beta})^{\frac{1}{2}} \quad ③$$

由于

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i \lambda_j}{C_n^2} = \frac{\sum (1-p_i)(1-p_j)}{C_n^2} = p, C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)$$

代人式 ③ 即得式(Q).等号成立仅当

$$p_i=\frac{n-1}{n}\Rightarrow p=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,a_i=a,t=a^2,i=1,2,\cdots,n$$

(Q) 式是从元数、系数、指数三个方面推广了(A) 式,虽然证明偏难,但技巧性较强,也颇显精致.现在我们于从元数、参数、指数三个方面推广(A) 式.

推广 16 设 $a_i>0,\lambda_i>0$,并约定 $a_{n+i}=a_i(i=1,2,\cdots,n;3\leqslant n\in\mathbf{N}),\alpha,\beta>0$,且 $\alpha\geqslant 1+\beta$,证 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i,b_i=\lambda_1a_{i+1}+\lambda_2a_{i+2}+\cdots+\lambda_n+a_{i+n-1}(1\leqslant i\leqslant n)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{b_i^{\beta}}\geqslant\frac{n}{\lambda^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}\tag{R}$$

特别地,当取 $\alpha=\beta,\lambda_i=t(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\alpha}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\alpha}}$$

证明 记 $\theta=\alpha/(1+\beta)\geqslant 1$,又易推得 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\lambda s$.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{b_i^{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^{\theta})^{1+\beta}}{b_i^{\beta}}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\theta}\right)^{1+\beta}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{\beta}}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\theta}\right)^{1+\beta}}{(\lambda s)^{\beta}}\geqslant$$

$$\left[n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}\cdot(\lambda s)^{-\beta}=\left[n\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1+\beta}}\right]^{1+\beta}(\lambda s)^{-\beta}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{b_i^{\beta}}\geqslant\frac{n}{\lambda^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

(R) 式并非孤单独处,它还有一个配对式:

推广 17 设 $a_i,\lambda_i,\mu_i>0(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N}),\beta>0,\alpha\geqslant 1+\beta$,记 $s=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i,\mu=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i$,且 $(n-1)\lambda\geqslant\mu>0$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i+a_i)^{\alpha}}{(\mu_i+S-a_i)^{\beta}}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{\lambda+s}{n}\right)^{\alpha-\beta}\tag{S}$$

证明 记

$$\theta=\alpha/(1+\beta)\geqslant 1$$

$$b_i=\mu_i+s-a_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}b_i=\mu+(n-1)s$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+a_i)=\lambda+s$$

(S) 式左边为 $P_n^{(\alpha)}$,则

$$P_n^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{[(\lambda_i + a_i)\theta]^{1+\beta}}{b_i^{\beta}} \geqslant \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + a_i)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta}} \geqslant$$

$$\left\{n\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + a_i)}{n}\right]^{\theta}\right\}^{1+\beta} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{-\beta} =$$

$$\frac{n^{1+\beta-\alpha}(\lambda + s)^{\alpha}}{[\mu + (n-1)s]^{\beta}} \geqslant \frac{n^{1+\beta-\alpha}(\lambda + s)^{\alpha}}{[(n-1)\lambda + (n-1)s]^{\beta}} \Rightarrow$$

$$P_n^{(\alpha)} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{\lambda + s}{n}\right)^{\alpha-\beta}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 和 $(n-1)\lambda = \mu$.

6 再探讨

在上一节的几个推广式中,我们易得其特例

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s - a_i}\right)^{k} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{k}} \quad ①$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{(s - a_i)^{\beta}} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta} \quad ②$$

其中 $k \geqslant 1, \alpha \geqslant 1 + \beta, \beta > 0$.

① 式即是第 31 届 IMO 预选题,② 式是它的一个推广.

我们知道,② 式是(A) 式 n 元推广后的指数推广,其指数 α, β 具有约束条件:$\alpha \geqslant 1 + \beta$, $\beta > 0$,现在,我们觉得这个条件太苛刻,能否出“奇兵”打开局面,“解放”指数 α, β,扩大约束条件呢?其实,只要巧妙应用加权不等式,就能办到:

推广 18 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,均为正数,指数 α, β 满足:$\beta > 0$,且 $\alpha + \frac{\beta}{n-1} \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{(s - a_i)^{\beta}} \geqslant \frac{n}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta} \quad (\mathrm{T})$$

其中 $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

显然,当 $\beta \geqslant n - 1$ 时,允许 $\alpha \leqslant 0 < 1 < 1 + \beta$,因此,指数 α 的约束范围 $\alpha \geqslant 1 + \beta > 1$ 被拓宽了.

证明 我们简证 $\theta = \alpha + \frac{\beta}{n-1} \geqslant 1$,(T) 式左边为 $P_n^{(\alpha)}$,再证

$$b_i = (n-1)a_i \cdot (s - a_i)^{n-1} \leqslant \left[\frac{(n-1)a_i + (n-1)(s - a_i)}{1 + (n-1)}\right]^{1+(n-1)} = \left[\frac{(n-1)s}{n}\right]^{n} \quad ③$$

$$x_i=\frac{a_i^{\theta}}{(s-a_i)^{\beta}}=\frac{[(n-1)a_i]^{\frac{-\beta}{n-1}}\cdot a_i^{\theta}}{b_i^{\beta/(n-1)}}=\frac{(n-1)^{\beta/(n-1)}\cdot a_i^{\beta}}{b_i^{\beta/(n-1)}}\geqslant$$

$$(n-1)^{\frac{\beta}{n-1}}\cdot a_i^{\beta}\cdot\left[\frac{(n-1)s}{n}\right]^{-\frac{n\beta}{n-1}}=ka_i^{\beta}\text{（其中 }k=(n-1)^{-\beta}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{-n\beta/(n-1)}\text{）}\Rightarrow$$

$$P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant k\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\geqslant nk\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\beta}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{-\frac{n\beta}{n-1}}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha+\frac{\beta}{n-1}}\Rightarrow$$

$$P_n^{(\alpha)}\geqslant\frac{n}{(n-1)^{\beta}}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

通过上述证明，使我们知道，采用不同的技巧，会得到不同的结果，所谓“种豆得豆，种瓜得瓜”.

在前面的推广 13 的(O) 式到推广 18 的(T) 式中，左边和里的各项分式，分配是：在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个正数中，分母均占 $n-1$ 个数，而分子却只占 1 个数，这个安排分配太偏心、不公平. 为了改善这一状况，我们在分配上将(T) 式推广为：

推广 19 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 均为正数，配数 $1\leqslant k\leqslant n-1$，指数 $\beta>0,\theta=\alpha+\frac{k\beta}{n-k}\geqslant 1$，证

$$x_i=\frac{(a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{k+i-1})^{\alpha}}{(a_{k+i}+a_{k+i+1}+\cdots+a_{n+i-1})^{\beta}}$$

（约定 $a_{n+i}=a_i,1\leqslant i\leqslant n$），则有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{nk^{\alpha}}{(n-k)^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}\tag{U}$$

显然，当 $k=1$ 时，(U) 式化为(T) 式. 特别地，当 $k=n-1$ 时(注意 $s=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$)，(U) 式化为

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant n(n-1)^{\alpha}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}\tag{④}$$

证明 再证

$$C_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{k+i-1}(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}C_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i=ks\tag{⑤}$$

且

$$b_i=\left(\frac{a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{k+i-1}}{k}\right)^{k}\left(\frac{a_{k+i}+a_{k+i+1}+\cdots+a_{n+i-1}}{n-k}\right)^{n-k}\leqslant$$

$$\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{k+(n-k)}\right]^{k+(n-k)}\Rightarrow b_i\leqslant\left(\frac{s}{n}\right)^{n}\tag{⑥}$$

于是

$$x_i=\frac{C_i^{\theta}}{k^{\frac{k\beta}{n-k}}\cdot(n-k)^{\beta}b_i^{\beta/(n-k)}}\geqslant tC_i^{\theta}\tag{⑦}$$

其中
$$t = k^{-\left(\frac{k\beta}{n-k}\right)} \cdot (n-k)^{-\beta} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^{-\left(\frac{m\beta}{n-k}\right)} \tag{8}$$

于是
$$P_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant t\sum_{i=1}^{n} C_i^{\theta} \geqslant nt\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i}{n}\right)^{\theta} = nt\left(\frac{ks}{n}\right)^{\theta} \Rightarrow$$
$$P_n^{(k)} = \frac{nk^{\alpha}}{(n-k)^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-\beta}$$
等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

无独有偶,(U) 式的配对形式是:

推广 20 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-k}(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 均为正数,且 $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-k} = 1$,记 $\theta = \alpha + \frac{k}{n-k} \geqslant 1$,则
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{k+i-1})^{\alpha}}{a_{k+i}^{\beta_1} a_{k+i+1}^{\beta_2} \cdots a_{n+i-1}^{\beta_{n-k}}} \geqslant \frac{tnk^{\alpha}}{n-k}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-1} \tag{V}$$
约定 $a_{n+i} \equiv a_i, s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, t$ 的证法同上.

如果将指数约束条件 $\alpha + \frac{k\beta}{n-k} \geqslant 1(\beta > 0)$ 放宽为 $\alpha \geqslant 1 + \beta > 1$,则应用权方和不等式和幂平均不等式,我们又可将(V) 式拓广为:

推广 21 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列,记 $x_i = (b_1 b_2 \cdots b_n)/b_i$, $1 \leqslant k, m \leqslant n-1, \alpha \geqslant 1 + \beta > 1, s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,并约定 $a_{n+i} \equiv a_i, b_{n+i} \equiv b_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,则有
$$\sum_{i=1}^{n} e_i \geqslant \frac{nk^{\alpha}}{m^{\beta}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-(n-1)\beta} \tag{W}$$
其中
$$e_i = \frac{(a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{k+i-1})^{\alpha}}{(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{m+i-1})^{\beta}}$$

如果说(V) 式(W) 式不是(A) 式的正统推广,而只能算是拓展的话,那么,只要再附加一个条件,我们就能建立一个相当综合的推广:

推广 22 设 $\alpha \geqslant 1, \beta > 0, a_{ij} > 0, p_i \in (\frac{1}{n-1}, 1)$. 记 $S_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n; 3 \leqslant n \in \mathbf{N}; j = 1, 2, \cdots, m, m \in \mathbf{N})$ 且满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,再记
$$A_j = \left(\sum_{1 \leqslant r < k \leqslant n} a_{rj} a_{kj}\right)/C_n^2$$
$$P = \left\{\sum_{1 \leqslant r < j \leqslant n} [1 - (n-1)p_i][1 - (n-1)p_r]\right\}/C_n^2$$
如果 m 个序列 $\{a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}\}, \{a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}\}, \cdots, \{a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}\}$ 顺序,则有
$$\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m} \frac{p_i a_{ij}^{\alpha}}{(s_j - a_{ij})^{\beta}}\right] \geqslant \delta^m \cdot \left(\prod_{j=1}^{m} A_j\right)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \tag{X}$$
其中
$$\delta = P2^{1-\beta} \cdot n^{\beta}(C_n^2)^{\frac{1}{2}(1-2\beta)}$$

一看便知，本推广是将推广 15 从一个数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 推广到了 m 个数组 $\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}\}(j=1,2,\cdots,m)$，而且还带有权系数.

如果 $p_i=\frac{1}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$，(X) 式简化为

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}^{\alpha}}{(s_j-a_{ij})^{\beta}}\Big]\geqslant\frac{n}{(n-1)^{m\beta}}\Big(\prod_{j=1}^{m}A_j\Big)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \tag{X_1}$$

在 20 世纪 80 年代，有人建立了切比雪夫不等式的加权推广，后来，我国的张运筹教授又将切比雪夫不等式从 2 组正数推广到了 $m(2\leqslant m\in\mathbf{N})$ 组. 推导时运用了高等数学中的矩阵. 其实，应用初等的加权幂平均不等式就可从组数、权系数方面推广切比雪夫不等式. 应用这个推广式和推广 15 中的(Q) 式推广成(X) 式.

引理　设 $\{x_{m1}\},\{x_{m2}\},\cdots,\{x_{mn}\}$ 均为非负同序列，权系数 $p_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N};1\leqslant j\leqslant m,2\leqslant m\in\mathbf{N})$，且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(p_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}\Big)\geqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ix_{ij}\Big) \tag{※}$$

等号成立仅当 $x_{1j}=x_{2j}=\cdots=x_{nj}(j=1,2,\cdots,m)$.

证明　设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 均同号，且证 $\gamma=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j,a_i\geqslant0(1\leqslant i\leqslant n)$.

(ⅰ) 当

$$\gamma_j>0\Rightarrow\gamma>\gamma_j>0(1\leqslant j\leqslant m)\Rightarrow\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{1/\gamma}\geqslant$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Big)^{1/\gamma_j}\text{(加权幂平均不等式)}\Rightarrow$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{\gamma_j/\gamma}\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Rightarrow\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{\gamma_j/\gamma}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Big)\Rightarrow$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{(\sum_{j=1}^{m}\gamma_j)/\gamma}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Big)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Big) \tag{⑨}$$

(ⅱ) 当 $\gamma_j<0$ 时

$$\gamma<\gamma_j<0(1\leqslant j\leqslant m)\Rightarrow\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{1/\gamma}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Big)^{1/\gamma_j}\Rightarrow$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\Big)^{\gamma_j/\gamma}\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}$$

同样可得 ⑨ 式.

令 $a_i^{\gamma_j}=x_{ij}$，即 $a_i^{\gamma_1}=x_{i1},a_i^{\gamma_2}=x_{i2},\cdots,a_i^{\gamma_m}=x_{im}(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 均同号，则 $\{x_{1m}\},\{x_{2m}\},\cdots,\{x_{nm}\}$ 均同序，且

$$\prod_{j=1}^{m}x_{ij}=\prod_{j=1}^{m}a_i^{\gamma_j}=a_i^{\sum_{j=1}^{m}\gamma_j}=a_i^{\gamma}$$

代入 ⑨ 式得

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}) \geqslant \prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}p_ix_{ij})$$

即(X) 式成立. 等号成立仅当 $x_{1j} = x_{2j} = \cdots = x_{nj}(j = 1,2,\cdots,m)$.

应用此引理即可将推广 15 推广成(X) 式.

7 完 善

我们在前面探讨了不等式(A) 的加强、推广、拓展, 这是纵向研究, 现在从横面上去初探它的完善.

$$p = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \tag{A}$$

这表明

$$p_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c$$

即只有当 $a = b = c$ 时, p 取小值 $\frac{3}{2}$(下界值). 但是, p 有最大值吗?

为此, 我们设 $0 < p \leqslant a,b,c \leqslant q$, 不妨先设 a,b 为常数. $c = x \in [p,q]$ 为变量, 关于 x 的函数为

$$P = f(x) = \frac{a}{x+b} + \frac{b}{x+a} + \frac{x}{a+b} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{x+b}} - \sqrt{\frac{x+b}{2(a+b)}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{x+a}} - \sqrt{\frac{x+a}{2(a+b)}}\right)^2 + \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{1}{2} \quad ①$$

从 ① 式知, 只有在 x 取极端值 p 或 q 时, $f(x)$ 才能取到最大值(上界值). 同理, 当 a,b 只有取极端值 p 或 q 时, p 才能达到最大值.

现在, 由对称性, 我们设

$$0 < p \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant q$$

自然得到两种取法

$$P_1 = P(a,b,c) = P(p,q,q) = \frac{p}{2q} + \frac{2q}{p+q}$$

$$P_2 = P(p,p,q) = \frac{q}{2p} + \frac{2p}{p+q}$$

因此

$$P_2 - P_1 = \frac{(q-p)^2}{2pq(p+q)} \geqslant 0 \Rightarrow P_2 \geqslant P_1 \geqslant p \geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow \tag{A$_1$}$$

$$P_{\max} = P_2 = \frac{3}{2} + \frac{(q-p)^2}{2p(p+q)}$$

当 a,b,c 中有两个取 p, 一个取 q 时, p 达到最大值 P_2.

现在, 我们可将(A) 式完善成一个双方不等式

$$\frac{3}{2} + \frac{(q-p)^2}{2p(p+q)} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \tag{A$_2$}$$

进一步地, 如果设 $0 < p \leqslant a_i \leqslant q(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$, $S = \sum_{i=1}^{n}a_i$, $P_n =$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{s-a_i}$,则

$$\max P_n=\frac{n}{n-1}+\lambda \quad ②$$

其中

$$\lambda=(q-p)^2/\{(n-1)p[(n-2)p+q]\} \quad ③$$

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中一取 q,其余 $n-1$ 取 p 时达到.

这样,我们又建立了(A_2)式的推广形式

$$\frac{n}{n-1}+\lambda\geqslant P_n\geqslant\frac{n}{n-1} \quad (A_3)$$

8 相关结论

可以说,优美的不等式(A)在代数不等式范畴内不仅起到了抛砖引玉的作用,而且在此范畴内掀起了一场热潮.

比如,从(A)式的指数推广,易得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2} \quad ①$$

我们先将①式加强为:

结论1 设 $a,b,c>0$,则有

$$T=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}+\frac{1}{4}Q \quad (T_1)$$

其中

$$Q=\frac{(a-b)^2}{a+b}+\frac{(b-c)^2}{b+c}+\frac{(c-a)^2}{c+a} \quad ②$$

证明 根据对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.作如下变形

$$\frac{a^2}{b+c}=\left[\frac{a^2}{b+c}-\frac{4a-b-c}{4}-\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}\right]+\left[\frac{4a-b-c}{4}+\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}\right]=$$

$$\frac{1}{b+c}\left[\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\left(\frac{b-c}{2}\right)^2\right]+\frac{4a-b-c}{4}+\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}=$$

$$\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{4a-b-c}{4}+\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}$$

同理,$\dfrac{b^2}{c+a}$,$\dfrac{c^2}{a+b}$ 有类似表达式.三式相加得

$$T=\sum\frac{a^2}{b+c}=\sum\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{1}{4}Q+\frac{1}{4}\sum(4a-b-c)=$$

$$\frac{(a-b)^2(a+b)}{(b+c)(c+a)}+\frac{(a-c)(b-c)}{a+b}+\frac{\sum a}{4}+\frac{Q}{4}\Rightarrow T\geqslant\frac{a+b+c}{2}+\frac{1}{4}Q$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

其实,(T_1)式还可从系数上加权推广成:

结论2 设 a,b,c,λ,μ,v 均为正数,则

$$T_\lambda = \frac{\lambda a^2}{b+c} + \frac{\mu b^2}{c+a} + \frac{v c^2}{a+b} \geqslant \frac{A}{4} + \frac{Q'}{4} \qquad (T_2)$$

其中

$$\begin{cases} A = (\mu_1 + v_1)a + (v_1 + \lambda_1)b + (\lambda_1 + v_1)c \\ Q' = \dfrac{\lambda(b-c)^2}{b+c} + \dfrac{\mu(c-a)^2}{c+a} + \dfrac{v(a-b)^2}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - 2(\sqrt{\mu} - \sqrt{v})^2 \\ \mu_1 = \mu - 2(\sqrt{v} - \sqrt{\lambda})^2 \\ v_1 = v - 2(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 \end{cases}$$

证明 设

$$\begin{cases} 2x = b + c \\ 2y = c + a \\ 2z = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z - x \\ b = z + x - y \\ c = x + y - z \end{cases} \Rightarrow 2T_\lambda = \sum \frac{2\lambda a^2}{b+c} = \sum \frac{\lambda(y+z-x)^2}{x} =$$

$$\sum \lambda\left[\frac{(y+z)^2}{x} - 2(y+z) + x\right] =$$

$$\sum \frac{\lambda(y+z)^2}{x} + \sum \lambda[3x - 2(x+y+z)] =$$

$$\sum \frac{\lambda}{x}[(y-z)^2 + 4yz] + 3\sum \lambda x - 2\left(\sum \lambda\right)\sum x =$$

$$\sum \frac{\lambda}{x}(y-z)^2 + 4\sum \frac{\lambda yz}{x} + \sum(\lambda - 2\mu - 2v)x =$$

$$\frac{1}{2}Q' + 2\sum x\left(\mu\frac{z}{y} + v\frac{y}{z}\right) + \sum(\lambda - 2\mu - 2v)x \geqslant$$

$$\frac{1}{2}Q' + 4\sum \sqrt{\mu v}x + \sum(\lambda - 2\mu - 2v)x =$$

$$\frac{1}{2}Q' + \sum[\lambda - 2(\mu - 2\sqrt{\mu v}) + v]x =$$

$$\frac{1}{2}Q' + \sum \lambda_1 x = \frac{1}{2}Q' + \frac{1}{2}\sum \lambda_1(b+c) =$$

$$\frac{1}{2}Q' + \frac{1}{2}\sum(\mu_1 + v_1)a \Rightarrow$$

$$T_\lambda \geqslant \frac{1}{4}Q' + \frac{1}{4}A$$

等号成立仅当 $\lambda = \mu = v$ 且 $a = b = c$.

结论 3 已知 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，且 $a + b + c = 3$，则

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geqslant 3 + 4Q \qquad (T_3)$$

其中

$$Q = |(a-1)(b-1)(c-1)|$$

证明 记

$$\left.\begin{array}{l}P=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\\ a\geqslant b\geqslant c>0\end{array}\right\}\Rightarrow P-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=\frac{(a-b)(b-c)}{bc}+\frac{(b-c)(b-a)}{ab}=$$

$$\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\geqslant 0\Rightarrow$$

$$P-3\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right]-3=$$

$$\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-c)^2}{2abc}=M \quad ③$$

（ⅰ）当 $a\geqslant 1\geqslant b\geqslant c>0$ 时，设

$$\begin{cases}1-b=\alpha\geqslant 0\\ 1-c=\beta\geqslant 0\Rightarrow\\ a+b+c=3\end{cases}\begin{cases}\alpha\beta\geqslant 0\\ a-1=\alpha+\beta\Rightarrow M=\frac{a(\alpha-\beta)^2+b(\alpha+2\beta)^2+c(\beta+2\alpha)^2}{2abc}\geqslant\\ \alpha+\beta\leqslant 2\end{cases}$$

$$\frac{b(\alpha+2\beta)^2+c(\beta+2\alpha)^2}{2abc}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}{2abc}=$$

$$\frac{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}{a\sqrt{bc}}\geqslant\frac{9\alpha\beta}{a\sqrt{bc}}=\frac{9\alpha\beta}{\sqrt{4\left(\frac{a}{2}\right)^2bc}}\geqslant$$

$$\frac{9\alpha\beta}{2\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b+c}{4}\right)^2}=$$

$$\frac{9\alpha\beta}{2\left(\frac{3}{4}\right)^2}=8\alpha\beta=2\times 4\alpha\beta\geqslant$$

$$4(\alpha+\beta)\alpha\beta=4Q\Rightarrow P\geqslant 3+M\geqslant 3+4Q$$

（ⅱ）当 $a\geqslant b\geqslant 1\geqslant c>0$ 时，设

$$\begin{cases}1+\alpha=a\\ 1+\beta=b\\ a+b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1-\alpha-\beta\\ \alpha-\beta\geqslant 0\\ \alpha+\beta\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow M=\frac{a(2\beta+\alpha)^2+b(2\alpha+\beta)^2+c(\alpha-\beta)^2}{2abc}\geqslant$$

$$\frac{a(2\beta+\alpha)^2+b(2\alpha+\beta)^2}{2abc}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}{2abc}\geqslant$$

$$\frac{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}{abc}\geqslant$$

$$\frac{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)\geqslant$$

$$9\alpha\beta\geqslant 9(\alpha+\beta)\alpha\beta=9Q\Rightarrow P\geqslant 3+M\geqslant 3+9Q\geqslant 3+4Q$$

综合（ⅰ）和（ⅱ）知，总有 $P\geqslant 3+4Q$，等号成立仅当 $a=b=c=1$.

我们知道，$P\geqslant 3$ 是一个平凡不等式，如果依照常用的方法，应用平均值不等式，有

$$M\geqslant\frac{3[abc(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2]^{1/3}}{2abc}=$$

$$\frac{3}{2}\frac{[\prod(a-b)]^{2/3}}{(abc)^{2/3}} \geqslant \frac{3}{2}[\prod(a-b)]^{2/3}$$

这样,我们只能得到加强式

$$P \geqslant 3+\frac{3}{2}[(a-b)(b-c)(c-a)]^{2/3}$$

这远远没有(T_3)式简洁.

无独有偶,(T_3)式有一个漂亮的配对式.

结论4 设正数 a,b,c 满足 $abc \leqslant 1$.则

$$P=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant a+b+c+Q \tag{T_4}$$

其中

$$Q=|(a-1)(b-1)(c-1)|$$

证明 (i)当 $a,b,c \leqslant 1$ 时

$$(1-a)(1-b) \geqslant 0 \Rightarrow 2-a-b \geqslant 1-ab \geqslant c(1-ab) \Rightarrow 2+abc \geqslant a+b+c \geqslant ab+bc+ca \Rightarrow 3 \geqslant a+b+c+(1-a)(1-b)(1-c) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}3 \geqslant a+b+c+Q \\ p \geqslant 3\end{array}\right\} \Rightarrow p \geqslant a+b+c+Q$$

(ii)当 $a \geqslant 1, b \leqslant 1, c \leqslant 1$ 时

$$Q=(a-1)(1-b)(1-c) \geqslant 0 \Rightarrow a+b+c \geqslant ab+bc+ca+1-abc \tag{④}$$

又

$$P+(ab+bc+ca)=a\left(c+\frac{1}{c}\right)+b\left(a+\frac{1}{a}\right)+c\left(b+\frac{1}{b}\right) \geqslant 2(a+b+c) \Rightarrow$$

$$P \geqslant (a+b+c)+(a+b+c)-(ab+bc+ca)=$$
$$(a+b+c)+(a+b+c-ab-bc-ca+abc-1)=$$
$$a+b+c+Q$$

(iii)当 $a \geqslant 1, b \geqslant 1, c \leqslant 1$ 时

$$(1-c)(b-1) \geqslant 0 \Rightarrow b+c \geqslant 1+bc \Rightarrow a+b+c \geqslant a+1+bc \geqslant 2+abc$$

由于

$$(a^2b+b^2c+c^2a)+(a+b+c)+(a^2b+b)+(b^2c+c)+(c^2a+a) \geqslant 2(ab+bc+ca)$$

又由

$$Q=(a-1)(b-1)(1-c) \geqslant 0 \Rightarrow ab+bc+ca \geqslant a+b+c+abc-1 \Rightarrow$$
$$\sum a^2b+\sum b \geqslant 2\sum ab \geqslant \sum ab+\sum a+abc-1 \Rightarrow$$
$$\sum a^2b \geqslant \sum ab+abc-1 \geqslant abc\left(\sum ab+1-abc\right)\left(\text{因}\sum b=\sum a\right) \Rightarrow$$
$$P \geqslant \sum ab+1-abc=a+b+c+Q$$

(iv)当 $a \geqslant 1, c \geqslant 1, b \leqslant 1$ 时同理可证.

综合上述,(T_4)式成立.等号成立仅当 $a=b=c=1$.

结论5 设 a,b,c,d 为任意正数,正数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足$\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3} \geqslant \sqrt{\lambda_2}+$

$\sqrt{\lambda_4}$，则

$$P_\lambda=\lambda_1\left(\frac{a+c}{a+b}\right)+\lambda_2\left(\frac{b+d}{b+c}\right)+\lambda_3\left(\frac{c+a}{c+d}\right)+\lambda_4\left(\frac{d+b}{d+a}\right)\geqslant(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})^2 \quad (T_5)$$

(T_5) 式左边分式的结构特点是：分子与分母分配了两个数，且均有一个数相同，余下的两个数是相邻数. 显然，当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ 时，(T_5) 式可以简化.

证明 记

$$t=(a+b)(a+c)+(b+d)(b+c)+(c+a)(c+d)+(d+b)(d+a)=$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sum ab=(a+b+c+d)^2=s^2\Rightarrow$$
$$s^2P_\lambda=\sum(a+b)(a+c)\cdot\sum\lambda_1\left(\frac{a+c}{a+b}\right)\geqslant$$
$$\left[\sum\sqrt{\lambda_1}(a+c)\right]^2\text{(应用柯西不等式)}=$$
$$[\sqrt{\lambda_1}(a+c)+\sqrt{\lambda_2}(b+d)+\sqrt{\lambda_3}(c+a)+\sqrt{\lambda_4}(d+b)]^2=$$
$$[(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3})(a+c)+(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})(b+d)]^2\geqslant$$
$$[(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})(a+c)+(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})(b+d)]^2=$$
$$(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})^2(a+b+c+d)^2=$$
$$(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})^2s^2\Rightarrow P_\lambda\geqslant(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4})^2$$

结论 6 对正数 a,b,c,d 有

$$T=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2 \quad (T_6)$$

粗略一看，(T_6) 式左边各分式的结构似乎与(A)式相同，但仔细比较便知相异.

证明 记 $s=a+b+c+d$.

$$\frac{1}{4}s^2=\frac{1}{4}[(b+c)+(a+d)]^2\geqslant(b+c)(a+d)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(b+c)(d+a)}\geqslant\frac{4}{s^2}\\&\text{(同理)}\ \frac{1}{(c+d)(a+b)}\geqslant\frac{4}{s^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$T=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}\geqslant$$
$$\frac{4}{s^2}(a^2+c^2+ad+bc)+\frac{4}{s^2}(b^2+d^2+ab+cd)=$$
$$\frac{2}{s^2}[s^2+(a-c)^2+(b-d)^2]\geqslant\frac{2}{s^2}\cdot s^2=2$$

等号成立仅当 $a=b=c=d$.

(T_6) 式中涉及4(偶数)个正数，在结构分配上左边各项分式的分母均占2个(一半). 依照这种分配和结构，我们马上构造:

结论 7 对正数 a,b,c,d,e,f 有

$$T=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+e}+\frac{c}{d+e+f}+\frac{d}{e+f+a}+\frac{e}{f+a+b}+\frac{f}{a+b+c}\geqslant 2 \tag{T_7}$$

证明 简证

$$s=\sum a=a+b+c+d+e+f$$

$$p=\sum a^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$$

$$q=\sum ab(\text{共 15 项})$$

$$p+2q=s^2$$

于是

$$T=\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{d}{e+f+a}\right)+\left(\frac{b}{c+d+e}+\frac{e}{a+b+f}\right)+\left(\frac{c}{d+e+f}+\frac{f}{a+b+c}\right)=$$
$$\frac{a(e+f+a)+d(b+c+d)}{(b+c+d)(e+f+a)}+\frac{b(f+a+b)+c(c+d+e)}{(c+d+e)(f+a+b)}+$$
$$\frac{c(a+b+c)+f(d+e+f)}{(d+e+f)(a+b+c)}\geqslant\frac{4}{s^2}M \tag{⑤}$$

其中 $M=\sum a(e+f+a)=p+q-(ad+be+cf)$

于是 $2M=(p+2q)+p-2(ad+be+cf)=$

$$s^2+(a^2-2ad+d^2)+(b^2-2be+e^2)+(c^2-2cf+f^2)=$$
$$s^2+(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2\Rightarrow$$
$$M\geqslant\frac{1}{2}s^2\Rightarrow p\geqslant\frac{4}{s^2}M\geqslant\frac{4}{s^2}\cdot\frac{s^2}{2}=2$$

等号成立仅当 $a=\cdots=f$.

考虑到初始情形

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

我们可将(T_6)、(T_7)式推广为

结论 8 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,2n;n\in\mathbf{N})$ 则有

$$P_{2n}=\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant 2 \tag{T_8}$$

证明 记 $s=\sum\limits_{i=1}^{2n}a_i$,约定

$$a_{2n+i}\equiv a_i-b_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{n+i}(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow b_{n+i}=$$
$$a_{n+1+i}+a_{n+2+i}+\cdots+a_{2n+i}\Rightarrow$$
$$b_i+b_{n+i}=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{2n+i}=\sum_{i=1}^{2n}a_i=s\Rightarrow \tag{⑥}$$
$$b_ib_{n+i}\leqslant\frac{1}{4}(b_i+b_{n+i})^2=\frac{1}{4}s^2\Rightarrow$$

$$P_{2n}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{a_i}{b_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+\frac{a_{n+i}}{b_{n+i}}\right)= \quad ⑦$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_ib_{n+i}+a_{n+i}b_i}{b_ib_{n+i}}\right)\geqslant$$

$$\frac{4}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(a_ib_{n+i}+a_{n+i}b_i)=\frac{2}{s^2}M \quad ⑧$$

其中

$$M=\sum_{i=1}^{n}(2a_ib_{n+i}+2a_{n+i}b_i)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n}a_ia_j\right)+\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-2a_ia_{i+n}+a_{n+i}^2)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}a_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{n+i})^2\geqslant s^2\Rightarrow P_{2n}\geqslant\frac{2}{s^2}M\geqslant 2$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}b_i=b_{n+i}\\ a_i=a_{n+i}\end{cases}(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_{2n}$$

结论 9 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$，记 $k\in\mathbf{N}$，且

$$nP_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}},\ nT_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$$

则

$$P_n^{(n-1)^k}\geqslant T_n^{(n-1)^{k-1}}\geqslant P_n^{(n-1)^{k-2}}\geqslant T_n^{(n-1)^{k-3}}\geqslant\cdots\geqslant P_n^{(n-1)^2}\geqslant T_n^{n-1}\geqslant P_n \quad (T_9)$$

(T_9) 式壮如一条长龙，又美如一条闪光的“金项链”.

提示 约定 $a_{n+i}=a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，证 $x_i=a_i/a_{i+1}\Rightarrow x_1x_2\cdots x_n=1,G_n=x_1x_2\cdots x_n=1$.

应用 n 元对称不等式，有

$$P_n^{n-1}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{G_n}{x_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\begin{pmatrix}\Rightarrow P_n^{n-1}\geqslant T_n\\ (\text{同理})T_n^{n-1}\geqslant P_n\end{pmatrix}\Rightarrow P_n^{(n-1)^2}\geqslant T_n^{n-1}\geqslant P_n$$

并且，P_n 与 T_n 无法比较大小.

结论 10 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 均为正数，约定 $a_{n+i}=a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{(a_{i+1}+a_{i+2})^{\beta}}\geqslant\frac{n}{2^{\beta}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\alpha-\beta} \quad (T_{10})$$

其中 $\beta\geqslant 0,\alpha\geqslant 1+\beta$.

相应地，如果设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$，则

$$P_{\lambda}=\frac{\lambda_1a_1}{a_2+a_3}+\frac{\lambda_2a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{\lambda_na_n}{a_1a_2}\geqslant\frac{(\sqrt{\lambda_1}a_1+\sqrt{\lambda_2}a_2+\cdots+\sqrt{\lambda_n}a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$$

提示

$$\sum_{i=1}^{n}[(a_i-a_{i+1})^2+(a_i-a_{i+2})^2]\geqslant 0\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})\Rightarrow$$

$$2P_\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i(a_{i+1}+a_{i+2})\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_ia_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geqslant$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i}a_i)\right]^2\Rightarrow P_\lambda\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}a_i\right)^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}$$

回顾(A)式和结论6,有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\tag{A}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2\tag{T_6}$$

更好更强是人类永恒的追求,那么,我们能建立普遍的推广式吗?

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+1}}\geqslant\frac{n}{2}\tag{?}$$

其实,当 $n=2,3,4$ 时已证实(?)式成立.但当 $n\geqslant 5$ 时呢,(?)式还成立吗?对此,我国的单墫老师作了总结:

结论 11(单墫) 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$,约定 $x_{n+1}=x_1,x_{n+2}=x_2$,则有

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}>\frac{5}{12}n\tag{T_{11}}$$

证明 引进参数 α,β,使 $\alpha\neq-1$,且 $\alpha=\beta(1+\alpha)\Rightarrow\beta=\alpha/(1+\alpha)\neq1$,于是

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\alpha=\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+2}+x_{i+2}}+\frac{\alpha(\beta x_{i+1}+x_{i+2})}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant2\sqrt{\frac{\alpha(x_i+\beta x_{i+1})(\beta x_{i+1}+x_{i+2})}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}=$$

$$2\sqrt{\frac{\alpha\beta(x_i+x_{i+1})^2+(\beta-1)^2x_ix_{i+1}\cdot\alpha}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}>2\sqrt{\frac{\alpha\beta(x_i+x_{i+1})}{x_{i+1}+x_{i+2}}}=$$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}\Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}>$$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}-n\alpha\geqslant\frac{2n\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^{\frac{1}{n}}-n\alpha=$$

$$\frac{2n\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}-n\alpha=\left(\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}-1\right)n\alpha$$

取

$$\alpha=\frac{5}{4}\Rightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}-1\right)\alpha=\frac{5}{12}\Rightarrow S_n>\frac{5}{12}n$$

从上述证法可知:用常规方法证明(T_{11})式是难以奏效的,因为表达式 S_n 的形状结构虽然简单平凡,但证明却不易,技巧性较强.

比如,若取 $\alpha=1\Rightarrow2\alpha/\sqrt{1+\alpha}-\alpha=\sqrt{2}-1<\frac{5}{12}\Rightarrow S_n>(\sqrt{2}-1)n$,单墫老师进一

步指出：

1954 年美国数学家夏皮诺(H · Shapiro) 在《美国数学月刊》中提出了下述循环不等式

$$S_n \geqslant \frac{n}{2} \tag{?}$$

人们经过三十多年的研究，到 1989 年才最终肯定了不等式仅对 17 个数，即

$$n = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,17,19,21,23$$

时成立，对其余的自然数 n 都不成立. 于是就有人转而去研究较弱的不等式

$$S_n \geqslant rn \tag{!}$$

现在已断定了 $r \approx 0.494\,5$，而刚才我们证明的都是更弱的不等式.

如果让我们的思路活跃奔放，自由放飞，那么就会发散创新：

结论 12 设 a,b,c 为某一直角三角形的三边之长，则

$$T = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2 \tag{T_{12}}$$

瞧！将(A) 式中的条件略加变动，进行以旧翻新，就显得今非昔比.

证法 1 根据对称性，不妨设 c 为此直角三角形的斜边，则

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2ab} \tag{⑨}$$

记

$$m = (c+a)(c+b) \geqslant (c + \sqrt{ab})^2 \geqslant (\sqrt{2ab} + \sqrt{ab})^2 = (\sqrt{2}+1)^2 ab \tag{⑩}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = \frac{1}{m}[a(c+a) + b(b+c)] = \frac{1}{m}[(a^2+b^2) + (a+b)c] =$$

$$\frac{c^2 + (a+b)c}{m} = \frac{m - ab}{m} = 1 - \frac{ab}{m} \geqslant 1 - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = 2\sqrt{2} - 2 \Rightarrow$$

$$T \geqslant (2\sqrt{2} - 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$$

等号成立仅当 $a = b = c/\sqrt{2}$，即此三角形为等腰直角三角形.

证法 2 设题设直角三角形的一个锐角为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，则

$$T = \sum \frac{a}{b+c} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} =$$

$$\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^2} + \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})} =$$

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}} + \tan\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta - \frac{\pi}{4}) =$$

$$\frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}+(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})\sin\frac{\theta}{2}}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})=$$

$$\frac{1}{(\cos\frac{\theta}{2})^2+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})=$$

$$\frac{2}{1+\cos\theta+\sin\theta}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})=$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})\geqslant$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2(\sqrt{2}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T\geqslant\frac{5}{2}\sqrt{2}-2$$

等号成立仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$，即题设三角形为等腰直角三角形.

我们刚才建立的(T_{12})式并非空穴来风，它还暗示我们：简洁优美的不等式(A)不仅可以从代数方面去推广，而且还可以从几何方面推广成：

结论 13 设某三角形的三边长为 a,b,c，最大内角的度数为 θ，则

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant S(\theta) \qquad (T_{13})$$

其中

$$S(\theta)\geqslant\frac{2}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}+\sin\frac{\theta}{2} \qquad ①$$

令人欣喜的是：当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时

$$S(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}-2$$

这时，(T_{13})式化为(T_{12})式.

当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时

$$S(\frac{\pi}{3})\geqslant\frac{2}{1+1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

这时，(T_{13})式化为(A)式.

因此，(T_{13})式确为(A)式的一个几何推广.

事实上，如果记 $1+2\sin\frac{\theta}{2}=k$，则

$$S(\theta)=\frac{2}{k}+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\geqslant 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

等号成立仅当

$$\frac{2}{k}=\frac{k}{2}\Rightarrow k=2\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

即 $S(\theta)$ 仅当 $\theta=\frac{\pi}{3}(a=b)$ 时取到最小值 $\frac{3}{2}$.

证明　根据对称性,不妨设最大角 θ 的对边为 c,则记

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta<\pi\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant\sin\frac{\theta}{2}<1\Rightarrow 0\leqslant 1-2\cos\theta<3\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta=$$
$$(a+b)^2-2ab(1+\cos\theta)\geqslant(a+b)^2-\frac{1}{2}(a+b)^2(1+\cos\theta)=$$
$$(a+b)^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}=(a+b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow c\geqslant(a+b)\sin\frac{\theta}{2}\geqslant 2\sqrt{ab}\sin\frac{\theta}{2} \quad ⑫$$

记

$$m=(a+c)(b+c)\geqslant(\sqrt{ab}+c)^2\geqslant(\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}\cdot\sin\frac{\theta}{2})^2\Rightarrow$$
$$m\geqslant ab(1+2\sin\frac{\theta}{2})^2 \quad ⑬$$

再记

$$t=a(a+c)+b(b+c)=a^2+b^2+(a+b)c=$$
$$c^2+2ab\cos\theta+c(a+b)=[c^2+c(a+b)+ab]+2ab\cos\theta-ab=$$
$$m-ab(1-2\cos\theta)\Rightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{t}{m}=\frac{m-ab(1-2\cos\theta)}{m}=$$
$$1-\frac{ab}{m}(1-2\cos\theta)\geqslant 1-\frac{1-2\cos\theta}{(1+2\sin\frac{\theta}{2})^2}=1+\frac{1-4(\sin\frac{\theta}{2})^2}{(1+2\sin\frac{\theta}{2})^2}=$$
$$1+\frac{1-2\sin\frac{\theta}{2}}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\frac{t}{m}\geqslant\frac{2}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}\Rightarrow$$
$$P=\sum\frac{a}{b+c}=\frac{t}{m}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{2}{1+2\sin\frac{\theta}{2}}+\sin\frac{\theta}{2}$$

等号成立仅当 $a=b$.从对称性知,(T_{13}) 式等号成立仅当题设三角形是最大角为 θ 的等腰三角形.

根据结论 13 的已知条件,我们还可建立 (T_{13}) 式的三个配对式:

$$P_1=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant S_1(\theta) \quad (T_{14})$$

其中
$$S_1(\theta)=2+4\sin\frac{\theta}{2}+\csc\frac{\theta}{2}$$

$$P_2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant S_2^2(\theta) \quad (T_{15})$$

其中
$$S_2(\theta)=\frac{1+2\sin\frac{\theta}{2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$P_3=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geqslant S_3(\theta) \quad (T_{16})$$

其中
$$S_3(\theta)=\frac{1+4(\sin\frac{\theta}{2})^3}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

以上三式的证明均比(T_{13})式要难，技巧性也更强.我们现在以证明(T_{14})式为例表明证法技巧.

证明　记 $t=\sin\frac{\theta}{2}\in[\frac{1}{2},1)$，$k=4(1+t)t^2$，注意到最大边长 $c\geqslant 2\sqrt{ab}t$，再记

$$x=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{(a^2+b^2)+(a+b)c}{ab}=[c^2+2ab\cos\theta+(a+b)c]/ab=$$

$$\frac{c}{ab}(a+b+c)+2\cos\theta\geqslant\frac{c}{ab}(2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}t)+2\cos\theta=\frac{2c}{\sqrt{ab}}(1+t)+2\cos\theta\Longrightarrow$$

$$P_1=\sum\frac{b+c}{a}=x+\frac{a+b}{c}\geqslant x+\frac{2}{c}\sqrt{ab}=k\left(\frac{c}{2\sqrt{ab}t^2}\right)+\left(\frac{2}{c}\sqrt{ab}\right)+2\cos\theta\geqslant$$

$$(k+1)\left[\left(\frac{c}{2\sqrt{ab}t^2}\right)^k\left(\frac{2}{c}\sqrt{ab}\right)\right]^{\frac{1}{k+1}}+2\cos\theta=$$

$$(k+1)\left[\left(\frac{c}{2\sqrt{ab}}\right)^{k-1}\cdot t^{-2k}\right]^{\frac{1}{k+1}}+2\cos\theta\geqslant$$

$$(k+1)(t^{k-1}\cdot t^{-2k})^{\frac{1}{k+1}}+2\cos\theta=\frac{k+1}{t}+2\cos\theta=\frac{4(1+t)t^2+1}{t}+2\cos\theta=$$

$$\frac{4(1+\sin\frac{\theta}{2})\sin^2\frac{\theta}{2}+1}{\sin\frac{\theta}{2}}+2(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})=$$

$$2+4\sin\frac{\theta}{2}+\csc\frac{\theta}{2}$$

仿照上述证法，可证明(T_{15})，(T_{16})式.特别地，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时

$$S_1(\frac{\pi}{3})=6,S_2(\frac{\pi}{3})=3,S_3(\frac{\pi}{3})=3$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时

$$S_1(\frac{\pi}{2})=2+3\sqrt{2},S_2(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})^2,S_3(\frac{\pi}{2})=2+\sqrt{2}$$

这样，我们又建立了关于直角三角形的边长比的3个有趣的不等式

$$P_1\geqslant 2+3\sqrt{2},P_2\geqslant\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})^2,P_3\geqslant 2+\sqrt{2}$$

且均可证实

$$S_1(\theta)\geqslant 6,S_2(\theta)\geqslant 3,S_3(\theta)\geqslant 3$$

一道 IMO 预选题的探讨

邓寿才

1 证 明

题目 设正数 x,y,z 满足 $xyz=1$,则

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4} \tag{A}$$

本题目的题意简洁,而(A)式却结构对称,形态优美,它就是第 39 届 IMO 预选题之一,一道美妙的不等式题目.为了深刻解读它,系统探讨它,我们在以下的证明中,均简记(A)式左边为 P.

证法 1 应用平均值不等式和幂平均不等式,设

$$M=\sum\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leqslant\frac{1}{4}\sum\frac{1}{\sqrt{yz}}=\frac{1}{4}\sum\sqrt{x}\Rightarrow 4M+3\leqslant$$

$$\sum(1+\sqrt{x})\leqslant\sqrt{2}\cdot\sum\sqrt{1+x}\leqslant$$

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{\sum(1+x)}\Rightarrow M\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{\sum(1+x)}-\frac{3}{4} \tag{①}$$

$$S=\sum(1+y)(1+z)\leqslant\frac{1}{3}\left[\sum(1+x)\right]^2 \tag{②}$$

$$P+M=\sum\frac{1+x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{1}{4}\sum\frac{(1+x)^3}{(1+y)(1+z)}\Rightarrow\frac{1}{3}\left[\sum(1+x)\right]^2(P+M)\geqslant$$

$$S(P+M)\geqslant\frac{1}{4}\sum(1+y)(1+z)\sum\frac{(1+x)^3}{(1+y)(y+z)}\text{(应用柯西不等式)}\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\left[\sum(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]^2\geqslant\frac{1}{12}\left[\sum(1+x)\right]^3\Rightarrow$$

$$P+M\geqslant\frac{1}{4}\sum(1+x)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\sum(1+x)}\right)^2 \tag{③}$$

记

$$t=\sqrt{\sum(1+x)}=\sqrt{3+\sum x}\geqslant\sqrt{6}\Rightarrow M\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}t-\frac{3}{4}\Rightarrow P\geqslant\frac{1}{4}t^2-M\geqslant$$

$$\frac{1}{4}t^2-\frac{\sqrt{6}}{4}t+\frac{3}{4}=\frac{t}{4}(t-\sqrt{6})+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}\Rightarrow P\geqslant\frac{3}{4}$$

易推得(A)式等号成立仅当 $x=y=z=1$.

证法2　设 $t>0$,关于 t 的函数为

$$\begin{cases}f(t)=t^4+t^3-\frac{1}{4}(t+1)^3\\ g(t)=(t+1)(4t^2+3t+1)\end{cases}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{4}(t-1)g(t)$$

由于在 $(0,+\infty)$ 上 $g(t)$ 严格递增,由对称性,不妨设

$$\left.\begin{matrix}x\geqslant y\geqslant z>0\\ xyz=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\geqslant 1\geqslant z>0\Rightarrow\left.\begin{matrix}x-1\geqslant 0\geqslant z-1\\ g(x)\geqslant g(y)\geqslant g(z)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(x-1)g(x)\geqslant(x-1)g(y)\\ (y-1)g(y)=(y-1)g(y)\Rightarrow\\ (z-1)g(z)\geqslant(z-1)g(y)\end{cases}$$

$$(x-1)g(x)+(y-1)g(y)+(z-1)g(z)\geqslant$$
$$[(x-1)+(y-1)+(z-1)]g(y)=$$
$$(x+y+z-3)g(y)\geqslant(3\sqrt[3]{xyz}-3)g(y)=0\Rightarrow$$
$$f(x)+f(y)+f(z)\geqslant 0\Rightarrow x^3(1+x)+y^3(1+y)+z^3(1+z)\geqslant$$
$$\frac{1}{4}[(x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3]\geqslant$$
$$\frac{3}{4}(x+1)(y+1)(z+1)\Rightarrow$$
$$P=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$.

证法3　注意到 $x,y,z>0$,并设 $t=\frac{1}{3}\sum x=\frac{1}{3}(x+y+z)\geqslant 1$,则易得

$$\sum(1+x)=3(1+t),\sum x^3\geqslant 3t^3$$

及　$$\prod(1+x)=(1+x)(1+y)(1+z)\leqslant[\frac{1}{3}\sum(1+x)]^3=(t+1)^3$$

且

$$t\geqslant 1\Rightarrow(t-1)(2t+1)^2\geqslant 0\Rightarrow 4t^3\geqslant(t+1)^2\Rightarrow\frac{t^3}{(t+1)^2}\geqslant\frac{1}{4}\qquad ④$$

由对称性,不妨设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^3\geqslant y^3\geqslant z^3\\ \frac{1}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{1}{(1+z)(1+x)}\geqslant\frac{1}{(1+x)(1+y)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$P=\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant\left(\frac{\sum x^3}{3}\right)\sum\frac{1}{(1+y)(1+z)}\text{(应用切比雪夫不等式)}=$$

$$\left(\frac{\sum x^3}{3}\right)\frac{\sum(1+x)}{\prod(1+x)}=\frac{(1+t)\sum x^3}{\prod(1+x)}\geqslant\frac{3(1+t)t^3}{(1+t)^3}=$$

$$\frac{3t^3}{(1+t)^2} \geqslant \frac{3}{4} \Rightarrow P \geqslant \frac{3}{4}$$

显然，等号成立仅当 $x = y = z = 1$.

证法 4 记 $t = \frac{1}{3}\sum x \geqslant 1$，由证法 3 有 $t^3/(1+t)^2 \geqslant 1/4$. 设

$$S = \sum(1+y)(1+z) \leqslant \frac{1}{3}[\sum(1+x)]^2 = \frac{1}{3}(3+\sum x)^2 = 3(1+t)^2 \Rightarrow$$

$$3(1+t)^2 P \geqslant SP = \sum(1+y)(1+z) \cdot \sum \frac{x^3}{(1+y)(1+z)}(\text{应用柯西不等式}) \geqslant$$

$$\left(\sum x^{3/2}\right)^2 \geqslant \left[3\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = 9t^3 \Rightarrow P \geqslant \frac{3t^3}{(1+t)^2} \geqslant \frac{3}{4}$$

等号成立仅当 $x = y = z = 1$.

从以上 4 种证法知，不等式虽然美妙，但是证明却有一定的难度. 并且，(A) 式还有第 5 种证法，这将在下一节中体现.

2 加 强

不等式(A)有直接加强和间接加强：

加强 1(间接加强) 设正数 x, y, z 满足 $xyz = 1$，则

$$T = \frac{x^3}{(2+y+z)^2} + \frac{y^3}{(2+z+x)^2} + \frac{z^3}{(2+x+y)^2} \geqslant \frac{3}{16} \tag{B}$$

这是因为

$$P = \sum \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geqslant \sum \frac{4x^3}{[(1+y)+(1+z)]^2} = 4T \geqslant \frac{3}{4}$$

证法 1 仍然记 $t = \frac{1}{3}\sum x \geqslant 1$，由证法 3 有

$$t^3/(1+t)^2 \geqslant \frac{1}{4}$$

由对称性，不妨设

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geqslant y^3 \geqslant z^3 > 0 \\ \dfrac{1}{(2+y+z)^2} \geqslant \dfrac{1}{(2+z+x)^2} \geqslant \dfrac{1}{(2+x+y)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$4T = \sum \frac{4x^3}{(2+y+z)^2}(\text{应用切比雪夫不等式}) \geqslant$$

$$\frac{4}{3}(\sum x^3)\sum \frac{1}{(2+y+z)^2} \geqslant$$

$$\frac{4}{9}(\sum x^3)\left[\frac{9}{\sum(2+y+z)}\right]^2(\text{应用柯西不等式}) =$$

$$\frac{4}{9}(\sum x^3)\left[\frac{9}{6(1+t)}\right]^2 \geqslant \frac{4}{3}\left(\frac{\sum x}{3}\right)^3\left[\frac{3}{2(1+t)}\right]^2 =$$

$$\frac{4}{3}t^3\left[\frac{3}{2(t+1)}\right]^2=\frac{3t^3}{(1+t)^2}\geqslant\frac{3}{4}\Rightarrow T\geqslant\frac{3}{16}$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$.

证法 2　注意到 $1+2=3$. 应用权方和不等式, 有

$$T=\sum\frac{x^3}{(2+y++z)^2}\geqslant\frac{(\sum x)^3}{[\sum(2+y+z)]^2}=\frac{(3t)^3}{[6(1+t)]^2}=$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{t^3}{(1+t)^2}\geqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$.

(A) 式的第二个间接加强为:

加强 2(间接加强)　设正数 x,y,z 满足 $xyz=1$, 则有

$$P'=\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^2}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^2}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}\qquad\text{(C)}$$

(A) 式与 (C) 式相比较, 只有细微的区别. 我们仍然记 $t=\frac{1}{3}(x+y+z)\geqslant1$. 由对称性, 不妨设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^2\geqslant y^2\geqslant z^2\\ \dfrac{1}{(1+y)(1+z)}\geqslant\dfrac{1}{(1+z)(1+x)}\geqslant\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{y^2}{(1+z)(1+x)}\geqslant\frac{z^2}{(1+x)(1+y)}\Rightarrow$$

$$P=\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\sum x\left(\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}\right)\text{(应用切比雪夫不等式)}\geqslant$$

$$\frac{1}{3}(\sum x)\sum\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}=$$

$$tP'\geqslant P'\Rightarrow P\geqslant P'\geqslant\frac{3}{4}$$

由此可见, (C) 式是 (A) 式的一个加强.

证明　应用权方和不等式有

$$P'=\sum\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{(\sum x)^2}{\sum(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{3(\sum x)^2}{[\sum(1+x)]^2}=$$

$$\frac{3(3t)^2}{[3(1+t)]^2}=3\left(\frac{t}{1+t}\right)^2=3(1-\frac{1}{1+t})^2\geqslant$$

$$3(1-\frac{1}{1+1})^2\Rightarrow P'\geqslant\frac{3}{4}$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$.

其实, (C) 式并非最强, 它还可以再加强为

$$T'=\frac{x^2}{(2+y+z)^2}+\frac{y^2}{(2+z+x)^2}+\frac{z^2}{(2+x+y)^2}\geqslant\frac{3}{16}\qquad\text{(D)}$$

应用幂平均不等式和切比雪夫不等式，有

$$T' = \sum \frac{x^2}{(2+y+z)^2} \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum \frac{x}{2+y+z}\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\sum x\right)\left(\sum \frac{1}{2+y+z}\right)\right]^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left[t\left(\frac{9}{\sum(2+y+z)}\right)\right]^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{9t}{6(1+t)}\right]^2 = \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^2 \geqslant$$

$$\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{1+1}\right)^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow T' \geqslant \frac{3}{16}$$

等号成立仅当 $x = y = z = 1$.

其实，易证

$$T \geqslant tT' \geqslant T' \geqslant \frac{3}{16}$$

因此，(D) 式不仅是(C) 式的加强，它还是(B) 式的加强. 此外，由于

$$P = \sum \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \leqslant \sum \frac{x^3}{(1+\sqrt{yz})^2} = \sum \frac{x^3}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sum \frac{x^4}{(1+\sqrt{x})^2} = M$$

因此，(A) 式又可完善成

$$M \geqslant P \geqslant \frac{3}{4}$$

综合上述，我们得到了一条闪光的不等式链

$$M \geqslant P \geqslant \begin{Bmatrix} 4T' \\ P' \end{Bmatrix} \geqslant 4T' \geqslant \frac{3}{4} \tag{※}$$

(A) 式的一个直接加强便是

$$P \geqslant \frac{3}{4} + \frac{27\sum(y-z)^2}{8(3+\sum x)^2} \tag{E}$$

现在，我们总括上述，共得到了(A) 式的四个加强式.

3 指数推广

上一节的加强式

$$P \geqslant P' \geqslant \frac{3}{4}$$

启发我们，可以从指数方面去推广(A) 式：

推广 1 设正数 x, y, z 满足 $xyz = 1$，指数 $\beta \geqslant 0$，且 $\alpha \geqslant \max(1+\beta, 2\beta)$，则

$$P(\alpha) = \frac{x^\alpha}{[(1+y)(1+z)]^\beta} + \frac{y^\alpha}{[(1+z)(1+x)]^\beta} + \frac{z^\alpha}{[(1+x)(1+y)]^\beta} \geqslant \frac{3}{4^\beta} \tag{F}$$

特别地，当 $\alpha = 3, \beta = 1$ 时，(F) 式化为(A) 式. 当 $\beta = 0$ 时，(F) 式化为

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geqslant 3 \tag{①}$$

因此，以后我们只须证明分母的指数 $\beta = 0$ 即可.

证明 记 $t = \frac{1}{3}\sum x \geqslant 1, \theta = \frac{\alpha}{1+\beta} \geqslant 1$，应用权方和不等式和幂平均不等式，有

$$P(\alpha) = \sum \frac{x^\alpha}{[(1+y)(1+z)]^\beta} = \sum \frac{(x^\theta)^{1+\beta}}{[(1+y)(1+z)]^\beta} \geqslant \frac{(\sum x^\theta)^{1+\beta}}{[\sum(1+y)(1+z)]^\beta} \geqslant$$

$$\frac{\left[3\left(\frac{\sum x}{3}\right)^\theta\right]^{1+\beta}}{\left\{3\left[\frac{\sum(1+x)}{3}\right]^2\right\}^\beta} = \frac{(3t^\theta)^{1+\beta}}{[3(1+t)^2]^\beta} =$$

$$\frac{3t^\alpha}{(1+t)^{2\beta}} = 3t^{\alpha-2\beta}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{2\beta} \geqslant$$

$$3\left(\frac{t}{1+t}\right)^{2\beta} = 3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{2\beta} \geqslant 3\left(1-\frac{1}{1+1}\right)^{2\beta} \Rightarrow P(\alpha) \geqslant \frac{3}{4^\beta}$$

等号成立仅当 $x = y = z = 1$.

如果采用其他技巧，还可以将推广 1 中的指数 α 的约束条件 $\alpha \geqslant \max(1+\beta, 2\beta)$ 放宽为：

推广 2 设正数 x, y, z 满足 $xyz = 1$. 指数 $\beta \geqslant 0, \alpha \geqslant \max(1, 2\beta)$，则有

$$P(\alpha) = \sum \frac{x^\alpha}{[(1+y)(1+z)]^\beta} \geqslant \frac{3}{4^\beta} \tag{F$_1$}$$

显然，当 $\beta = 1, \alpha = 2$ 时，(F) 和 (F_1) 式均化为 (A) 式的一个加强式

$$P' \geqslant \frac{3}{4} \tag{C}$$

但当 $0 < \beta \leqslant \frac{1}{2}$ 时，本推广中的指数 α 可取 1，而推广 1 中的 α 则最小，只能取 $\alpha = 1 + \beta > 1$，因此，推广 2 中的指数 α 比推广 1 中的指数放得宽广些.

证明 应用切比雪夫不等式，有

$$P(\alpha) \geqslant \frac{1}{3}(\sum x^\alpha)\sum[(1+y)(1+z)]^{-\beta} \geqslant \left(\frac{\sum x}{3}\right)^\alpha \cdot 3\left\{\prod[(1+y)(1+z)]^{-\beta}\right\}^{\frac{1}{3}} =$$

$$3t^\alpha\left[\prod(1+x)\right]^{-2\beta/3} \geqslant 3t^\alpha\left[\frac{\sum(1+x)}{3}\right]^{-2\beta} =$$

$$3t^\alpha(1+t)^{-2\beta} = 3t^{\alpha-2\beta}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{2\beta} \geqslant$$

$$3\left(\frac{t}{1+t}\right)^{2\beta} = 3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{2\beta} \geqslant$$

$$3\left(1-\frac{1}{1+1}\right)^{2\beta} = \frac{3}{4^\beta} \Rightarrow P(\alpha) \geqslant \frac{3}{4^\beta}$$

等号成立仅当 $x = y = z = 1$.

4 参数推广

如果说 (A) 式的指数推广很美的话，那么它的参数推广则显得很妙：

推广 3 设正数 x,y,z 满足 $xyz=1$;正数 p,q,r 满足 $p+q+r\geqslant 3$,则

$$P_r=\frac{x^3}{(q+y)(r+z)}+\frac{y^3}{(r+z)(p+x)}+\frac{z^3}{(p+x)(q+y)}\geqslant\frac{3}{(1+m)^2}\quad\text{(G)}$$

其中

$$m=\frac{1}{3}(p+q+r)\geqslant 1$$

显然,当 $m=1$ 时,(G) 式化为

$$P_r\geqslant\frac{3}{4}\quad ①$$

当 $p=q=r=1$ 时,(G) 式化为(A) 式.

证明 记 $t=\frac{1}{3}\sum x\geqslant 1$,则

$$\left.\begin{matrix}m\geqslant 1\\t\geqslant 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow(m-1)(t-1)\geqslant 0\Rightarrow(1+m)(1+t)\geqslant 2(m+t)\Rightarrow\frac{1+t}{2}\geqslant\frac{m+t}{m+1}\quad ②$$

又

$$t\geqslant 1\Rightarrow\begin{cases}t^3\geqslant 1\\(1+t)/2\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1+t}{2}\right)^3\leqslant\frac{t^3+1}{2}\leqslant t^3\Rightarrow t^3\geqslant\left(\frac{1+t}{2}\right)^2\geqslant\left(\frac{m+t}{m+1}\right)^2\quad ③$$

再设

$$S=\sum(q+y)(r+z)\leqslant 3\left[\frac{\sum(p+x)}{3}\right]^2=3\left(\frac{\sum p+\sum x}{3}\right)^2=3(m+t)^2\Rightarrow$$

$$3(m+t)^2\cdot P_r\geqslant S\cdot P_r=$$

$$\sum(q+y)(r+z)\left[\sum\frac{x^3}{(q+y)(r+z)}\right]\geqslant\left(\sum x^{\frac{3}{2}}\right)^2\geqslant$$

$$\left[3\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2=9t^3\Rightarrow P_r\geqslant$$

$$\frac{3t^3}{(m+t)^2}\geqslant\frac{3}{(m+t)^2}\left(\frac{m+t}{m+1}\right)^2\Rightarrow P_r\geqslant\frac{3}{(1+m)^2}$$

等号成立仅当 $x=y=z=p=q=r=1$.

另证 记号同上.应用权方和不等式,并记

$$\begin{cases}a=q+r+y+z\\b=r+p+z+x\\c=p+q+x+y\end{cases}\Rightarrow\sum a=6(m+t)$$

$$P_r=\sum\frac{x^3}{(q+y)(r+z)}\geqslant 4\sum\frac{x^3}{a^2}\geqslant\frac{4(\sum x)^3}{(\sum a)^2}=$$

$$\frac{4(3t)^3}{[6(m+t)]^2}=\frac{3t^3}{(m+t)^2}\geqslant\frac{3}{(m+t)^2}\left(\frac{m+t}{m+1}\right)^2\Rightarrow$$

$$P_r\geqslant\frac{3}{(1+m)^2}$$

从此证法我们知道,(A) 式的加强式(B) 式可参数推广为

$$T_t = \frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^3}{c^2} \geqslant \frac{3}{4(1 + m)^2}$$

如果我们能将(G) 式进行指数推广,就能取其特例,得到别的加强式的参数推广.

推广 4 设正数 x,y,z 满足 $xyz = 1$. 正参数 p,q,r 满足 $m = (p + q + r)/3 = 1$. 指数满足 $\alpha \geqslant \max(1 + \beta, 2\beta)(\beta \geqslant 0)$,则

$$P_t(\alpha) = \frac{x^\alpha}{[(q + y)(r + z)]^\beta} + \frac{y^\alpha}{[(r + z)(p + x)]^\beta} + \frac{z^\alpha}{[(p + x)(q + y)]^\beta} \geqslant \frac{3}{(1 + m)^{2\beta}} \tag{H}$$

证明 记 $\theta = \frac{\alpha}{1 + \beta} \geqslant 1, t = \frac{1}{3}(x + y + z) \geqslant 1$.

$$S = \sum(q + y)(r + z) \leqslant 3\left[\frac{\sum(p + x)}{3}\right]^2 = 3\left(\frac{\sum p + \sum x}{3}\right)^2 = 3(m + t)^2$$

$$\left.\begin{matrix} m \geqslant 1 \\ t \geqslant 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (m - 1)(t - 1) \geqslant 0 \Rightarrow (1 + m)(1 + t) \geqslant 2(m + t) \Rightarrow \frac{1 + t}{2} \geqslant \frac{m + t}{m + 1}$$

又

$$t \geqslant 1 \Rightarrow t \geqslant \frac{1 + t}{2} \geqslant \frac{m + t}{m + 1} \geqslant 1 \Rightarrow t^\alpha \geqslant \left(\frac{m + t}{m + 1}\right)^\alpha \geqslant \left(\frac{m + t}{m + 1}\right)^{2\beta}$$

应用权方和不等式和幂平均不等式,有

$$P_t(\alpha) = \sum \frac{x^\alpha}{[(q + y)(r + z)]^\beta} = \sum \frac{(x^\theta)^{1+\beta}}{[(q + y)(r + z)]^\beta} \geqslant$$

$$\frac{(\sum x^\theta)^{1+\beta}}{[\sum(q + y)(r + z)]^\beta} \geqslant \frac{\left[3\left(\frac{\sum x}{3}\right)^\theta\right]^{1+\beta}}{[3(m + t)^2]^\beta} =$$

$$\frac{3t^\alpha}{(m + t)^{2\beta}} \geqslant \frac{3}{(m + t)^{2\beta}}\left(\frac{m + t}{m + 1}\right)^{2\beta} \Rightarrow$$

$$P_t(\alpha) \geqslant \frac{3}{(m + 1)^{2\beta}}$$

等号成立仅当 $x = y = z = p = q = r = 1$.

5 加权推广

探索至此,我们希望建立(A) 式的加权推广,为此,我们自然地联想到引理:

引理 1 对于任意正数 λ,μ,v,x,y,z,有

$$[(\mu + v)x + (v + \lambda)y + (\lambda + \mu)z]^2 \geqslant 4(\mu v + v\lambda + \lambda\mu)(yz + zx + \lambda\mu) \quad ①$$

等号成立仅当 $\lambda/x = \mu/y = v/z$.

引理 2(切比雪夫不等式的加权推广) 设 $\lambda_i \in (0,1)(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$,正实数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 与 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 同序,则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\right) \qquad ②$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

引理 3(加权幂平均不等式) 设 $a_i > 0, \lambda_i \in (0,1)(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \alpha < \beta$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad ③$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

现在,让我们做下面分析:

记

$$S = \mu v + v\lambda + \lambda\mu, H = (1+x)(1+y)(1+z), N = \sum[(xy)^3(1+x)(1+y)]$$

设

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \begin{cases}(xy)^3 \geqslant (zx)^3 \geqslant (yz)^3\\(1+x)(1+y) \geqslant (1+z)(1+x) \geqslant (1+y)(1+z)\end{cases} \Rightarrow$$

$$N \geqslant \frac{1}{3}\sum(xy)^3\sum(1+y)(1+z) \geqslant \prod(xy)\cdot\sum(1+y)(1+z) \geqslant$$
$$(xyz)^2\left[\prod(1+y)(1+z)\right]^{1/3}\cdot 3 = \left[\prod(1+x)\right]^{2/3}\cdot 3 = 3H^{2/3}$$

另一方面,记 $t = (x+y+z)/3$,有

$$H = \prod(1+x) \leqslant \left[\frac{\sum(1+x)}{3}\right]^3 = (1+t)^3$$

应用引理 1,有

$$P_\lambda = \sum\frac{(\mu+v)x^3}{(1+y)(1+z)} = \frac{1}{H}\sum(u+v)x^3(1+x) \geqslant \frac{2}{H}\sqrt{\delta N} \geqslant$$
$$\frac{2}{H}\cdot\sqrt{8\cdot 3H^{2/3}} = \frac{2\sqrt{3\delta}}{H^{2/3}} \geqslant \frac{2\sqrt{3\delta}}{(1+t)^2} \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant \frac{2\sqrt{3\delta}}{(1+t)^2} \qquad ④$$

由于 $t = \frac{1}{3}(x+y+z) \geqslant 1$,因此,从④式不能得到我们所希望的结果

$$P_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3\delta} \qquad (?)$$

难道,我们在半途就“山重水复疑无路”了吗?看来,我们必须另辟蹊径,出奇制胜,才有希望“柳暗花明又一村”.

推广 5 设 λ,μ,v 及 x,y,z 均为正数,且满足 $\lambda+\mu+v = 3, x^{\lambda}y^{\mu}z^{v} = 1$,则有

$$P_\lambda = \frac{\lambda x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{\mu y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{vz^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant$$
$$\frac{1}{12}\left[(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2 - 6\right]^2 \qquad (\mathrm{I})$$

显然,当 $\lambda=\mu=v=1$,(I) 式化为(A) 式.

当 $x=y=z=1$ 时,(I) 式化为不等式

$$12\sum\lambda\geqslant4[(\sum\sqrt{\lambda})^2-6]^2\Leftrightarrow(3\sum\lambda)^{\frac{1}{2}}\geqslant(\sum\sqrt{\lambda})^2-6\Leftrightarrow$$

$$3\geqslant(\sum\sqrt{\lambda})^2-6\Leftrightarrow\sum\sqrt{\lambda}\leqslant3$$

证明 (ⅰ)我们设

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda,\mu,v)=(3\lambda_1,3\mu_1,3v_1)\\ \lambda+\mu+v=3,x^{\lambda}y^{\mu}z^{v}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\mu_1+v_1=1\\ x^{\lambda_1}\cdot y^{\mu_1}\cdot z^{v_1}=1\Rightarrow\\ P_{\lambda_1}=\dfrac{1}{3}P_{\lambda}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1x+\mu_1y+v_1z\geqslant x^{\lambda_1}y^{\mu_1}z^{v_1}=1\\ \lambda_1x^3+\mu_1y^3+v_1z^3\geqslant(x^{\lambda_1}y^{\mu_1}z^{v_1})^3=1\end{cases}$$

(ⅱ)不妨设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^3\geqslant y^3\geqslant z^3\\ \dfrac{1}{(1+y)(1+z)}\geqslant\dfrac{1}{(1+z)(1+x)}\geqslant\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{y^2}{(1+z)(1+x)}\geqslant\frac{z^2}{(1+x)(1+y)}\text{(应用引理 2)}\Rightarrow$$

$$P_{\lambda_1}=\sum\frac{\lambda_1x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant(\sum\lambda_1x)\sum\frac{\lambda_1x^2}{(1+y)(1+z)}\geqslant$$

$$\sum\frac{\lambda_1x^2}{(1+y)(1+z)}\geqslant4\sum\lambda_1\left(\frac{x}{2+y+z}\right)^2\text{(应用引理 3)}\geqslant$$

$$4\left[\sum\lambda_1\left(\frac{4x}{2+y+z}\right)\right]^2\Rightarrow2\sqrt{P_{\lambda_1}}\geqslant\sum\lambda_1\left(\frac{4x}{2+y+z}\right) \qquad ⑤$$

令

$$\begin{cases}2+y+z=4a\\ 2+z+x=4b\\ 2+x+y=4c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2(b+c-a)-1\\ y=2(c+a-b)-1\\ z=2(a+b-c)-1\end{cases}\Rightarrow2\sqrt{P_{\lambda_1}}\geqslant\sum\lambda_1\left(\frac{x}{a}\right)=$$

$$\sum\lambda_1\left[\frac{2(b+c-a)-1}{a}\right]=\sum\frac{\lambda_1}{a}[2(a+b+c)-4a-1]=$$

$$2(a+b+c)\sum\frac{\lambda_1}{a}-4\sum\lambda_1-\sum\frac{\lambda_1}{a}\geqslant2(\sum\sqrt{\lambda_1})^2-4-\sum\frac{\lambda_1}{a}\Rightarrow$$

$$2\sqrt{P_{\lambda_1}}\geqslant2(\sum\sqrt{\lambda_1})^2-4-\sum\frac{\lambda_1}{a} \qquad ⑥$$

(ⅲ)再次应用引理 2,有

$$P_{\lambda_1}=\sum\frac{\lambda_1x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant(\sum\lambda_1x^3)\sum\frac{\lambda_1}{(1+y)(1+z)}\geqslant$$

$$\sum\frac{\lambda_1}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{1}{4}\sum\frac{\lambda_1}{a}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1}{a}\right)^2\Rightarrow$$

$$2\sqrt{P_{\lambda_1}}\geqslant\sum\frac{\lambda_1}{a} \qquad ⑦$$

$$(\text{iv})[(2)+(3)]\div 2\Rightarrow\sqrt{P_{\lambda_1}}\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum\sqrt{\lambda_1}\right)^2-2\right]^2\Rightarrow P_{\lambda_1}\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sum\sqrt{\lambda_1}\right)^2-2\right]^2\Rightarrow\frac{1}{3}P_\lambda\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sum\sqrt{\lambda/3}\right)^2-2\right]^2\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{1}{12}\left[\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2-6\right]^2$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$ 及 $\lambda=\mu=v=1$.

据笔者探索,(A) 式还有一个加权推广:

推广 6　设正数 x,y,z 满足 $xyz=1$,权系数 $\lambda,\mu,v\in(0,3)$,且 $\lambda+\mu+v\leqslant 3$.

$$P_\lambda=\frac{\lambda x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{\mu y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{vz^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant$$

$$\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\lambda\mu v}\right)\left(2\sqrt[3]{\lambda\mu v}-1\right)\tag{J}$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v=1$ 时,(J) 式立即化为(A) 式.

当 $x=y=z=1$ 时,(J) 式化为

$$\frac{3}{4}e(2e-1)\leqslant\frac{1}{4}(\lambda+\mu+v)=\frac{3}{4}\left(\text{其中 } e=\sqrt[3]{\lambda\mu v}\right)\Leftrightarrow$$

$$e(2e-1)\leqslant 1$$

由于
$$e(2e-1)\leqslant\left[\frac{e+(2e-1)}{2}\right]^2=\left(\frac{3e-1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{\lambda+\mu+v-1}{2}\right)^2\leqslant$$

$$\left(\frac{3-1}{2}\right)^2=1$$

因此,(J) 式考验通过.

证明　设

$$(\lambda,\mu,v)=(3\lambda_1,3\mu_1,3v_1)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\mu_1+v_1\leqslant 1\\ P_{\lambda_1}=\frac{1}{3}P_\lambda\end{cases}$$

$$G=\prod(1+x)\geqslant\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3=8$$

设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^3\geqslant y^3\geqslant z^3\\ 1+x\geqslant 1+y\geqslant 1+z\end{cases}\Rightarrow P_{\lambda_1}=\frac{M}{G}=\frac{1}{G}\sum\lambda_1x^3(1+x)\geqslant$$

$$\frac{M_1M_2}{(\lambda_1+\mu_1+v_1)G}(\text{应用引理 2})$$

其中
$$\begin{cases}M_1=\sum\lambda_1x^3\\ M_2=\sum\lambda_1(1+x)\end{cases}$$

于是有

$$M_2\geqslant 3\left[\lambda_1\mu_1v_1\prod(1+x)\right]^{\frac{1}{3}}\geqslant 6\sqrt[3]{\lambda_1\mu_1v_1}=6e_1$$

而 $$M_1=\sum\lambda_1(x^3+1)-\sum\lambda_1\geqslant\frac{1}{4}\sum\lambda_1(x+1)^3-\sum\lambda_1\geqslant$$
$$\frac{3}{4}G(\sqrt[3]{\lambda_1\mu_1v_1})-\sum\lambda_1\Rightarrow M_1\geqslant\frac{3}{4}Ge_1-\sum\lambda_1\Rightarrow$$
$$\frac{M_1M_2}{\sum\lambda_1}\geqslant\left(\frac{3Ge_1}{4\sum\lambda_1}-1\right)6e_1\geqslant6\left(\frac{3}{4}e_1G-1\right)e_1\Rightarrow$$
$$P_{\lambda_1}\geqslant\frac{M_1M_2}{G\sum\lambda_1}\geqslant6\left(\frac{3}{4}e_1-\frac{1}{G}\right)e_1\geqslant$$
$$6\left(\frac{3}{4}e_1-\frac{1}{8}\right)e_1(\text{注意 } e=\sqrt[3]{\lambda\mu v}=3\sqrt[3]{\lambda_1\mu_1v_1}=3e_1)\Rightarrow$$
$$\frac{1}{3}P_\lambda\geqslant6(\frac{1}{4}e-\frac{1}{8})\cdot\frac{1}{3}e\Rightarrow P_\lambda\geqslant\frac{3}{4}e(2e-1)=$$
$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{\lambda\mu v}(2\sqrt[3]{\lambda\mu v}-1)$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$ 及 $\lambda=\mu=v=1$.

由于 $e\leqslant1$,因此

$$\frac{4}{3}P_\lambda\geqslant2e^2-e\geqslant2e^2-1$$

于是(I) 式又可以弱化为

$$P_\lambda\geqslant\frac{3}{2}(\lambda\mu v)^{2/3}-\frac{3}{4}\tag{J$'$}$$

(J)′ 式与(I) 式相比较,(J)′ 式显得十分娟秀,而(I) 式则显得倍加靓丽.

6 继续推广

在探觅(A) 式的加权推广时,我们颇费周折,但终于"曲径通幽",初达目的.其实,(I) 式和(J)′ 式还可再从指数方面推广它.

推广 7 设正数 x,y,z,λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=3$ 及 $x^\lambda y^\mu z^v=1$,指数 $\alpha\geqslant2\beta\geqslant1$,则有

$$\frac{\lambda x^\alpha}{[(1+y)(1+z)]^\beta}+\frac{\mu y^\alpha}{[(1+z)(1+x)]^\beta}+\frac{vz^\alpha}{[(1+x)(1+y)]^\beta}\geqslant$$
$$\frac{3^{1-2\beta}}{4^\beta}[(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2-6]^{2\beta}\tag{K}$$

显然,当取 $\alpha=3,\beta=1$ 时,(K) 式化为(I) 式.

略证 记 $\theta=\alpha-2\beta\geqslant0$,其他字母及所设条件同推广 5,并记(K) 式左边为 $P_\lambda^{(\alpha)}$,则

$$P_{\lambda_1}^{(\alpha)}=\sum\frac{\lambda_1x^\alpha}{[(1+y)(1+z)]^\beta}\geqslant\sum\frac{\lambda_1x^\alpha}{(2a)^{2\beta}}=\frac{1}{4^\beta}\sum\left[\lambda_1x^\theta\left(\frac{x}{a}\right)^{2\beta}\right]\geqslant$$
$$\frac{1}{4^\beta}(\sum\lambda_1x^\theta)\sum\lambda_1\left(\frac{x}{a}\right)^{2\beta}\geqslant\frac{1}{4^\beta}\sum\lambda_1\left(\frac{x}{a}\right)^{2\beta}\geqslant4^{-\beta}(\sum\lambda_1\frac{x}{a})^{2\beta}\Rightarrow$$

$$2(P_{\lambda_1}^{(\alpha)})^{\frac{1}{2\beta}} \geqslant \sum \lambda_1\left(\frac{x}{a}\right) \geqslant m - \sum \frac{\lambda_1}{a} \quad ①$$

其中

$$m = 2(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\mu_1} + \sqrt{v_1})^2 - 4 \quad ②$$

又

$$2(P_{\lambda_1}^{(\alpha)})^{\frac{1}{2\beta}} \geqslant \sum \lambda_1\left(\frac{x}{a}\right) \geqslant (\sum \lambda_1 x)\sum \frac{\lambda_1}{a} \geqslant \sum \frac{\lambda_1}{a} \quad ③$$

(因 x,y,z 与 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 同序)

$$[① + ③] \div ② \Rightarrow (P_{\lambda_1}^{(\alpha)})^{\frac{1}{2\beta}} \geqslant \frac{1}{4}m \Rightarrow P_{\lambda_1}^{(\alpha)} \geqslant \left(\frac{m}{4}\right)^{2\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}P_{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant \left[\frac{2(\sum\sqrt{\frac{\lambda}{3}})^2 - 4}{4}\right]^{2\beta} \Rightarrow P_{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant$$

$$\frac{3^{1-2\beta}}{4^{\beta}}[(\sum\sqrt{\lambda})^2 - 6]^{2\beta}$$

等号成立仅当 $\lambda = \mu = v = 1$ 及 $x = y = z = 1$.

相应地,推广 6 可以推广为:

推广 8 设正数 x,y,z 及 λ,μ,v 满足 $xyz = 1$ 和 $\lambda + \mu + v \leqslant 3$,指数 $\beta > 0$,且 $\alpha \geqslant \max(1,3\beta)$,则

$$\frac{\lambda x^{\alpha}}{[(1+y)(1+z)]^{\beta}} + \frac{\mu y^{\alpha}}{[(1+z)(1+x)]^{\beta}} + \frac{v z^{\alpha}}{[(1+x)(1+y)]^{\beta}} \geqslant \frac{3e}{4^{\beta}}(2^{1+3\beta-\alpha} \cdot e - 1) \quad (K_1)$$

其中 $e = \sqrt[3]{\lambda\mu v} \leqslant 1$.

特别地,当取 $\alpha = 3,\beta = 1$ 时,(K_1) 式立刻化为(J)式.

当 $\lambda = \mu = v = 1$ 时,(K_1) 式化为(A)式的一个新的指数推广

$$P^{(\alpha)} = \sum \frac{x^{\alpha}}{[(1+y)(1+z)]^{\beta}} \geqslant \frac{3}{4^{\beta}}[2^{1-(\alpha-3\beta)} - 1] \quad (K_2)$$

这是我们的意外收获,使人颇感兴奋.

略证 字母记号和意义同上.

$$G = [\prod(1+x)]^{\beta} \geqslant 2^{3\beta}$$

设

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{\alpha} \geqslant y^{\alpha} \geqslant z^{\alpha} \\ (1+x)^{\beta} \geqslant (1+y)^{\beta} \geqslant (1+z)^{\beta} \end{cases} \Rightarrow P_{\lambda_1}^{(\alpha)} = \sum \frac{\lambda_1 x^{\alpha}}{[(1+y)(1+z)]^{\beta}}$$

其中

$$(\lambda,\mu,v) = (3\lambda_1,3\mu_1,3v_1)$$

$$\lambda + \mu + v \leqslant 3 \Rightarrow \lambda_1 + \mu_1 + v_1 \leqslant 1$$

$$e = \sqrt[3]{\lambda\mu v} \leqslant 1, e' = \sqrt[3]{\lambda_1\mu_1 v_1} \leqslant \frac{1}{3}$$

域外高手

$$P_{\lambda_1}^{(\alpha)} = \frac{1}{3}P_{\lambda}^{(\alpha)}, e' = \frac{1}{3}e.$$

于是

$$P_{\lambda_1}^{(\alpha)} = \frac{1}{G}\sum\lambda_1 x^\alpha(1+\beta)^\beta \geqslant \frac{M_1M_2}{G\sum\lambda_1} \geqslant \frac{M_1M_2}{G} \qquad ④$$

其中

$$M_1 = \sum\lambda_1 x^\alpha, M_2 = \sum\lambda_1(1+x)^\beta$$

则

$$M_2 \geqslant 3e'G^{1/3} \geqslant 3\times 2^\beta e'$$

$$M_1 = \sum\lambda_1 x^\alpha = \sum\lambda_1(1+x^\alpha) - \sum\lambda_1 \geqslant 3\times 2^{1-\alpha}e'[\prod(1+x)]^{2/3} - 1 \geqslant$$
$$3\times 2^{1-\alpha}e'[\prod(1+x)]^\beta - 1 = 3\times 2^{1-\alpha}e'G - 1$$

于是

$$P_{\lambda_1}^{(\alpha)} \geqslant \frac{M_1M_2}{G} \geqslant 3\times 2^\beta e'(3\times 2^{1-\alpha}e' - \frac{1}{G}) \geqslant$$
$$3\times 2^\beta e'(3\times 2^{1-\alpha}e' - 2^{-3\beta}) \Rightarrow P_{\lambda_1}^{(\alpha)} \geqslant \frac{3e'}{4^\beta}(3\times 2^{1-(\alpha-3\beta)}\cdot e' - 1) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{3}P_{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant \frac{e}{4^\beta}(3\times 2^{1-(\alpha-3\beta)}\cdot\frac{e}{3} - 1) \Rightarrow$$
$$P_{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant \frac{3e}{4^\beta}[2^{1-(\alpha-3\beta)}e - 1]$$

等号成立仅当 $x = y = z = 1$ 及 $\lambda = \mu = v = 1(e = 1)$.

7 元数推广

不等式(A)是关于3个正数 x, y, z 的分式和不等式,且外形上头轻脚重.现在,是我们将它从3个元数推广到 n 个元数的时候了.

推广9 设参数 $\lambda \geqslant 1$, $n(2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n \geqslant 1$,则

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^n}{D_i} \geqslant \frac{n}{(\lambda+1)^{n-1}} \qquad (L)$$

其中 $D_i = (\lambda + a_1)(\lambda + a_2)\cdots(\lambda + a_n)/(\lambda + a_i), i = 1, 2, \cdots, n$.

在(A)式的所有推广中,本推广最大众化,证法已最多,为了扩展广大数奥选手的视野,本文不惜增长一点篇幅,向大家提供4种证法.供选手们借鉴参考.

证法1 记 $t = (\sum_{i=1}^n a_i)/n \geqslant (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$,且

$$\sum_{i=1}^n(\lambda + a_i) = n(\lambda + t)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^n \geqslant nt^n, \prod_{i=1}^n(\lambda + a_i) \leqslant (\lambda + t)^n$$

应用以前的结论有

$$t^n \geqslant \left(\frac{t+1}{2}\right)^n \geqslant \left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-1} \geqslant \left(\frac{\lambda+t}{\lambda+1}\right)^{n-1}$$

根据对称性,不妨设

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1^n \geqslant a_2^n \geqslant \cdots \geqslant a_n^n \\ \dfrac{1}{D_1} \geqslant \dfrac{1}{D_2} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{1}{D_n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^n}{D_i} \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i^n\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i}\right) =$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^n}{n}\right)\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n(\lambda + a_i)} = \frac{(\lambda + t)\sum_{i=1}^n a_i^n}{\prod_{i=1}^n(\lambda + a_i)} \geqslant$$

$$\frac{n(\lambda + t)t^n}{(\lambda + t)^n} = \frac{nt^n}{(\lambda + t)^{n-1}} \geqslant$$

$$\frac{n}{(\lambda + t)^{n-1}}\left(\frac{\lambda + t}{\lambda + 1}\right)^{n-1} \geqslant \frac{n}{(\lambda + 1)^{n-1}}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

证法 2 我们证明当 $\lambda = 1$ 时的情况，设关于正数 t 的函数为

$$f(t) = 2^{n-1}t^n(1 + t) - (1 + t)^n = (t - 1)g(t)$$

应用综合除法易求得

$$g(t) = (t + 1)[(2t)^{n-1} + (2t)^{n-2} + (2t)^{n-3}(t + 1) + \cdots + (2t)(t + 1)^{n-3} + (t + 1)^{n-2}]$$

因此 $g(t)$ 是关于 t 的严格递增函数，从已知条件 $a_1a_2\cdots a_n \geqslant 1$ 可设

$$a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant 1 \geqslant a_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n (1 \leqslant k \leqslant n - 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_i - 1 \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant k - 1) \\ a_j - 1 \leqslant 0 (k + 1 \leqslant j \leqslant n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} g(a_i) \geqslant g(a_k) (1 \leqslant i \leqslant k - 1) \\ g(a_j) \leqslant g(a_k) (k + 1 \leqslant j \leqslant n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_i - 1)g(a_i) \geqslant (a_i - 1)g(a_k) (1 \leqslant i \leqslant k - 1) \\ (a_k - 1)g(a_k) = (a_k - 1)g(a_k) (1 \leqslant k \leqslant n - 1) \\ (a_j - 1)g(a_j) \geqslant (a_j - 1)g(a_k) (k + 1 \leqslant j \leqslant n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - 1)g(a_i) \geqslant g(a_k)\sum_{i=1}^n (a_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^n a_i - n\right)g(a_k) \geqslant$$

$$\left[n\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} - n\right]g(k) \geqslant (n - n)g(k) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n [2^{n-1}a_i^n(1 + a_i) - (1 + a_i)^n] \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$2^{n-1}\sum_{i=1}^n a_i^n(1 + a_i) \geqslant \sum_{i=1}^n (1 + a_i)^n \geqslant$$

域外高手

$$n\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\Rightarrow P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n}{D_i}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

证法 3　应用多元对称不等式有

$$S=\sum_{i=1}^{n}D_i\leqslant n\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\lambda+a_i)}{n}\right]^{n-1}=n(\lambda+t)^{n-1}\Rightarrow n(\lambda+t)^{n-1}P_n\geqslant SP_n=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}D_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n}{D_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{n}{2}}\right)^2\geqslant$$

$$\left[n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=n^2t^n\Rightarrow$$

$$P_n\geqslant\frac{nt^n}{(\lambda+t)^{n-1}}\geqslant\frac{n}{(\lambda+1)^{n-1}}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

证法 4　记 $x_i=(n-1)\lambda+nt-ai$，易证

$$D_i\leqslant\left(\frac{x_i}{n-1}\right)^{n-1}$$

记

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n}{x_i^{n-1}},t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

又

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n(n-1)\lambda+n^2t-\sum_{i=1}^{n}a_i=n(n-1)\lambda+n^2t-nt=$$

$$n(n-1)(\lambda+t)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant n^2\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n}{(n-1)(\lambda+t)}\Rightarrow T_n\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{n-1}\geqslant$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^n\cdot n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{n-1}\geqslant nt^n\left[\frac{1}{(n-1)(\lambda+t)}\right]^{n-1}\geqslant$$

$$n\left(\frac{\lambda+t}{\lambda+1}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)(\lambda+t)}\right]^{n-1}\Rightarrow T_n\geqslant\frac{n}{[(n-1)(\lambda+1)]^{n-1}}\Rightarrow$$

$$P_n\geqslant(n-1)^{n-1}T_n\geqslant\frac{n}{(\lambda+1)^{n-1}}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

现在我们再从参数、指数方面推广(L)式.

推广 10　设 $n(2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=n\lambda\geqslant n$，指数 $\alpha\geqslant\max(1+\beta,(n-1)\beta)(\beta\geqslant0)$，记

$$D_i=\frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+a_i)}{\lambda_i+a_i},1\leqslant i\leqslant n$$

则

$$P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{D_i^{\beta}}\geqslant\frac{n}{(\lambda+1)^{(n-1)\beta}} \tag{M}$$

略证 当 $\beta=0$ 时易证(M)式成立.

当 $\beta>0$ 时,记 $t=(\sum_{i=1}^{n}a_i)/n\geqslant 1$,记

$$S=\sum_{i=1}^{n}D_i\leqslant n\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+a_i)}{n}\right]^{n-1}=n(\lambda+t)^{n-1}$$

$$t^{\alpha}\geqslant\left(\frac{t+1}{2}\right)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{t+1}{2}\right)^{(n-1)\beta}\geqslant\left(\frac{\lambda+t}{\lambda+1}\right)^{(n-1)\beta}$$

$$P_n^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{D_i^{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^{\theta})^{1+\beta}}{D_i^{\beta}}\left(\theta=\frac{\alpha}{1+\beta}\geqslant 1\right)\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\theta}\right)^{1+\beta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}D_i\right)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{\left[n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{[n(\lambda+t)^{n-1}]\beta}=\frac{(nt^{\theta})^{1+\beta}}{[n(\lambda+t)^{n-1}]^{\beta}}=\frac{nt^{\alpha}}{(\lambda+t)^{(n-1)\beta}}\geqslant$$

$$\frac{n}{(\lambda+t)^{(n-1)\beta}}\left(\frac{\lambda+t}{\lambda+1}\right)^{(n-1)\beta}\Rightarrow P_n^{(\alpha)}\geqslant\frac{n}{(\lambda+1)^{(n-1)\beta}}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$,且 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$.

8 综合推广

欲穷千里目,更上一层楼.为了深刻理解(A)式,彻底解读(A)式,我们将前面的几个重要推广再前进一步.

推广 11 设 $a_i>0,\lambda_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}=1$,记号 D_i 同上,则

$$P_n^{(\lambda)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i a_i^{n}}{D_i}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \tag{N}$$

如果令 $\lambda_i=\frac{1}{n}p_i(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_i=n$,(N)式化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i a_i^{n}}{D_i}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_n} \tag{N$_1$}$$

取 $n=3$,通过置换

$$(a_1,a_2,a_3)\to(x,y,z)$$
$$(p_1,p_2,p_3)\to(\lambda,\mu,v)$$

且
$$\lambda+\mu+v=3,x^\lambda y^\mu z^v=1$$

(N_1) 式又化为(A)式的一个新的加权推广

$$\frac{\lambda x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{\mu y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{vz^3}{(1+y)(1+x)}\geqslant\frac{3}{4}\sqrt[3]{\lambda\mu v}\qquad (N_2)$$

显然,当 $\lambda=\mu=v$ 时,(N_2) 式化为(A)式.

略证 从推广 9 中的证法 2 有

$$\begin{cases}\lambda_i(a_i-1)g(a_i)\geqslant\lambda_i(a_i-1)g(a_k)(1\leqslant i\leqslant k-1)\\ \lambda_k(a_k-1)g(a_k)=\lambda_k(a_k-1)g(a_k)(1\leqslant k\leqslant n-1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-1)g(a_i)\geqslant\\ \lambda_j(a_j-1)g(a_j)\geqslant\lambda_j(a_j-1)g(a_k)(k+1\leqslant j\leqslant n)\end{cases}$$

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-1)\Big]g(a_k)=$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)g(a_k)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i-1\Big)g(a_k)\geqslant$$

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}-1\Big)g(a_k)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[2^{n-1}a_i^n(1+a_i)-(1+a_i)^n]\geqslant0\Rightarrow$$

$$2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^n(1+a_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1+a_i)^n\geqslant\qquad ①$$

$$n\Big[\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(1+a_i)^n\Big]^{\frac{1}{n}}(\text{记 }\lambda=\Big(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)^{1/n})=$$

$$n\lambda\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\Rightarrow P_n^{(\lambda)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_ia_i^n}{D_i}\geqslant\frac{n\lambda}{2^{n-1}}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 和 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$.

当我们回首反顾①式时,仿佛看到了一颗闪光的流星,使我们眼前一亮.当取 $n=3$,并作置换

$$\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)\to(x,y,z)\\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\to\Big(\frac{\mu+v}{2},\frac{v+\lambda}{2},\frac{\lambda+\mu}{2}\Big)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+\mu+v=1\\ x^{\mu+v}\cdot y^{v+\lambda}\cdot z^{\lambda+\mu}=1\end{cases}$$

于是由①式得

$$4[(\mu+v)x^3(1+x)+(v+\lambda)y^3(1+y)+(\lambda+\mu)z^3(1+z)]\geqslant$$
$$(\mu+v)(1+x)^3+(v+\lambda)(1+y)^3+(\lambda+\mu)(1+z)^3\geqslant$$
$$2\Big\{\delta\sum[(1+y)(1+z)]^3\Big\}^{1/2}(\text{其中 }\delta=\mu v+v\lambda+\lambda\mu)\geqslant$$
$$2[3\delta\prod(1+y)(1+z)]^{1/2}=2[3\delta\prod(1+x)^2]^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3\delta}\cdot\prod(1+x)\Rightarrow$$

②

$$P_\lambda=\sum\frac{(\mu+v)x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{3\delta}$$

这一美妙的结论正是我们在第5节开头朝思暮想的结果，真是朝花夕拾．现在，不等式(A)的第4个加权推广终于诞生：

推广12 正数 x,y,z 及 λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=1$ 和 $x^{\mu+v}\cdot y^{v+\lambda}\cdot z^{\lambda+\mu}=1$，则有

$$\frac{(\mu+v)x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{(v+\lambda)y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{(\lambda+\mu)z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)}\quad(\mathrm{O})$$

从外观上看，在(A)式的加权推广中，(O)式最优雅精致，令人偏爱．

下面我们将推广从3元推广到多元：

推广13 设 $a_i>0,\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$，且 $\prod\limits_{i=1}^n a_i=1,\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\leqslant n$，$\alpha\geqslant\max(1,n\beta)(\beta\geqslant 0)$，记 $G=\prod\limits_{i=1}^n(1+a_i)^\beta,G_i=G/(1+a_i)^\beta$，则

$$P_\lambda=\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i a_i^\alpha}{G_i}\geqslant\frac{n\lambda}{2^{(n-1)\beta}}(\lambda 2^{1-\alpha+n\beta}-1)\qquad(\mathrm{P})$$

其中

$$\lambda=(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$$

特别地，当 $n=3$ 时，(P)式等价于(K)式．

证明 注意到

$$G=\prod_{i=1}^n(1+a_i)^\beta\geqslant\prod_{i=1}^n(2\sqrt{a_i})^\beta=2^{n\beta}\Big(\prod_{i=1}^n a_i\Big)^{\beta/2}=2^{n\beta}$$

设

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i=np_i\\ \sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\leqslant n\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^n p_i\leqslant 1\\ \lambda=n\Big(\prod\limits_{i=1}^n p_i\Big)^{\frac{1}{n}}=np\\ P_p=\dfrac{1}{n}P_\lambda\end{cases}$$

设

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0\Rightarrow\begin{cases}a_1^\alpha\geqslant a_2^\alpha\geqslant\cdots\geqslant a_n^\alpha\\(1+a_1)^\beta\geqslant(1+a_2)^\beta\geqslant\cdots\geqslant(1+a_n)^\beta\end{cases}\Rightarrow P_p=$$

$$\sum_{i=1}^n\frac{p_ia_i^\alpha}{G_i}=\frac{1}{G}\sum_{i=1}^n p_ia_i^\alpha(1+a_i)^\beta(\text{应用切比雪夫不等式的加权推广})\geqslant$$

$$\frac{M_1M_2}{G\sum\limits_{i=1}^n p_i}\geqslant\frac{M_1M_2}{G}\qquad③$$

其中

$$\begin{cases} M_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\alpha} \\ M_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (1 + a_i)^{\beta} \end{cases} \quad ④$$

而

$$M_2 \geqslant n\left[\prod_{i=1}^{n} p_i (1 + a_i)^{\beta}\right]^{\frac{1}{n}} = np\left[\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i)\right]^{\frac{\beta}{n}} \geqslant 2^{\beta} np \quad ⑤$$

且

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^{n} p_i (a_i^{\alpha} + 1) - \sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i (a_i^{\alpha} + 1) - 1 \geqslant \\ &\sum_{i=1}^{n} 2p_i \left(\frac{a_i + 1}{2}\right)^{\alpha} - 1 \geqslant \\ &\frac{n}{2^{\alpha-1}}\left[\prod_{i=1}^{n} p_i (a_i + 1)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \geqslant \\ &\frac{np}{2^{\alpha-1}}\left[\prod_{i=1}^{n} (a_i + 1)\right]^{\frac{\alpha}{n}} - 1 \geqslant \frac{np}{2^{\alpha-1}}\left[\prod_{i=1}^{n} (a_i + 1)\right]^{\beta} - 1 = \frac{npG}{2^{\alpha-1}} - 1 \Rightarrow \quad ⑥ \\ P_p &\geqslant \frac{M_1 M_2}{G} \geqslant \frac{2^{\beta} np}{G}\left(\frac{npG}{2^{\alpha-1}} - 1\right) = 2^{\beta} np\left(\frac{np}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{G}\right) \geqslant \\ &2^{\beta} np\left(\frac{np}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{n\beta}}\right) \Rightarrow \\ P_p &\geqslant \frac{np}{2^{(n-1)\beta}}(2^{1-\alpha+n\beta} \cdot np - 1) \Rightarrow \frac{1}{n} P_{\lambda} \geqslant \\ &\frac{\lambda}{2^{(n-1)\beta}}(2^{1-\alpha+n\beta} \cdot \lambda - 1) \Rightarrow P_{\lambda} \geqslant \frac{n\lambda}{2^{(n-1)\beta}}(2^{1-\alpha+n\beta} \cdot \lambda - 1) \end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_i = \lambda_i = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

相应地，推广 7 可推广成：

推广 14 设 $\lambda_i > 0, x_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n (2 \leqslant n \in \mathbf{N})$, $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} = 1$, $\alpha \geqslant (n-1)\beta \geqslant 1$. 记 $G_i = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i)/(1 + x_i) (1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$P_{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i^{\alpha}}{G_i^{\beta}} \geqslant \frac{n^{1-(n-1)\beta}}{2^{(n-1)\beta}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\right)^2 - n(n-1)\right]^{(n-1)\beta} \quad (Q)$$

显然，当 $n = 3$ 时，(Q) 式等价于推广 7 中的 (K) 式.

放眼展望 (P)、(Q) 两式，它们从元数、系数、指数（只缺参数）三个方面推广了漂亮的不等式 (A)，从外观结构上看，它俩姿态相近，各放异彩.

证明 记 $\theta = \alpha - (n-1)\beta \geqslant 0$, $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$，且易证

$$G_i \leqslant \left(\frac{n - 1 + s - x_i}{n - 1}\right)^{n-1} = (2a_i)^{n-1}$$

其中

$$n-1+s-x_i=2(n-1)a_i(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(n-1+s-x_i)=2(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i\Rightarrow$$

$$n(n-1)+n\cdot s-\sum_{i=1}^{n}x_i=2(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i\Rightarrow$$

$$(n-1)(n+s)=2(n-1)A\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}n+s=2A\\ n-1+s-x_i=2(n-1)a_i\end{array}\right\}\Rightarrow 1+x_i=2A-2(n-1)a_i\Rightarrow$$

$$x_i=2A-2(n-1)a_i-1$$

再设

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i=np_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=n\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P_p=\dfrac{1}{n}P_\lambda\\ \sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1\end{array}\right.$$

于是

$$P_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_ix_i^{\beta}}{G_i^{\beta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{p_ix_i^{\beta}}{(2a_i)^{(n-1)\beta}}=2^{-(n-1)\beta}\sum_{i=1}^{n}\left[p_ix_i^{\beta}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}\right]\geqslant$$

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^{\beta}\right)}{2^{(n-1)\beta}}\cdot\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}\geqslant 2^{-(n-1)\beta}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{np_i}\right)^{\frac{\beta}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}=$$

$$2^{-(n-1)\beta}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\right)^{\frac{\beta}{n}}\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}=$$

$$2^{-(n-1)\beta}\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}\geqslant 2^{-(n-1)\beta}\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)\right]^{(n-1)\beta}\Rightarrow$$

$$2(P_p)^{\frac{1}{(n-1)\beta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{x_i}{a_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}[2A-2(n-1)a_i-1]=$$

$$2A\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right)-2(n-1)\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}=$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right)-2(n-1)-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\geqslant$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}\right)^2-2(n-1)-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\qquad ⑦$$

又

$$P_p\geqslant 2^{-(n-1)\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_ix_i^{\beta}}{a_i^{(n-1)\beta}}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^{\beta}\right)}{2^{(n-1)\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i^{(n-1)\beta}}\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{(2a_i)^{(n-1)\beta}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{2a_i}\right)^{(n-1)\beta}=$$

$$2^{-(n-1)\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right)^{(n-1)\beta}\Rightarrow 2(P_p)^{\frac{1}{(n-1)\beta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i} \qquad ⑧$$

$$①+②\Rightarrow (P_p)^{\frac{1}{(n-1)\beta}}\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}\right)^2-(n-1)\right]\Rightarrow$$

$$P_p\geqslant\frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}\right)^2-(n-1)\right]^{(n-1)\beta}}{2^{(n-1)\beta}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}P_\lambda\geqslant\frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda_i}{n}}\right)^2-(n-1)\right]^{(n-1)\beta}}{2^{(n-1)\beta}}\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{n^{1-(n-1)\beta}}{2^{(n-1)\beta}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\right)^2-n(n-1)\right]^{(n-1)\beta}$$

等号成立仅当 $a_i=\lambda_i=1(i=1,2,\cdots,n)$.

天下没有不散的宴席,本文已到尾声,最后指出:

(1) 如果设 $m>k>0$,且 $\theta>0,\beta>0,P_n^{(\theta)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i x_i^{\theta}}{Q_i^{\beta}}$,则 $P_n^{(m)}\geqslant P_n^{(k)}$.

如果 $m\in\mathbf{N}$,则有一条闪光的"金项链",即

$$P_n^{(m)}\geqslant P_n^{(m-1)}\geqslant\cdots\geqslant P_n^{(1)}\geqslant P_n^{(0)}$$

(2) 应用切比雪夫不等式的综合推广,不难将推广 11、推广 13、推广 14 从一组元素

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},2\leqslant n\in\mathbf{N}$$

推广到 $m(m\in\mathbf{N})$ 组同序正元素

$$\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}\},1\leqslant j\leqslant m$$

站在顶峰俯视"天下",顿感无限风光在险峰.

编后语 1934 年杨振宁之父清华大学算学系代理主任杨武之在《清华周刊》上指出:"算学教育之目的有三:1. 锻炼吾人之思考;2. 贯注计算之方术;3. 探发蕴藏之算理. 吾国一般教育穷败. 对于上述 1、2 种目的,未逮远甚,遑论高深研究,清华算学系自成立以来,窃注意于两种发展,即凡嗜算之士不必有特殊天才者,则皆培以基本课程,注重条理清楚,俾成算学通才,以为改良中小学算学教育之预备. 其有资禀特近,显有研究能力者,则更导之上进入研究所,以求深造俾获成专门学者.

本文集所注重发掘的也是这两类人,一是嗜算之士,邓寿才算是其中一位,二是有研究能力者,对前者我们提供园地供其耕种,对后者我们提供平台让其展示,欢迎"业余"与"专业"人士共同参与.

一道联赛题与 Garfunkel - Bankoff 不等式

邓寿才

1　等价形式

本刊第1辑第479页解答了2005年全国高中联赛加试第二题：

题1　设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy+bz=a$, $az+cx=b$, $bx+ay=c$，求函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$$

的最小值.

本题构思奇巧，解答也很巧妙：先从已知条件求解出 x,y,z，将复杂的代数问题转化为三角问题.

在 $\triangle ABC$ 中，求函数 $f(\cos A,\cos B,\cos C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的最小值.

然后又将三角问题转化为代数问题求得

$$f_{\min}=\frac{1}{2}$$

自然，这一问题等价于：

题2　在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant 1 \tag{A}$$

熟悉三角不等式的人一看便知，(A) 式不仅结构匀称，形态优雅，而且它正好是著名的 Garfunkel - Bankoff 不等式

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \tag{B}$$

变形得到的等价形式.

事实上，1983年，Garfunkel 曾在《CruxMa—thematicorum》上问："能否将两个熟知的反向三角不等式

$$\begin{cases}\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1\\ 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1\end{cases}$$

统一成一个更强的不等式(B)呢?"

这种将一对"冤家"配对成"夫妻"和睦相处在一起是有难度的,也是有趣有意义的.

说(A)式与(B)式等价.理由何在?

证法1　我们令

$$(x,y,z)=(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2})\Rightarrow yz+zx+xy=1\Rightarrow$$
$$1+x^2=yz+zx+xy+x^2=(y+x)(z+x)\Rightarrow$$
$$(y+z)(z+x)(x+y)=(y+z)(1+x^2)=y+z+(yx+zx)x=$$
$$y+z+(1-yz)x=x+y+z-xyz\Rightarrow xyz=x+y+z-\prod(y+z)$$

又(B)式化为

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2-\frac{8xyz}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}= \quad ①$$
$$2-8\left[\frac{\sum x-\prod(y+z)}{\prod(y+z)}\right]=10-\frac{4\sum(y+z)}{\prod(x+y)}=$$
$$10-4\sum\frac{1}{(x+y)(y+z)}=$$
$$10-4\sum\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow\sum x^2-4\sum\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\geqslant 10\Leftrightarrow$$
$$\sum(x^2-3+\frac{4}{1+x^2})\geqslant 1\Leftrightarrow\sum\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}\geqslant 1\Leftrightarrow \quad ②$$
$$\sum\frac{(1-\tan^2\frac{A}{2})^2}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\geqslant 1\Leftrightarrow\sum\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2\geqslant 1$$

(注:②式是一个不错的代数不等式)

证法2　利用恒等式

$$\begin{cases}\sum\cos A=1+4\prod\sin\frac{A}{2}\\ \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{2}{1+\cos\theta}-1\end{cases}$$

将(B)式化为

$$\sum\left(\frac{2}{1+\cos A}-1\right)\geqslant 2+2(1-\sum\cos A)\Leftrightarrow\sum\left(\cos A+\frac{1}{1+\cos A}\right)\geqslant\frac{7}{2}\Leftrightarrow$$
$$\sum\left(1+\cos A-\frac{\cos A}{1+\cos A}\right)\geqslant$$

$$\frac{7}{2}\Leftrightarrow\sum\left[1+\left(1-\frac{1}{1+\cos A}\right)\cos A\right]\geqslant\frac{7}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sum\left(1+\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}\right)\geqslant\frac{7}{2}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}\right)\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sum\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2\geqslant 1$$

无独有偶,(B) 式还有一个等价形式:

题 3 设 R,r,s 分别表示 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径、半周长,则有

$$R(4R+r)^2\geqslant 2s^2(2R-r) \tag{C}$$

证明 用 Δ 表示 $\triangle ABC$ 的面积,那么

$$\frac{r}{R}=\frac{\Delta}{Rs}=\frac{2\prod\sin A}{\sum\sin A}=4\prod\sin\frac{A}{2} \tag{③}$$

应用关系式 $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$,将(B) 式转化为

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 4-8\prod\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 4-2\left(\frac{r}{R}\right) \tag{④}$$

但

$$\sum\tan\frac{A}{2}=\left(\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\prod\sec\frac{A}{2}=$$

$$\sum(1+\cos B+\cos C-\cos A)/\prod\cos\frac{A}{2}=$$

$$(3+\sum\cos A)/\prod\cos\frac{A}{2}=$$

$$\left(4+4\prod\sin\frac{A}{2}\right)/\prod\cos\frac{A}{2}=\left(4+\frac{r}{R}\right)\prod\sec\frac{A}{2}\text{(代入④式)}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\prod\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\left(4+\frac{r}{R}\right)^2/\left(4-\frac{2r}{R}\right)\\ \text{又 } s=R\sum\sin A=4R\prod\cos\frac{A}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{s}{4R}\right)^2\leqslant\left(4+\frac{r}{R}\right)^2/\left(4-\frac{2r}{R}\right)\Rightarrow$$

$$R(4R+r)^2\geqslant 2s^2(2R-r)$$

2 (B) 式的证明

现在,我们证明著名的不等式(B).

证法 1 应用三角形不等式(此不等式的应用广泛,在许多数奥书刊上均安排为例题或习题),对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C \qquad ①$$

其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$,等号成立仅当

$$x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C \qquad ②$$

应用恒等式

$$\begin{cases}\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1\\ \sum\sin A=4\prod\cos\frac{A}{2}\\ \text{令}(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2\sum\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A\right)=$$

$$2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-4\sum\sin^2\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=$$

$$2-4\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)\sum\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)=$$

$$2-4\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)\frac{\sum\sin A}{2\prod\cos\frac{A}{2}}=2-8\prod\sin\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{\tan\frac{B}{2}}{\sin B}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{\sin C}\Rightarrow\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2=\left(\cos\frac{B}{2}\right)^2=\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2\Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

证法 2 根据恒等式

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)},\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\left(\text{其中 } s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

等等,再引入三个正数

$$\begin{cases}b+c-a=x\\ c+a-b=y\\ a+b-c=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=(y+z)/2\\ b=(z+x)/2\\ c=(x+y)/2\end{cases}$$

代入(B)式,得

$$\frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}}{x+y+z}\geqslant 2-\frac{8xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \qquad ③$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,将上式移项,通分并配方得

$$\{x^2(y-z)^2[(x^2-yz)(y+x)+x(y^2+z^2)]+y^2z^2(y+z)(x-y)(x-z)\}/M\geqslant 0 \quad ④$$

其中

$$M=xyz(\sum x)\prod(y+z)>0$$

④ 式成立，逆推之，(B) 式成立，等号成立仅当 $x=y=z\Rightarrow a=b=c$.

证法 3 应用恒等式

$$1=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant 3(\prod\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2})^{1/3}=3\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{2/3}\Rightarrow$$

$$\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant 3\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{1/3}\geqslant 3\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{2/3}3\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{1/3}\Rightarrow$$

$$\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant 9\prod\tan\frac{A}{2} \quad ⑤$$

又

$$\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1\Rightarrow\sum\tan\frac{A}{2}-\prod\tan\frac{A}{2}=$$

$$\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)\left(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)-\prod\tan\frac{A}{2}=$$

$$\prod\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=\prod\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)=$$

$$\prod\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)=\prod\sec\frac{A}{2}$$

又(B) 式

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\right)+8\prod\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow$$

$$P=\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\right)\prod\sec\frac{A}{2}+8\prod\tan\frac{A}{2}\geqslant 0 \quad ⑥$$

则

$$P=\left(\sum\tan\frac{A}{2}-\prod\tan\frac{A}{2}\right)\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\right)+8\prod\tan\frac{A}{2}\geqslant$$

$$8\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\right)\prod\tan\frac{A}{2}+8\prod\tan^2\frac{A}{2}=8\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-1\right)\prod\tan\frac{A}{2}=$$

$$4\left(2\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)\prod\tan\frac{A}{2}=$$

$$4\sum\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2\prod\tan\frac{A}{2}\geqslant 0 \quad ⑦$$

即 ⑥ 式成立，从而(B) 式成立，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

3 配 对

从外形结构而言,(A) 式有一个配对式

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\geqslant\frac{R}{r} \tag{D}$$

其实,应用倍角公式知,(D) 式等价于

$$\sum\csc^2\frac{A}{2}\geqslant\sum\sec^2\frac{A}{2}+\frac{4R}{r} \tag{D'}$$

证明 我们只须证明 $\triangle ABC$ 是锐角三角形的情形即可. 由对称性,不妨设

$$0<A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\cos A\geqslant\cos B\geqslant\cos C>0\\ \csc^2 A\geqslant\csc^2 B\geqslant\csc^2 C>0\end{cases}(\text{应用切比雪夫不等式})\Rightarrow$$

$$\sum\frac{\cos A}{\sin^2 A}\geqslant\frac{1}{3}(\sum\cos A)\sum\csc^2 A=$$

$$\frac{1}{3}\left(1+4\prod\sin\frac{A}{2}\right)\sum\csc^2 A=\frac{1}{3}(1+\frac{r}{R})\sum\csc^2 A\geqslant$$

$$\frac{1}{3}(1+\frac{r}{R})\frac{3R^2}{Rr+r^2}=\frac{R}{r}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

其实,(D) 式可以从系数方面推广成:

推广 1 对于任意正数 λ,μ,v 和任意的 $\triangle ABC$,有

$$\frac{\lambda\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\mu\cos B}{\sin^2 B}+\frac{v\cos C}{\sin^2 C}\geqslant\left(\frac{\lambda_1 a+\mu_1 b+v_1 c}{a+b+c}\right)\frac{R}{r} \tag{E}$$

其中

$$\begin{cases}\lambda_1=2\mu+2v-3\lambda\\ \mu_1=2v+2\lambda-3\mu\\ v_1=2\lambda+2\mu-3v\end{cases}$$

虽然,当 $\lambda=\mu=v$ 时,(E) 式化为(D) 式.

证明 应用正弦和余弦定理有

$$T_\lambda=\sum\frac{\lambda\cos A}{\sin^2 A}=\frac{2R^2}{abc}\sum\lambda\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a}\right)=$$

$$\frac{2R^2}{abc}\left[\sum\frac{\lambda}{a}(b^2+c^2)-\sum\lambda a\right]=$$

$$\frac{2R}{rS}\left[\sum\lambda\left(\frac{b^2+c^2}{a}+2a\right)-\sum 3\lambda a\right]\geqslant$$

$$\frac{2R}{rS}\left\{\sum\lambda\left[\frac{(b+c)^2}{2a}+2a\right]-\sum 3\lambda a\right\}\geqslant$$

$$\frac{2R}{rS}\left[\sum 2\lambda(b+c)-\sum 3\lambda a\right]=\frac{2R}{rS}\sum(2\mu+2v-3\lambda)a=$$

$$\left(\frac{\lambda_1 a+\mu_1 b+v_1 a}{a+b+c}\right)\frac{R}{r}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(A) 式的第二个配对式的推广形式为:

推广 2 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\lambda, \mu, v \in (0,3)$ 且 $\lambda + \mu + v = 3$, 则有

$$\lambda\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos A}\right)^2 + \mu\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos B}\right)^2 + v\left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos C}\right)^2 \geqslant 9\left(6 - \frac{\mu v}{\lambda} - \frac{v\lambda}{\mu} - \frac{\lambda\mu}{v}\right)\left(\frac{\lambda\mu v}{\lambda^2 + \mu^2 + v^2}\right)^2 \quad (F)$$

特别地, 当取 $\lambda = \mu = v = 1$ 时, 有

$$\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos A}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos C}\right)^2 \geqslant 3 \quad (F)'$$

这也是一个不错的漂亮结论.

证明 (1) 设 $x, y, z > 0$, 注意到 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

$$\begin{cases} M = \lambda\sin^2\frac{A}{2} + \mu\sin^2\frac{B}{2} + v\sin^2\frac{C}{2} \\ N = \frac{\lambda}{\cos A} + \frac{\mu}{\cos B} + \frac{v}{\cos C} \end{cases}$$

应用三角母不等式有

$$\left(\frac{1}{2}\sum\lambda^2\right)N \geqslant N\left(\sum\mu v\cos A\right) = \left(\sum\frac{\lambda}{\cos A}\right)\left(\sum\mu v\cos A\right)(\text{应用柯西不等式}) \geqslant$$

$$\left(\sum\sqrt{\lambda\mu v}\right)^2 = 9\lambda\mu v \Rightarrow N \geqslant \frac{18\lambda\mu v}{\lambda^2 + \mu^2 + v^2} \quad ①$$

再次应用三角母不等式, 有

$$\sum x^2 \geqslant 2\sum yz\cos A = 2\sum yz\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) = 2\sum yz - 4\sum yz\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\sum yz\sin^2\frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{4}\left(2\sum yz - \sum x^2\right) \quad ②$$

令

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ zx = \mu \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \mu v/\lambda \\ y^2 = v\lambda/\mu \\ z^2 = \lambda\mu/v \end{cases} \Rightarrow M = \sum\lambda\sin^2\frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{4}\left(2\sum\lambda - \sum\frac{\mu v}{\lambda}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(6 - \sum\frac{\mu v}{\lambda}\right) \quad ③$$

(2) 依题意, 不妨设

$$0 < A \leqslant B \leqslant C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\frac{A}{2} \leqslant \sin^2\frac{B}{2} \leqslant \sin^2\frac{C}{2} \\ \frac{1}{\cos^2 A} \leqslant \frac{1}{\cos^2 B} \leqslant \frac{1}{\cos^2 C} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T_\lambda = \sum\lambda\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos A}\right)^2 = 3\sum\frac{\lambda}{3}\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos A}\right)^2$$

(应用切比雪夫不等式的加权推广) $\geqslant$

$$3\left(\sum \frac{\lambda}{3}\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\sum \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 A}\right)=$$

$$M=\left(\sum \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 A}\right)(\text{应用加权幂平均不等式})\geqslant$$

$$M\left(\sum \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{\cos A}\right)^2=$$

$$\frac{1}{9}MN^2\geqslant\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\left(6-\sum\frac{\mu v}{\lambda}\right)\left(\frac{18\lambda\mu v}{\sum\lambda^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$T_\lambda\geqslant 9\left(6-\sum\frac{\mu v}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda\mu v}{\sum\lambda^2}\right)^2 \qquad ④$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\lambda=\mu=v=l$.

如果我们的思维单一定向，凝固收缩，那么就寻觅不到(A) 式的新的配对式. 让我们再欣赏(A) 式的芳容

$$\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant 1 \qquad (\mathrm{A})$$

启发了我们的自由放飞、散发创新的思绪：我们可以认为，不等式

$$\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin\frac{B}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin C}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2\leqslant 9 \qquad (\mathrm{A}_1)'$$

在三角意义上是(A) 式的配对式. 而且，它还可以加权推广为：

推广 3　设 $\lambda,\mu,v>0$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\lambda\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2+\mu\left(\frac{\sin B}{\sin\frac{B}{2}}\right)^2+v\left(\frac{\sin C}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2\leqslant\left(\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}}+\sqrt{\frac{v\lambda}{\mu}}+\sqrt{\frac{\lambda\mu}{v}}\right)^2 \qquad (\mathrm{A}_1)$$

显然，当 $\lambda=\mu=v=1$ 时，(A_1) 式化为 $(\mathrm{A}_1)'$ 式.

证明　设 $x,y,z>0$，应用三角母不等式

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}yz=\lambda\\ zx=\mu\\ xy=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\mu v/\lambda}\\ y=\sqrt{v\lambda/\mu}\\ z=\sqrt{\lambda\mu/v}\end{cases}\\ \sum x^2\geqslant 2\sum yz\cos A\end{array}\right\}\Rightarrow\sum\frac{\mu v}{\lambda}\geqslant 2\sum\lambda\cos A=$$

$$2\sum\lambda\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=4\sum\lambda\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2-2\sum\lambda\Rightarrow$$

$$4\sum\lambda\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\sum\frac{\mu v}{\lambda}+2\sum\lambda=\left(\sum\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}}\right)^2\Rightarrow$$

$$T_\lambda=\sum\lambda\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2=4\sum\lambda\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\left(\sum\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}}\right)^2$$

如果，我们再设 $k\leqslant 2,\lambda+\mu+v=3$，则我们应用加权幂平均不等式有

$$[T_\lambda^{(k)}]^{\frac{1}{k}}=\left[3\sum\frac{\lambda}{3}\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\left[3^{\frac{2}{k}}\cdot\sum\frac{\lambda}{3}\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\left[3^{\frac{2}{k}}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$T_\lambda^{(k)}\leqslant(\sqrt{3})^{2-k}(\sum\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}})^K\Rightarrow$$

$$\sum\lambda\left(\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}\right)^k\leqslant(\sqrt{3})^{2-k}\left(\sum\sqrt{\frac{\mu v}{\lambda}}\right)^k \qquad (A_1)'$$

(其中 $\lambda,\mu,v\in(0,3),\lambda+\mu+v=3,k\geqslant2$)

当我们回首(A)式和$(A_1)'$式时,发现它俩结构相同,形态优雅,恰似"天生一对"的"龙凤胎".它俩的左边结构均是"商-和"结构.如果将它俩变化为"差-积"结构,那会是什么景象呢?

推广4　设 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,3)$,则对于任意 $\triangle ABC$,及 $\alpha+\beta+\gamma=3$.有

$$\left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2A\right)^\alpha\left(\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2B\right)^\beta\left(\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2C\right)^\gamma\leqslant\left(\frac{1}{6}\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^3 \qquad (A_2)$$

$$\left(\sin^2A-\sin^2\frac{A}{2}\right)^\alpha\left(\sin^2B-\sin^2\frac{B}{2}\right)^\beta\left(\sin^2C-\sin^2\frac{C}{2}\right)^\gamma\leqslant\left(\frac{1}{6}\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^3 \qquad (A_3)$$

证明　令

$$\begin{cases}yz=\alpha\\zx=\beta\\xy=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\beta\gamma/\alpha}\\y=\sqrt{\gamma\alpha/\beta}\\z=\sqrt{\alpha\beta/\gamma}\end{cases}$$

应用三角母不等式

$$\sum x^2\geqslant2\sum yz\cos A=2\sum yz(2\cos^2\frac{A}{2}-1)=4\sum yz\cos^2\frac{A}{2}-2\sum yz\Rightarrow$$

$$4\sum yz\cos^2\frac{A}{2}\leqslant\sum x^2+2\sum yz=(\sum x)^2\Rightarrow$$

$$p=\sum\alpha\cos^2\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{4}\left(\sum\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}\right)^2 \qquad ⑤$$

在三角母不等式中作置换

$$\left\{(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2c)\right.\Rightarrow\sum x^2\geqslant2\sum yz\cos(\pi-2A)=$$

$$-2\sum yz\cos2A=-2\sum yz(2\cos^2A-1)\Rightarrow$$

$$4\sum yz\cos^2A\geqslant2\sum yz-\sum x^2\Rightarrow$$

$$4\sum\alpha\cos^2A\geqslant2\sum\alpha-\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}=6-\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\Rightarrow$$

$$q=\sum\alpha\cos^2A\geqslant\frac{1}{4}(6-\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}) \qquad ⑥$$

域外高手

注意到

$$\sum\alpha=3\Rightarrow\sum\frac{\alpha}{3}=1\Rightarrow$$

$$(T(\alpha))^{\frac{1}{3}}=\prod\left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2A\right)^{\alpha/3}\text{(应用加权不等式)}\leqslant$$

$$\sum\frac{\alpha}{3}\left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2A\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum\alpha\cos^2\frac{A}{2}-\sum\alpha\cos^2A\right)=$$

$$\frac{1}{3}(p-q)\leqslant$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\sum\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}\right)^2-\frac{1}{4}\left(6-\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{12}\left(2\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}+2\sum\alpha-6\right)=\frac{1}{6}\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\Rightarrow T(\alpha)\leqslant\left(\frac{1}{6}\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^3$$

同理可证(A_3)式成立，等号成立仅当$\alpha=\beta=\gamma=1$且$\triangle ABC$为正三角形.

如果将我们的思维再变化更新，那我们还可建立(A)式的一对新的配对式：

推广 5 设$K\geqslant1,0<m\leqslant1,\lambda,\mu,v,p,q,r\in(0,3)$，且有$\lambda+\mu+v=3$，$p+q+r=3$，对锐角$\triangle ABC$有

$$\sum\lambda\left(\frac{\tan A}{\tan\frac{A}{2}}\right)^K\geqslant\frac{3\left[\sum\sqrt{\lambda(q+r)}\right]^{2K}}{\left(q-\sum qr\right)^K}\tag{A_4}$$

$$\sum\lambda\left(\frac{\cot A}{\cot\frac{A}{2}}\right)^m\leqslant3\left(\frac{6-\sum\mu v}{9}\right)^m\tag{A_5}$$

特别地，当取$p=q=r=1$时，(A_4)简化为单纯的

$$\sum\lambda\left(\frac{\tan A}{\tan\frac{A}{2}}\right)^K\geqslant\frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^{2K}}{3^{K-1}}\tag{A_4'}$$

略证 记

$$\sum p=3\Rightarrow\sum(q+r)/6=1\Rightarrow f=\sum\frac{q+r}{6}\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant\left(\sum\frac{q+r}{6}\tan\frac{A}{2}\right)^2=$$

$$\frac{1}{36}\left[\sum(q+r)\tan\frac{A}{2}\right]^2\geqslant\frac{1}{36}\times4\left(\sum qr\right)\left(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{9}\sum qr\Rightarrow f\geqslant\frac{1}{9}\sum qr\Rightarrow\tag{⑦}$$

$$t=\sum(q+r)\left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)=\sum(q+r)-\sum(q+r)\tan^2\frac{A}{2}=$$

$$2\sum p-6f=6-6f\leqslant6\left(1-\frac{1}{9}\sum qr\right)\Rightarrow$$

$$t\leqslant\frac{2}{3}\left(q-\sum qr\right)\Rightarrow\tag{⑧}$$

$$\frac{2}{3}(q-\sum qr)\sum\left(\frac{\lambda}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\right)\geqslant$$

$$\sum(q+r)(1-\tan^2\frac{A}{2})\cdot\sum\left(\frac{\lambda}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\right)\geqslant$$

$$[\sum\sqrt{\lambda(q+r)}]^2\Rightarrow\sum\left(\frac{\lambda}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\right)\geqslant\frac{3[\sum\sqrt{\lambda(q+r)}]^2}{2(9-\sum qr)}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}T_\lambda\right)^{\frac{1}{k}}=\left[\sum\frac{\lambda}{3}\cdot\left(\frac{\tan A}{\tan\frac{A}{2}}\right)^K\right]^{\frac{1}{k}}\geqslant$$

(注意$\sum\lambda/3=1$)

$$\sum\left(\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\tan A}{\tan\frac{A}{2}}\right)=\frac{2}{3}\sum\left(\frac{\lambda}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\right)\geqslant$$

$$\frac{[\sum\sqrt{\lambda(q+r)}]^2}{q-\sum qr}\Rightarrow T_\lambda\geqslant\frac{3[\sum\sqrt{\lambda(q+r)}]^{2k}}{(q-\sum qr)^K}$$

同理可证(A_5)式成立,等号成立仅当$\lambda=\mu=v=1,p=q=r=1$,且$\triangle ABC$为正三角形.

回首展望,我们已为(A)式建立了多个配对式,那么(A)式的等价形式之一的(B)式

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2 \tag{B}$$

也有配对式吗?如果有,是否形如

$$\sum\cot^2\frac{A}{2}+K_1\prod\cos\frac{A}{2}\geqslant m_1$$

$$(\prod\tan\frac{A}{2})\sum\sin^2\frac{A}{2}\geqslant m_2$$

$$(\prod\cot\frac{A}{2})\sum\cos^2\frac{A}{2}\geqslant m_3$$

$$\prod\tan\frac{A}{2}+K_2\sum\sin^2\frac{A}{2}\geqslant m_4$$

$$\prod\cot\frac{A}{2}+K_3\sum\cos^2\frac{A}{2}\geqslant m_5$$

其中$k_1,k_2,k_3,m_1,m_2,m_3,m_4,m_5$为相应的正系数.

在科学探索的征途上,有时提出问题比解决问题意义更深远.为此,我们视下式为(B)式的一个配对式

$$\sum\cot\frac{A}{2}+\sum\cos\frac{A}{2}\geqslant\frac{9}{2}\sqrt{3} \tag{B_1}$$

其中$\triangle ABC$为任意三角形.

证明　应用平均值不等式有

$$\sum\cos\frac{A}{2}+\sum\cot\frac{A}{2}=\sum\cot\frac{A}{2}+2\sum\left(\frac{1}{2}\cot\frac{A}{2}\right)\geqslant$$
$$9\left[\prod\left(\cos\frac{A}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cot\frac{A}{2}\right)^2\right]^{1/9}=$$
$$9\left\{\prod\left[\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdot\frac{s(s-a)}{4(s-b)(s-c)}\right]\right\}^{\frac{1}{9}}=$$
$$9\left[\frac{s^3\sqrt{s^3}}{64abc\sqrt{\prod(s-a)}}\right]^{\frac{1}{9}}=$$
$$\frac{9}{2}\left[\frac{(\sum a)^3}{abc}\right]^{\frac{1}{9}}\left[\frac{\sum(s-a)}{\sqrt[3]{\prod(s-a)}}\right]^{\frac{1}{9}}\geqslant$$
$$\frac{9}{2}\times3^{1/3}\times3^{1/6}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

4 加 强

在本小节,我们建立(B)式的两个加强.其实,(B)式已够强的了,若要再加强它,就有一定的难度.其实,我们在(B)式的证法3中有

$$\left(\sum\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}-2\right)+8\prod\tan\frac{A}{2}\geqslant$$
$$4\sum\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2\prod\tan\frac{A}{2}\geqslant0\Leftrightarrow$$
$$\frac{\sum\tan^2\frac{A}{2}-2}{\prod\cos\frac{A}{2}}+\frac{8\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}\geqslant$$
$$4\sum\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2\cdot\frac{\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\sum\tan^2\frac{A}{2}+8(1-Q)\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant2\qquad(G)$$

其中
$$Q=\frac{1}{2}\sum\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant0$$

这就是(B)式的第一个加强.(B)式的第二个加强是:

加强2 对于任意 $\triangle ABC$,有

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant2+Q'\qquad(H)$$

其中
$$Q'=\frac{1}{3}\sum\left(\tan\frac{B}{2}\sin C-\tan\frac{C}{2}\sin B\right)^2\geqslant0$$

证明 设 $x,y,z\in p$,有三角母不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C \quad ①$$

设关于 x 的函数为

$$f(x)=x^2-2(y\cos C+z\cos B)x+(y^2+z^2-2yz\cos A)$$

求导得

$$f'(x)=2x-2(y\cos C+z\cos B)$$

$$f''(x)=2>0$$

因此函数 $f(x)$ 有最小值,解方程求驻点

$$f'(x)=0\Rightarrow x_0=y\cos C+z\cos B\Rightarrow f(x)_{\min}=f(x_0)=$$
$$(y\cos C+z\cos B)^2-2(y\cos C+z\cos B)^2+$$
$$[y^2+z^2+2yz\cos(B+C)]=$$
$$-(y^2\cos^2 C+2yz\cos C+z^2\cos^2 B)+$$
$$y^2+z^2+2yz(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=$$
$$(1-\cos^2 C)y^2+(1-\cos^2 B)z^2-2yz\sin B\sin C=$$
$$y^2\sin^2 C-2yz\sin B\sin C+z^2\sin^2 B=(y\sin C-z\sin B)^2\Rightarrow$$
$$f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(x_0)=(y\sin C-z\sin B)^2\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} p=\sum x^2-2\sum yz\cos A\geqslant(y\sin C-z\sin B)^2\Rightarrow \\ P\geqslant(y\sin C-z\sin B)^2 \\ \text{同理}\begin{cases} p\geqslant(z\sin A-x\sin C)^2 \\ p\geqslant(x\sin B-y\sin A)^2\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$p(x,y,z)=p\geqslant Q'=\frac{1}{3}\sum(y\sin C-z\sin B)^2\Rightarrow$$
$$p(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2})\geqslant Q'=$$
$$\frac{1}{3}\sum(\tan\frac{B}{2}\sin C-\tan\frac{C}{2}\sin B)^2\Rightarrow$$
$$\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2+Q'$$

(应用(B)式的证法3)

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

5 完 善

在本节,我们建立(B)式的几个双向完善式.

首先,在20世纪80年代,我国的简超老师建立了漂亮的完善式:

完善1(简超) 在 $\triangle ABC$ 中,记

$$\begin{cases} T=\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}-1\geqslant 0 \\ S=1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant 0\end{cases}$$

若
$$\begin{cases} M = \max\left\{\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}\right\} \\ m = \min\left\{\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}\right\} \end{cases}$$

则

$$M^2 \cdot T \geqslant S \geqslant m^2 \cdot T \tag{B$_1$}$$

显然，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时

$$m \geqslant \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow S \geqslant m^2 T \geqslant \frac{1}{2} T \Rightarrow$$

$$1 - 8\prod \sin\frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum \tan^2\frac{A}{2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\sum \tan^2\frac{A}{2} \leqslant 3 - 16\prod \sin\frac{A}{2}$$

因此，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，(B) 式可以完善成

$$3 - 16\prod \sin\frac{A}{2} \geqslant \sum \tan^2\frac{A}{2} \geqslant 2 - 8\prod \sin\frac{A}{2} \tag{B$_2$}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

不言而喻，(B_2) 式是一个十分漂亮的完善式，(B) 式的第三个完善式是

完善 3　对于锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\frac{1}{8}\prod \sec A \geqslant \sum \tan^2\frac{A}{2} \geqslant 2 - 8\prod \sin\frac{A}{2} \tag{B$_3$}$$

证明　我们先证明更广泛的结论：对于任意 $\triangle ABC$，有

$$\left(\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)\prod \cos A \leqslant \frac{1}{8} \tag{①}$$

显然，当 $\frac{\pi}{2} \leqslant \max(A,B,C) < \pi \Leftrightarrow \prod \cos A \leqslant 0$ 时，① 式左边 $\leqslant 0 < \frac{1}{8}$ 成立.

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，注意到

$$\cos 2\theta = (1 - \tan^2\theta)\cos^2\theta$$

运用平均值不等式有

$$\begin{aligned} \prod\left(1 - \tan^2\frac{A}{2}\right) &\leqslant \left[\frac{1}{3}\sum\left(1 - \tan^2\frac{A}{2}\right)\right]^3 = \\ &\left(1 - \frac{1}{3}\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)^3 \Rightarrow \left(\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)\prod \cos A = \\ &\left(\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)\prod\left(1 - \tan^2\frac{A}{2}\right)\prod \cos^2\frac{A}{2} \leqslant \\ &\left(\frac{3}{2}\prod \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)^3 \leqslant \\ &\left(\frac{3}{2}\prod \cos^2\frac{A}{2}\right)\left[\frac{\frac{2}{3}\sum \tan^2\frac{A}{2} + 3\left(1 - \frac{1}{3}\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)}{4}\right]^4 = \\ &\frac{3}{2}\left(\prod \cos\frac{A}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\sum \tan^2\frac{A}{2}\right)^4 \leqslant \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)^4=\frac{1}{8}$$

即①式的成立,从而(B_3)成立.

另证 注意到

$$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow(1-\cos\theta)\cos\theta\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)\prod\cos A=\left(\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\right)\prod\cos A=$$

$$\frac{\cos B\cos C}{1+\cos A}(1-\cos A)\cos A\leqslant$$

$$\frac{\cos B\cos C}{4(1+\cos A)}\leqslant\frac{\cos B\cos C}{4[\cos(B-C)-\cos(B+C)]}=$$

$$\frac{\cos B\cos C}{8\sin B\sin C}=\frac{1}{8}\cot B\cot C\Rightarrow$$

$$\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}\right)\prod\cos A=\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\prod\cos A\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\sum\cot B\cot C=\frac{1}{8}$$

即①式成立,从而(B_3)式成立,等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形.

我们知道,应用恒等式

$$8\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{2r}{R},\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

可将(B)式"化妆"为等价的

$$\begin{cases}\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-\frac{2r}{R}\\ 2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow \tag{②}$$

$$\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 4-\frac{2r}{R}\Leftrightarrow$$

$$\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant\sqrt{4-\frac{2r}{R}} \tag{③}$$

(B)式的第四个完善式是.

完善4 设$\triangle ABC$的外接圆半径、内切圆半径、面积依次为R,r,Δ,则有

$$\left(\frac{9Rr}{4\Delta^2}\right)^2-2\geqslant\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-\frac{2r}{R} \tag{B_4}$$

证明 设$x,y,z>0$,并令

$$\begin{cases}(a,b,c)=(y+z,z+x,x+y)\\ \Delta=\frac{1}{2}(a+b+c)r=abc/4R\end{cases}\Rightarrow Rr=\frac{abc}{2(a+b+c)}=\frac{\prod(y+z)}{4\sum x} \tag{④}$$

$$\Delta=\sqrt{xyz(x+y+z)} \tag{⑤}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4\Delta} \tag{⑥}$$

等等.我们先证

$$\sum \tan\frac{A}{2} \leqslant qRr/(4\Delta^2) \Leftrightarrow$$

$$4\sum yz \leqslant \frac{9}{2}\prod(y+z)/(\sum x) \Leftrightarrow \tag{7}$$

$$8(\sum yz)\sum x \leqslant 9\prod(y+z) \Leftrightarrow \sum x(y^2+z^2) \geqslant 6xyz \Leftrightarrow$$

$$\sum x(y-z)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sum \tan\frac{A}{2})^2 \leqslant \left(\frac{9Rr}{4\Delta^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sum \tan^2\frac{A}{2} + 2 \leqslant \left(\frac{9Rr}{4\Delta^2}\right)^2 \Rightarrow \sum \tan^2\frac{A}{2} \leqslant \left(\frac{9Rr}{4\Delta^2}\right)^2 - 2$$

等号成立仅当 $x = y = z \Rightarrow a = b = c$.

(B) 式的第五个完善式结构更紧凑,外观更精致:

完善 5　对任意 $\triangle ABC$,有

$$\left(\frac{R}{2r}\right)^2 \geqslant \sum \tan^2\frac{A}{2} \geqslant 2 - \frac{2r}{R} \tag{B_5}$$

证明　由三角恒等式知

$$\sum \tan^2\frac{A}{2} = [(4R+r)^2 - 2s^2]/s^2$$

(B_5) 式左边等价于

$$\left(\frac{R}{2r}\right)^2 s^2 \geqslant (4R+r)^2 - 2s^2 \tag{8}$$

(其中 s 为半周长)$\Leftrightarrow 4r^2[(4R+r)^2 - 2s^2] \leqslant s^2R^2 \Leftrightarrow$

$$s^2(R^2 + 8r^2) \geqslant 4r^2(4R+r)^2 \tag{9}$$

由 Gerretsen 不等式

$$s^2 \geqslant 16Rr - 5r^2 \tag{10}$$

知,欲证 ⑨ 式,只须证

$$(16Rr - 5r^2)(R^2 + 8r^2) \geqslant 4r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$(16R - 5r)(R^2 + 8r^2) \geqslant 4r(4R+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$16R^3 - 69R^2r + 96Rr^2 - 44r^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(R - 2r)(16R^2 - 37Rr + 22r^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(R - 2r)^2(16R - 5r) + 12r^2(R - 2r) \geqslant 0$$

等号成立仅当 $R = 2r$.

逆推之,(B_5) 式成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(B) 式的第六个完善式为:

完善 6　对任意 $\triangle ABC$ 有

$$(\frac{9}{4})^2(\sum \sin B\sin C)^{-1} \geqslant \sum \tan^2\frac{A}{2} \geqslant 2 - 8\prod \sin\frac{A}{2} \tag{B_6}$$

证明　应用恒等式

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1}{s^2}[(4R+r)^2-2s^2]$$

$$\sum\sin B\sin C=\left(\frac{s^2+4Rr+r^2}{4R^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$(\sum\tan^2\frac{A}{2})(\sum\sin B\sin C)\leqslant(\frac{9}{4})^2\Leftrightarrow$$

$$[(4R+r)^2-2s^2](s^2+4Rr+r^2)^2\leqslant(9sR^2)^2\Leftrightarrow$$

$$H(s^2)\geqslant 2s^6-(16R^2-8Rr-3r^2)s^4+$$

$$[81R^4-8Rr(4R+r)^2]s^2-r^2(4R+r)^4\geqslant 0 \tag{⑪}$$

由于

$$H(s^2)-(2s^2+63r^2)(s^2-4R^2+2Rr-15r^2)^2=$$

$$s^2(49R^4-96R^3r+192R^2r^2-140Rr^2+1\,440r^4)-$$

$$4r^2(316R^4-188R^3r+1\,977R^2r^2-941Rr^3+3\,544r^2)=G(s^2)$$

再由 Gerretsen 不等式推出

$$H(s^2)\geqslant G(s^2)\geqslant G(16Rr-5r^2)=$$

$$r(R-2r)^2(784R^3+91R^2r+1\,532Rr^2-5\,344r^3)\geqslant 0$$

等号成立仅当 $R=2r$，即 (B_6) 式成立，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

由此可见，(B_6) 式的证明具有相当难度，富有挑战性和趣味性. 此外，由 A · Bager 不等式链

$$8\prod\cos A\leqslant\frac{4}{9}\sum\sin 2B\sin 2C\leqslant\frac{4}{27}(\sum\sin 2A)^2=\frac{64}{27}(\prod\sin A)^2\leqslant$$

$$64(\prod\sin\frac{A}{2})^2\leqslant\frac{16}{81}(\sum\sin B\sin C)^2 \tag{⑫}$$

知 (B_6) 式比 (B_3) 式要强得多，且比 (B_3) 式的再加强

$$(\sum\tan^2\frac{A}{2})(\sum\cos B\cos C)\leqslant\frac{3}{4} \tag{⑬}$$

也要强.

6　指数推广

如果我们应用幂平均不等式，就能易如反掌地将不等式(A)从指数方面推广成：

推广 6　设指数 $k\geqslant 1$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^{2k}+\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^{2k}+\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k} \tag{G}$$

但(A)式的一个等价形式 Garfunkel - Bankoff 不等式(B)(缩写)，即

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^2\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2} \tag{B}$$

也有指数推广吗？如果有，建立时难度大吗？

现在，我们首先想到用途广泛的三角母不等式

$$\sum x^2 \geqslant 2\sum yz\cos A =$$

$$2\sum yz\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)= \quad ①$$

$$2\sum yz-4\sum yz\sin^2\frac{A}{2} \quad ②$$

令

$$(x,y,z)=\left(\tan^k\frac{A}{2},\tan^k\frac{B}{2},\tan^k\frac{C}{2}\right)(\text{其中 } k\geqslant 1)\Rightarrow$$

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant P-Q \quad ③$$

其中

$$P=2\sum\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^k\geqslant 6\left(\frac{\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{3}\right)^k=\frac{6}{3^k}=\frac{2}{3^{k-1}}$$

$$Q=4\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^k\frac{\sum\left[\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{2-k}\left(\cos\frac{A}{2}\right)^k\right]}{\left(\prod\cos\frac{A}{2}\right)^k}$$

可见,表达式 Q 不仅臃肿庞大,而且是挡道之山.只要我们绕过这“山重水复”之地,必到“柳暗花明”之乡.

推广 7 设指数 $k\geqslant\frac{3}{2}$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}\left(2-8\prod\sin\frac{A}{2}\right) \quad (\mathrm{H})$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证明 记 $t=8\prod\sin\frac{A}{2}$,注意到 $k\geqslant\frac{3}{2}\Rightarrow 2(k-1)\geqslant 1$,设

$$(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)\Rightarrow\sum yz=yz+zx+xy=1$$

由对称性,不妨设

$$x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\begin{cases}x^2\geqslant y^2\geqslant z^2\\ x^{2(k-1)}\geqslant y^{2(k-1)}\geqslant z^{2(k-1)}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{3}\sum x^{2k}=\frac{1}{3}\sum\left(x^2\cdot x^{2(k-1)}\right)\geqslant$$

$$(\text{应用切比雪夫不等式})\left(\frac{\sum x^2}{3}\right)\left(\frac{\sum x^{2(k-1)}}{3}\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{2(k-1)}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)\left(\frac{\sum yz}{3}\right)^{k-1}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\geqslant(\text{应用(B)式})\frac{1}{3}(2-t)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\Rightarrow$$

$$\sum x^{2k}\geqslant 3^{1-k}(2-t)$$

即(H)式得证.等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

观察(H)式知,当 $k=1$ 时,化为(B)式,因此当 $k\geqslant 1$ 时(H)也是成立的.

下面是(B)式的第二个指数推广：

推广 8　如果 $k \leqslant 1$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k} \geqslant 3^{1-k}\left(1+k-8k\prod\sin\frac{A}{2}\right) \tag{I}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证明　记 $m=1-8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 0$，于是

$$\left.\begin{matrix} m\geqslant 0 \\ k\geqslant 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow (1+m)^k\geqslant 1+km\Rightarrow \frac{1}{3}\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant\left(\frac{\sum\tan^2\frac{A}{2}}{3}\right)^k\geqslant$$

$$\left(\frac{2-8\prod\sin\frac{A}{2}}{3}\right)^k=\left(\frac{1+m}{3}\right)^k\geqslant$$

$$\frac{1+km}{3^k}=\frac{1+k\left(1-8\prod\sin\frac{A}{2}\right)}{3^k}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}\left[(1+k)-8k\prod\sin\frac{A}{2}\right]$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(B)式的第三个指数推广是：

推广 9　设指数 $k\geqslant 1$，对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 2\times 3^{1-k}-3\left(\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2}\right)^k \tag{J}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证明　我们记 $t=\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2}$.

$$P'(k)=\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}+3t^k(\text{应用幂平均不等式})\geqslant$$

$$6\left(\frac{\sum\tan^2\frac{A}{2}+3t}{6}\right)^k=$$

$$6\left[\frac{1}{6}\left(\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\prod\sin\frac{A}{2}\right)\right]^k(\text{应用(B)式})\geqslant$$

$$6\left(\frac{2}{6}\right)^k\Rightarrow P'(k)\geqslant 2\times 3^{1-k}$$

这即为(J)式，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

令人欣喜的是，(B)式还有第四个指数推广，而且这个推广最美妙优雅，令人偏爱：

推广 10　设 $k\geqslant 1$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}-8\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^k \tag{K}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

显然，当 $k=1$ 时，(K)式化为(B)式. 纵观(H)、(I)、(J)、(K)四个指数推广，它们各

具特色,各有秋千,恰如"四季花开",且(K)式最自然,最可爱,最令人满意.

证明 简记 $t=\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{8}$, $s=3+8\left(\frac{3}{8}\right)^k$,(B)式化为

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8t$$

$$P(k)=\sum(\tan^2\frac{A}{2})^k+8t^k=\sum(\tan^2\frac{A}{2})^k+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)^k\Rightarrow$$

$$\frac{P(k)}{s}=\frac{1}{s}\left[\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)^k+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)^k\right](\text{应用加权幂平均不等式})\geqslant$$

$$\left\{\frac{1}{s}\left[\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)\right]\right\}^k(\text{应用(B)式})\geqslant$$

$$\left\{\frac{1}{s}\left[(2-8t)+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)\right]\right\}^k=$$

$$\left\{\frac{2-8\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]t}{s}\right\}^k\geqslant$$

$$\left\{\frac{2-\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]}{s}\right\}^k=\left[\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}}{s}\right]^k\Rightarrow$$

$$P(k)\geqslant\frac{[1+(\frac{3}{8})^{k-1}]^k}{s^{k-1}}=\frac{[1+(\frac{3}{8})^{k-1}]^k}{[3+8(\frac{3}{8})^k]^{k-1}}=3^{1-k}+8^{1-k}\Rightarrow$$

$$P(k)\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}\Rightarrow$$

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^{2k}\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}-8(\prod\sin\frac{A}{2})^k$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

7 加权推广

为了建立不等式

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}\qquad\text{(B)}$$

首先想到:

引理1 设 p,q,r,x,y,z 均为正数,则

$$(q+r)x+(r+p)y+(p+q)z\geqslant 2[(qr+rp+pq)(yz+zx+xy)]^{\frac{1}{2}}\qquad①$$

等号成立仅当

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}\qquad②$$

令 $(x,y,z)=(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2})$ 并联想到三角恒等式

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1 \quad ③$$

立刻得到漂亮的

$$(q+r)\tan\frac{A}{2}+(r+p)\tan\frac{B}{2}+(p+q)\tan\frac{C}{2}\geqslant 2\sqrt{(qr+rp+pq)} \quad (\mathrm{L})$$

(等号成立仅当 $p\cot\frac{A}{2}=q\cot\frac{B}{2}=r\cot\frac{C}{2}$ ④)

这是半角正切和不等式

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3} \quad ⑤$$

的美妙的加权推广.

现在,我们记 $t=\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{3}$,并令

$$(x,y,z)=(\tan^2\frac{A}{2}+t,\tan^2\frac{B}{2}+t,\tan^2\frac{C}{2}+t)$$

记
$$M=\sum(t+\tan^2\frac{B}{2})(t+\tan^2\frac{C}{2})$$

则①式化为

$$\sum(q+r)(t+\tan^2\frac{A}{2})\geqslant 2\sqrt{(qr+rp+pq)M} \quad ⑥$$

若令 $p+q+r=3$,又化为

$$\sum(q+r)\tan^2\frac{A}{2}+16\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2\sqrt{(qr+rp+pq)M} \quad ⑦$$

如果我们能设法证明

$$M\geqslant\frac{4}{3} \quad (?)$$

那么我们就能建立推广式

$$\sum(q+r)\tan^2\frac{A}{2}+16\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant\frac{4}{3}\sqrt{3(qr+rp+pq)} \quad (?)'$$

但是,不等式 $M\geqslant\frac{4}{3}$ 成立与否,目前我们还不得而知.

其次,我们又联想到三角母不等式

$$\sum x^2\geqslant 2\sum yz\cos A \quad ⑧$$

再令 $(x^2,y^2,z^2)=(\lambda\tan^2\frac{A}{2},\mu\tan^2\frac{B}{2},v\tan^2\frac{C}{2})$ 可得

$$\sum\lambda\tan^2\frac{A}{2}+8m\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2+Q \quad ⑨$$

其中
$$\begin{cases}m=(\sum\sqrt{\mu v}\sin A)/(\sum\sin A)\\ Q=\sum(\sqrt{\mu v}-1)\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\end{cases} \quad ⑩$$

显然取特殊值 $\lambda=\mu=v=1$ 时,$m=1,Q=0$.⑨式退化为(B)式,但 m,Q 的表

达式太臃肿庞大，好像生了"肿瘤"，令人生畏.

再次，如果我们玩个"小聪明"，设正系数$\{\lambda,\mu,v\}$与$\{A,B,C\}$大小同序，则$\{\lambda,\mu,v\}$与$\{\tan^2\frac{A}{2},\tan^2\frac{B}{2},\tan^2\frac{C}{2}\}$也同序，应用切比雪夫不等式，固然有（并令$\lambda+\mu+v=3$）

$$\sum\lambda\tan^2\frac{A}{2}\geqslant\frac{1}{3}(\sum\lambda)\sum\tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\lambda\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2} \tag{11}$$

这一结论简洁，却有投机取巧之嫌，令人不尽满意.

漫话至此，难道我们就不能建立(B)式的加权推广吗？其实，春到人间花自开，文章本天成，妙手偶得之.

推广 11 设$k>1,\lambda,\mu,v>0$，则对任意$\triangle ABC$有

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}\geqslant S^{1-k}[1+k(1-8\prod\sin\frac{A}{2})] \tag{O}$$

其中

$$\theta=-(\frac{1}{k-1}),S=\lambda^\theta+\mu^\theta+v^\theta$$

证明 记$t=8\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant 1,m=1-t\geqslant 0$，并注意到$\frac{1}{k}+\theta(\frac{k-1}{k})=0$.应用赫尔德不等式有

$$[\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}]^{\frac{1}{k}}(\sum\lambda^\theta)^{\frac{k-1}{k}}\geqslant\sum(\tan\frac{A}{2})^2\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}=1+m\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}\geqslant\frac{(1+m)^k}{S^{k-1}}\geqslant\frac{1+km}{S^{k-1}}$$

等号成立仅当$\lambda=\mu=v$且$\triangle ABC$为正三角形.

(B)式的第二加权推广是：

推广 12 设$k>1,\lambda,\mu,v\in(0,3)$，且$\lambda+\mu+v=3$，则在$\triangle ABC$中有

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}\geqslant 2S^{1-k}-3(\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2})^k \tag{P}$$

其中

$$\theta=-1/(k-1),S=\lambda^\theta+\mu^\theta+v^\theta$$

证明 记$t=\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2}$，就用赫尔特不等式有

$$[\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}+\sum\lambda t^k]^{\frac{1}{k}}(\sum\lambda^\theta+\sum\lambda^\theta)^{\frac{k-1}{k}}\geqslant$$

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^2+t+t+t=$$

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^2+8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}+(\sum\lambda)t^k\geqslant 2^k(2S)^{1-k}\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}\geqslant 2S^{1-k}-3(\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2})^k$$

等号成立仅当$\lambda=\mu=v=1$，且$\triangle ABC$为正三角形.

上面两个推广式(O)式和(P)式中，各 $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}$ 的指数 $2k>2$，而在(0,2]这范围内却是空白，使得(B)式的等价形式

$$\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant\sqrt{4-8\prod\sin\frac{A}{2}}\tag{B'}$$

没有沾上一点“光”而未得到一点推广，并且(B)式自身的加权推广也未见到. 为了弥补这一不足，填充这一空白，现建立

推广 13 设 $k>1,\lambda,\mu,v>0$，则对 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^k\geqslant S^{1-k}[\sqrt{3}(2-8\prod\sin\frac{A}{2})^{\frac{1}{6}}]^k\tag{Q}$$

其中

$$S=\lambda^\theta+\mu^\theta+v^\theta,\theta=-(\frac{1}{k-1})$$

显然，当取 $k=2$ 时，有

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^2\geqslant 3(2-8\prod\sin\frac{A}{2})^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{v})^{-1}\tag{R}$$

再取 $\lambda=\mu=v=1$ 时，由于

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^2\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant(2-8\prod\sin\frac{A}{2})^{\frac{1}{3}}\geqslant 1$$

(R)式这时也成立.

证明 记

$$t=\prod\sin\frac{A}{2}\Rightarrow 2-8t\geqslant 1$$

$$[\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^k]^{\frac{1}{k}}(\sum\lambda^\theta)^{\frac{k-1}{k}}\geqslant\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant(4-8\prod\sin\frac{A}{2})^{\frac{1}{2}}=$$

$$(4-8t)^{\frac{1}{2}}=[1+1+(2-8t)]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$[3\sqrt[3]{1\times1\times(2-8t)}]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}(2-8t)^{\frac{1}{6}}\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^k\geqslant S^{1-k}[\sqrt{3}(2-8\prod\sin\frac{A}{2})^{\frac{1}{6}}]^k$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 $\lambda=\mu=v$.

推广 14 设 $k>1,\theta=\frac{1}{1-k}<0,\lambda,\mu,v>0,S=\lambda^\theta+\mu^\theta+v^\theta$(注意到 $\frac{1}{k}+\theta(\frac{k-1}{k})=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=0$)，则有

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}+8(\prod\sin\frac{A}{2})^k\geqslant 2^k(S+8)^{1-k}\tag{S}$$

证明 应用赫尔特不等式有

$$[P_\lambda^{(k)}]^{\frac{1}{k}}\cdot(S+8)^{\frac{k-1}{k}}=[\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}+8(\prod\sin\frac{A}{2})^k]^{\frac{1}{k}}\cdot(\lambda^\theta+\mu^\theta+v^\theta+8)^{\frac{k-1}{k}}\geqslant$$

$$\sum(\tan\frac{A}{2})^2+8(\prod\sin\frac{A}{2})\geqslant 2\Rightarrow\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}+$$

$$8(\prod \sin\frac{A}{2})^k \geqslant 2^k(S+8)^{1-k}$$

等号成立仅当

$$A = B = C = 60°$$

$$\frac{\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2k}}{\lambda^{\theta}} = \frac{\mu(\tan\frac{B}{2})^{2k}}{\mu^{\theta}} = \frac{v(\tan\frac{C}{2})^{2k}}{v^{\theta}} = \frac{8(\prod\sin\frac{A}{2})^k}{8^{\theta}} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda^{1-\theta}}{3^k} = \frac{\mu^{1-\theta}}{3^k} = \frac{v^{1-\theta}}{3^k} = \frac{8^{1-\theta}}{8^k} \Rightarrow$$

$$\lambda = \mu = v = 8(\frac{3}{8})^{\frac{k}{1-\theta}} = 8(\frac{3}{8})^{k-1}$$

下面我们将(B)式在指数上进行双重推广：

推广 15 设 $k \geqslant 1, m > 1, \theta = \frac{1}{1-m} < 0, \lambda, \mu, v > 0$，记 $S = \lambda^{\theta} + \mu^{\theta} + v^{\theta}$，则对任意 $\triangle ABC$，有

$$\sum \lambda(\tan\frac{A}{2})^{2km} \geqslant Q^m S^{1-m} \tag{T}$$

其中

$$Q = 3^{1-k} + 8^{1-k} - 8(\prod\sin\frac{A}{2})^k$$

略证 由于

$$[\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2km}]^{\frac{1}{m}}(\sum\lambda^{\theta})^{\frac{m-1}{m}} \geqslant \sum(\tan\frac{A}{2})^{2k} \geqslant$$

$$Q = 3^{1-k} + 8^{1-k} - 8(\prod\sin\frac{A}{2})^k \Rightarrow$$

$$\sum\lambda(\tan\frac{A}{2})^{2km} \geqslant Q^m S^{1-m}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\lambda = \mu = v$.

在前面，我们建立了(B)式的五个“指数 - 加权”推广，现在我们建立(A)式的两个推广：

推广 16 设 $k > 1, \theta = \frac{1}{1-k} < 0, S = \lambda^{\theta} + \mu^{\theta} + v^{\theta} = \sum\lambda^{\theta}$，则对锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\lambda\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^{2k} + \mu\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^{2k} + v\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^{2k} \geqslant (\lambda^{\theta} + \mu^{\theta} + v^{\theta})^{1-k} \tag{U}$$

证明 应用赫尔特不等式有

$$\left[\sum\lambda\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^{2k}\right]^{\frac{1}{k}}(\sum\lambda^{\theta})^{\frac{k-1}{k}} \geqslant \sum\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\sum\lambda\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^{2k} \geqslant (\sum\lambda^{\theta})^{1-k}$$

下面，我们从指数、系数、参数三个方面推广(B)式，使(B)式“红运春风，连升三级”.

推广 17 设 λ,μ,v,x,y,z 均为正数，p,q 为非负数，$\alpha\geqslant 1+\beta>0$，对锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\frac{(p+\lambda\cos^2 A)^\alpha}{(q+x\cos A)^\beta}\geqslant\frac{3^{1-\alpha+\beta}(3p+m)^\alpha}{(3q+n)^\beta}\tag{V}$$

其中

$$\begin{cases}m=\dfrac{1}{4}\left(2\sum\lambda-\sum\dfrac{\mu v}{\lambda}\right)\\ n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\right)\end{cases}$$

略证 记 $Q=\alpha/(1+\beta)\geqslant 1$，记

$$T_\lambda(\alpha)=\sum\frac{(p+\lambda\cos^2 A)^\alpha}{(q+x\cos A)^\beta}=$$

$$\sum\frac{[(p+\lambda\cos^2 A)^\theta]^{1+\beta}}{(q+x\cos A)^\beta}\text{（应用权方和不等式）}\geqslant$$

$$\frac{[\sum(p+\lambda\cos^2 A)^\theta]^{1+\beta}}{[\sum(q+x\cos A)]^\beta}\geqslant\frac{\{3^{1-\theta}[\sum(p+\lambda\cos^2 A)]^\theta\}^{1+\beta}}{[\sum(q+x\cos A)]^\beta}=$$

$$\frac{3^{(1-\alpha+\beta)}(3p+\sum\lambda\cos^2 A)^\alpha}{(3q+\sum x\cos A)^\beta}\geqslant\frac{3^{(1-\alpha+\beta)}(3p+m)^\alpha}{(3q+n)^\beta}$$

域外高手

8 “闪光项链”

我们知道，不等式(A)是以余弦为基本元素组建的三角不等式，(B)式则是以正切、正弦为基本元素．现在，我们建立几条漂亮的三角不等式链：

结论 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中，有

$$\sum\tan A\geqslant 3\sum\cot A\tag{a}$$

证明 由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\sin 2A,\sin 2B,\sin 2C$ 均为正数，应用一系列相关三角公式和平均值不等式有

$$\begin{cases}\sum\sin 2A\geqslant 3(\prod\sin 2A)^{1/3}\\ \sum\sin 2A=4\prod\sin A\\ \prod\sin 2A=8(\prod\sin A)(\prod\cos A)\end{cases}\Rightarrow\prod\sin^2 A\geqslant\frac{27}{8}\prod\cos A\tag{①}$$

又

$$\begin{cases}\sum\cot A=\dfrac{1+\prod\cos A}{\prod\sin A}\\ \sum\tan A=\prod\tan A=\dfrac{\prod\sin A}{\prod\cos A}\end{cases}$$

（利用①式）$\Rightarrow$

$$\frac{\sum\cot A}{\sum\tan A}\leqslant\frac{8}{27}(1+\prod\cos A)\leqslant\frac{8}{27}\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\sum \tan A \geqslant 3\sum \cot A$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

与(a)式相关的第二个结论是

结论 2 对任意 $\triangle ABC$ 有

$$3\sum \cot A \geqslant \sum \cot \frac{A}{2} \tag{b}$$

证明 由恒等式

$$\begin{cases} \sum \cot A = (1+\prod \cos A)/(\prod \sin A) \\ \sum \cot \frac{A}{2} = \prod \cot \frac{A}{2} = (\prod \cos \frac{A}{2})/(\prod \sin \frac{A}{2}) \end{cases} \Rightarrow$$

(b)式等价于

$$\frac{3(1+\prod \cos A)}{\prod \sin A} \geqslant \frac{\prod \cos \frac{A}{2}}{\prod \sin \frac{A}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &3(1+\prod \cos A) \geqslant 8\prod (\cos \frac{A}{2})^2 \\ &\sum \sin^2 A = 2+2\prod \cos A \\ &\sum \sin A = 4\prod \cos \frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$3\sum \sin^2 A \geqslant (\sum \sin A)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum (\sin A - \sin B)^2 \geqslant 0$$

故(b)式成立,等号成立仅当

$$\sum (\sin A - \sin B)^2 = 0 \Rightarrow \sin A = \sin B = \sin C$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

结论 3 对任意 $\triangle ABC$,有

$$\sum \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sum \tan \frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \tag{c}$$

证明 对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} > 0, \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} > 0, \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} > 0 \\ \sum (\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) = \pi \end{cases}$$

(应用(A)式)$\Rightarrow$

$$\sum \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) \geqslant 3\sum \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) \Rightarrow$$

$$\sum \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sum \tan \frac{A}{2} \geqslant$$

$$3(3\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2})^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}$$

即(c)式成立.等号成立仅当△ABC为正三角形.

根据不等式的递推性,我们可将(a),(b),(c)三式串联成一条"闪光的项链",即

$$\sum\tan A\geqslant 3\sum\cot A\geqslant\sum\cot\frac{A}{2}\geqslant 3\sum\tan\frac{A}{2}\geqslant 3\sqrt{3}\qquad(\mathrm{U}_1)$$

现在我们建立新的造形式的"项链":

结论4 在锐角△ABC中,有

$$\sum\tan A\tan B\geqslant\sum\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\qquad(\mathrm{d})$$

证明

$$\sum\tan A\tan B=\frac{\sum\sin A\sin B\cos C}{\prod\cos A}=\frac{\sum(1-\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C)}{4\prod\cos A}=$$

$$\frac{3-\sum\cos 2A}{4\prod\cos A}=\frac{3+(1+4\prod\cos A)}{4\prod\cos A}=1+\frac{1}{\prod\cos A}\qquad ②$$

在上式中作置换得

$$(A,B,C)\to(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\Rightarrow$$

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}=1+\frac{1}{\prod\sin\frac{A}{2}}\qquad ③$$

又利用恒等式有

$$\sum\tan A=\prod\tan A\Rightarrow\prod\tan A\geqslant 3(\prod\tan A)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$\prod\tan A\geqslant 3\sqrt{3}\Rightarrow\prod\sin A\geqslant 3\sqrt{3}\prod\cos A\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}8(\prod\sin\frac{A}{2})(\prod\cos\frac{A}{2})\geqslant 3\sqrt{3}\prod\cos A\\ \prod\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant\prod\cos A(\text{代入②式})\Rightarrow$$

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\leqslant 1+\frac{1}{\prod\cos A}=\sum\tan A\tan B$$

等号成立仅当△ABC为正三角形.

利用三角恒等式,我们有

$$1=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant 3(\prod\tan\frac{A}{2})^{2/3}\Rightarrow\prod\cot\frac{A}{2}\geqslant 3\sqrt{3}\qquad ④$$

同时,应用柯西不等式有

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}=(\sum\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2})(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2})\geqslant 3^2=9\qquad ⑤$$

这样，我们又建立了一个新的不等式

$$\sum \tan A\tan B \geqslant \sum \cot \frac{A}{2}\cot \frac{B}{2} \geqslant 9\sum \cot A\cot B = 9\sum \tan \frac{A}{2}\tan \frac{B}{2} = 9 \quad (U_2)$$

类似地，还有

$$\prod \tan A \geqslant \prod \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \geqslant 27\prod \tan \frac{A}{2} \quad (U_3)$$

结论 5　在锐角 $\triangle ABC$ 中，有

$$\sum \sec A\sec B \geqslant 3\sum \csc A\csc B \quad (U_4)$$

证明　我们不妨假定

$$\frac{\pi}{2} > A \geqslant B \geqslant C > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}0 < \cos A \leqslant \cos B \leqslant \cos C \\ \cot B\cot C \geqslant \cot C\cot A \geqslant \cot A\cot C > 0\end{cases}$$

(应用切比雪夫不等式)$\Rightarrow$

$$\sum \cos A\cot B\cot C \leqslant \frac{1}{3}(\sum \cos A)\sum \cot B\cot C = \frac{1}{3}\sum \cos A \Rightarrow$$

$$(\prod \cos A)\sum \csc A\csc B \leqslant \frac{1}{3}\sum \cos A \Rightarrow$$

$$3\sum \csc A\csc B \leqslant (\sum \cos A)/(\prod \cos A) = \sum \sec A\sec B$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

如果我们在(U_4)式中作置换

$$(A,B,C) \to (\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}) \Rightarrow$$

$$\sum \csc \frac{A}{2}\csc \frac{B}{2} \geqslant 3\sum \sec \frac{A}{2}\sec \frac{B}{2} \quad (U_5)$$

其实，早在 1971 年，A · Bager 已经证明了比上式更细的美妙结论

$$\sum \csc \frac{A}{2}\csc \frac{B}{2} \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}\prod \cot \frac{A}{2} \geqslant \begin{Bmatrix}2\sum \csc \frac{A}{2} \\ 2\sqrt{3}\sum \csc A\end{Bmatrix} \geqslant \frac{9}{2}\sqrt{3}\prod \sec \frac{A}{2} \geqslant$$

$$3\sum \sec \frac{A}{2}\sec \frac{B}{2} \quad (U_6)$$

在上式中作置换有($\triangle ABC$ 为锐角三角形)

$$(A,B,C) \to (\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C) \Rightarrow \sum \sec A\sec B \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}\prod \tan A \geqslant$$

$$\begin{Bmatrix}2\sum \sec A \\ 2\sqrt{3}\sum \csc 2A\end{Bmatrix} \geqslant \frac{9}{2}\sqrt{3}\prod \csc A \geqslant$$

$$3\sum \csc A\csc B \quad (U_7)$$

(U_5) 式化为

$$\sum \sec 2A \sec 2B \geqslant 3\sum \csc 2A \csc 2B \tag{U_8}$$

以上各式等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

9 发展进化

有人说,数学是万花筒,它变幻多端,五彩缤纷,引人入胜.请回顾(A) 式(以下各式均缩写):并作正确变换

$$\sum \frac{\cos^2 A}{1+\cos A} \geqslant \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{(配对)}} \sum \frac{1+\cos A}{\cos^2 A} \geqslant 18 \xrightarrow{\text{(加强)}} \tag{B}$$

$$\sum \frac{1+\cos A}{\cos A} \geqslant 9 \xrightarrow{\text{(再加强)}}$$

$$\prod \left(\frac{1+\cos A}{\cos A}\right) = \prod (\sec A + 1) \geqslant 3^3 \xrightarrow{\text{(推广)}}$$

$$\prod (\sec^k A + 1) \geqslant (2^k+1)^3, k \in \mathbf{N} \tag{P_1}$$

以上到(P_1) 式的变化,恰似生物的达尔文进化过程.

(P_1) 式是一个结构简洁匀称的三角不等式,我们将"得寸进尺",先建立它的推广:

推广 18 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $k \in \mathbf{N}, \theta \in [0,\frac{\pi}{2})$,使 $\theta + A, \theta + B, \theta + C$ 均为锐角,$\lambda, \mu, v > 0, \alpha, \beta, \gamma \in (0,3)$,满足 $\alpha + \beta + \gamma = 3$,则有

$$\prod [\sec^k(\theta + A) + \lambda]^{\alpha} \geqslant \{[p\sec(\theta + \frac{\pi}{3})]^k + q\}^3 \tag{P_2}$$

其中

$$p = \frac{1}{\sqrt[3]{m}} = (\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})^{-\frac{1}{3}}$$

$$q = (\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}v^{\gamma})^{\frac{1}{3}}$$

略证 我们简记

$$T(\alpha) = \prod [\sec^k(\theta + A) + \lambda]^{\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha,\beta,\gamma) = (3\alpha_1, 3\beta_1, 3\gamma_1) \\ \alpha,\beta,\gamma \in (0,3), \alpha + \beta + \gamma = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in (0,1)\end{array}\right.$$

于是

$$\sum \cos(\theta + A) \leqslant 3\cos\left[\frac{\sum(\theta + A)}{3}\right] = 3\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$3\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \geqslant \sum \alpha_1 [\frac{\cos(\theta + A)}{\alpha_1}] \geqslant$$

$$\prod [\frac{\cos(\theta + A)}{\alpha_1}]^{\alpha_1} \text{(应用加权不等式)} \Rightarrow$$

$$\prod [\sec(\theta + A)]^{\alpha_1} \geqslant \frac{1}{3}(\prod \alpha_1^{\alpha_1})^{-1}\sec(\theta + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$T(\alpha_1) = \prod [\sec^k(\theta + A) + \lambda]^{\alpha_1} \text{(应用赫尔特不等式)} \geqslant$$

$$\prod [\sec^k(\theta + A)]^{\alpha_1} + \prod \lambda^{\alpha_1} =$$

$$\{\prod[\sec(\theta+A)]^{a_1}\}^k+\prod\lambda^{a_1}\geqslant$$

$$[\frac{1}{3}(\prod a_1{}^{a_1})^{-1}\sec(\theta+\frac{\pi}{3})]^k+\prod\lambda^{a_1}=$$

$$[\frac{1}{3}\prod(\frac{\alpha}{3})^{-\frac{\alpha}{3}}\sec(\theta+\frac{\pi}{3})]^k+\prod\lambda^{(\alpha/3)}=$$

$$[(\prod\alpha^{\alpha})^{-\frac{1}{3}}\sec(\theta+\frac{\pi}{3})]^k+(\prod\lambda^{\alpha})^{1/3}=$$

$$[p\sec(\theta+\frac{\pi}{3})]^k+q\Rightarrow T(\alpha)=[T(\alpha_1)]^3\geqslant$$

$$\{[p\sec(\theta+\frac{\pi}{3})]^k+q\}^3$$

如果我们取 $\theta=0$，由上述推导有

$$\prod(\sec A)^{a_1}\geqslant\frac{1}{3}(\prod a_1{}^{a_1})^{-1}\sec\frac{\pi}{3}\Rightarrow\prod(\sec A)^{\alpha}\geqslant\left[\frac{2}{(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})^{1/3}}\right]^3 \qquad (!)$$

这一结果很有用，我们在以后的推导中还将反复应用它.

回首反顾，(P_1) 式的特例是

$$(\sec A+1)(\sec B+1)(\sec C+1)\geqslant3^3 \qquad ①$$

它有一个配对式为

$$(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)\geqslant1 \qquad (P_3)$$

证明 ① 式容易，而要证明 (P_3) 式则有一定难度，并且它将在我们以后的推证中立下“汗马功劳”.

证法 1 应用三角恒等式

$$2=2\sum\cot B\cot C=\sum(\cot B+\cot C)\cot A\geqslant$$

$$3[\prod(\cot B+\cot C)\cot A]^{1/3}=$$

$$3[\prod\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}]^{\frac{1}{3}}=$$

$$3[\prod(\frac{\cos A}{\sin B\sin C})]^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$\prod\cos A\leqslant(\frac{2}{3})^3\prod(\sin B\sin C)=(\frac{2}{3})^2\prod\sin^2A=$$

$$(\frac{2}{3})^3\prod(1-\cos A)\prod(1+\cos A)\leqslant$$

$$(\frac{2}{3})^3\prod(1-\cos A)\left[\frac{\sum(1+\cos A)}{3}\right]^3\leqslant$$

$$(\frac{2}{3})^3\prod(1-\cos A)\left[1+\cos(\frac{\sum A}{3})\right]^3=$$

$$(\frac{2}{3})^3(1+\frac{1}{2})^3\prod(1-\cos A)\Rightarrow$$

$$\frac{\prod(1-\cos A)}{\prod\cos A}=\prod(\frac{1-\cos A}{\cos A})=$$

$$\prod(\sec A-1)\geqslant1$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证法 2 由三角恒等式有

$$4\prod\sin A=\sum\sin 2A\geqslant 3(\prod\sin 2A)^{1/3}=$$
$$6(\prod\sin A)^{\frac{1}{3}}\cdot(\prod\cos A)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$
$$8\prod\sin^2 A\geqslant 27\prod\cos A\Rightarrow$$
$$27\prod\cos A\leqslant 8\prod(1-\cos^2 A)=$$
$$8\prod(1+\cos A)\prod(1-\cos A)\leqslant$$
$$8\times(\frac{3}{2})^3\prod(1-\cos A)\Rightarrow$$
$$\prod(\sec A-1)=\prod(\frac{1-\cos A}{\cos A})\geqslant 1$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证法 3 设关于 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的函数为

$$f(x)=\ln(\sec x-1)\Rightarrow f'(x)=(\sec x-1)^{-1}\sin x\sec^2 x=\frac{2\tan x}{1-\cos x}>0\Rightarrow$$

$f(x)$ 为中凸函数 $\Rightarrow f(A)+f(B)+f(C)\geqslant 3f(\frac{A+B+C}{3})=$

$3f(\frac{\pi}{3})=3\ln(\sec\frac{\pi}{3}-1)=$

$3\ln(2-1)=0\Rightarrow\ln(\sec A-1)+\ln(\sec B-1)+\ln(\sec C-1)\geqslant 0\Rightarrow$

$\ln[(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)]\geqslant 0\Rightarrow$

$(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)\geqslant 1$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证法 4 设 $x,y\in(0,\frac{\pi}{2}),\theta=\frac{1}{2}(x+y)\in(0,\frac{\pi}{2})$,我们先证明

$$(\sec x-1)(\sec y-1)\geqslant(\sec\theta-1)^2\Leftrightarrow \quad ②$$
$$(\sec x)(\sec y)-\sec x-\sec y\geqslant(\sec\theta)^2-2\sec\theta\Leftrightarrow$$
$$\frac{p}{q}=\frac{1-\cos x-\cos y}{\cos x\cos y}\geqslant\frac{1-2\cos\theta}{(\cos\theta)^2} \quad ③$$

而且 $$p=1-\cos x-\cos y\geqslant 1-2\cos(\frac{x+y}{2})=1-2\cos\theta$$

$$q=\cos x\cos y\leqslant(\frac{\cos x+\cos y}{2})^2\leqslant\cos^2(\frac{x+y}{2})=\cos^2\theta$$

故式 ③ 成立.逆推之式 ② 成立.我们设关于 x 的函数为

$$f(x)=\ln(\sec x-1)$$

由式②知 $$f(x)+f(y)\geqslant 2f(\frac{x+y}{2})$$
因此 $f(x)$ 为凸函数，于是有

$$f(A)+f(B)+f(B)\geqslant 3f(\frac{A+B+C}{3})=3f(\frac{\pi}{3})\Rightarrow$$
$$\ln(\sec A-1)+\ln(\sec B-1)+\ln(\sec C-1)\geqslant$$
$$3\ln(\sec\frac{\pi}{3}-1)=3\ln(2-1)=0\Rightarrow$$
$$\ln[(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)]\geqslant 0\Rightarrow$$
$$(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)\geqslant 1$$

证法 5 证 $\theta=\frac{1}{2}(A+B)\in(0,\frac{\pi}{2})$，由证法 4，有

$$\begin{cases}(\sec A-1)(\sec B-1)\geqslant(\sec\theta-1)^2\\(\sec C-1)(\sec\frac{\pi}{3}-1)\geqslant[\sec(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})-1]^2\end{cases}\Rightarrow$$
$$\prod(\sec A-1)(\sec\frac{\pi}{3}-1)\geqslant$$
$$\left\{(\sec\theta-1)[\sec(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})-1]\right\}^2\geqslant$$
$$\{\sec\frac{1}{2}[\theta+(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})]-1\}^4=$$
$$[\sec(\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4})-1]^4=$$
$$[\sec(\frac{\pi+\frac{\pi}{3}}{4})-1]^4=(\sec\frac{\pi}{3}-1)^4\Rightarrow$$
$$\prod(\sec A-1)\geqslant(\sec\frac{\pi}{3}-1)^3=1$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

10 步入青天

回顾我们刚才走过的艰辛历程，有结论

$$\prod(\sec A\pm 1)\geqslant(2\pm 1)^3 \qquad (P_4)$$

从指数上推而广之，将它打扮得“花枝招展”，“貌若天仙”.

推广 19 设 $k\in\mathbf{N}$ 为自然数，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，则有

$$\prod(\sec^k A\pm 1)\geqslant(2^k\pm 1)^3 \qquad (P_5)$$

这一珠联璧合的结果，我们只须证明

$$\prod(\sec^k A-1)\geqslant(2^k-1)^3 \qquad (P_5)'$$

成立即可.为此,对 k 采用数学归纳法:

证明 (1) 从(P_4)式知,当 $k=1$ 时$(P_5)'$式成立.

(2) 假设对于 k 时$(P_5)'$式成立,并记$(x,y,z)=(\sec A,\sec B,\sec C)$,有

$$T_k=(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1)\geqslant(2^k-1)^3 \quad ①$$

$$T_1=(x-1)(y-1)(z-1)\geqslant 1 \quad ②$$

$$xyz\geqslant 8 \quad ③$$

$$T_{k+1}=(x^{k+1}-1)(y^{k+1}-1)(z^{k+1}-1)=$$
$$[(x-1)+x(x^k-1)][(y-1)+y(y^k-1)]\cdot$$
$$[(z-1)+z(z^k-1)]\geqslant$$
(应用赫尔特不等式)
$$[\sqrt[3]{(x-1)(y-1)(z-1)}+$$
$$\sqrt[3]{xyz(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1)}]^3\geqslant$$
$$[1+\sqrt[3]{8(2^k-1)^3}]^3\Rightarrow$$
$$T_{k+1}\geqslant(2^{k+1}-1)^3$$

即对 $k+1$,$(P_5)'$式仍然成立.

综合上述,对任意 $k\in\mathbf{N}$,$(P_5)'$式成立,且等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

另证 当 $k=1$ 时,已证 $T_1\geqslant 1$,记号 $x,y,z>0$ 同上,再记 $t=\sqrt[3]{xyz}\geqslant 2$,那么,当 $k>1$ 时,应用赫尔特不等式有

$$T_k=(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1)=$$
$$T_1(\sum_{i=1}^{k-1}x^{k-i}+1)(\sum_{i=1}^{k-1}y^{k-i}+1)(\sum_{i=1}^{k-1}z^{k-i}+1)\geqslant$$
$$T_1(1+\sum_{i=1}^{k-1}t^i)^3\geqslant T_1(1+\sum_{i=1}^{k-1}2^i)^3=$$
$$T_1(\sum_{i=1}^{k-1}2^i)^3=T_1(\frac{2^k-1}{2-1})^3=$$
$$T_1(2^k-1)^3\geqslant(2^k-1)^3\Rightarrow$$
$$T_k\geqslant(2^k-1)^3$$

即$(P_5)'$式成立,等号成立仅当 $x=y=z=2$,即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

可以说推广 2 是一个妙趣横生的人间妙题,结构对称,外形美观紧凑,结论简单,颇易记住,颇具吸引力,令人难忘.我们再从参数方面把它推广成:

推广 20 设 $k\in\mathbf{N}$ 为自然数,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,参数 $\lambda,\mu,v>0$,那么

(1) 当 $\lambda,\mu,v\leqslant 1$ 时

$$T_\lambda=(\sec^kA-\lambda)(\sec^kB-\mu)(\sec^kC-v)\geqslant(2^k-1+Q)^3 \quad (P_6)$$

其中
$$Q=\sqrt[3]{(1-\lambda)(1-\mu)(1-v)}\geqslant 0$$

(2) 当 $\lambda,\mu,v\geqslant 1$ 时

$$T_\lambda^1=(\sec^kA+\lambda)(\sec^kB+\mu)(\sec^kC+v)\geqslant(2^k+1+Q')^3 \quad (P_6)'$$

其中 $$Q' = \sqrt[3]{(\lambda-1)(\mu-1)(v-1)} \geqslant 0$$

证明 (1) 应用推广 19 和赫尔特不等式有

$$T_\lambda = \prod(\sec^k A - \lambda) = \prod[(\sec^k A - 1) + (1-\lambda)] \geqslant (\sqrt[3]{T_k} + Q)^3 \geqslant (2^k - 1 + Q)^3$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\lambda = \mu = v$.

同理可证$(P_6)'$式成立.

我们知道，对于不等式

$$(\sec A + 1)(\sec B + 1)(\sec C + 1) \geqslant 2^3$$

而言，应用赫尔特不等式很容易建立它的指数推广，事实上，它是推广 1 的特例，且还可以从角度参数 θ 上去推广它，使之成为漂亮的推广 1.

其实，推广 3 中的(P_6)式也可以再从角参数方面推广为：

推广 21 设 $k \in \mathbf{N}$ 为自然数，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，参数 $\lambda, \mu, v \in (0,1]$，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$，且 $\theta + A, \theta + B, \theta + C$ 均为正数，则有

$$T_*^{(k)} = \prod[\sec^k(\theta + A) - \lambda] \geqslant \left[\sec^k\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 1 + Q\right]^3 \qquad (P_7)$$

略证 依照推广 1 中证法 4 和证法 5 中的技巧，易证

$$T_1^{(\theta)} = \prod[\sec(\theta + A) - 1] \geqslant \left[\sec\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right]^3 \qquad (P_7)'$$

记 $x = \sec(\theta + A)$，$y = \sec(\theta + B)$，$z = \sec(\theta + C)$，$t = (xyz)^{1/3}$，且易证 $t \geqslant m = \sec(\theta + \frac{\pi}{3})$，于是，应用赫尔特不等式，有

$$\begin{aligned}
T_k^{(\theta)} = \prod[\sec^k(\theta + A) - 1] &= T_1^{(\theta)} \cdot \prod(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1) \geqslant \\
&T_1^{(\theta)}(t^{k-1} + t^{k-2} + \cdots + t + 1)^3 \geqslant \\
&(m-1)^3(m^{k-1} + m^{k-2} + \cdots + m + 1)^3 = (m^k - 1)^3 \Rightarrow \\
&(x^k - \lambda)(y^k - \mu)(z^k - v) = \\
&[(x^k - 1) + (1-\lambda)][(y^k - 1) + (1-\mu)][(z^k - 1) + (1 - v)] \geqslant \\
&\{[\prod(x^k - 1)]^{\frac{1}{3}} + [\prod(1-\lambda)]^{\frac{1}{3}}\}^3 \geqslant \\
&(m^k - 1 + Q)^3
\end{aligned}$$

即(P_7)式成立，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形．$\lambda = \mu = v \in (0,1]$，$\theta \in [0, \frac{\pi}{6})$.

如果我们设 $p, q, r \in (0,1)$，且 $p + q + r = 1$，再设$(\alpha, \beta, \gamma) = (\theta + A, \theta + B, \theta + C)$，$x \in (0, \frac{\pi}{2})$，关于 x 的函数为

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(\sec x - 1) \Rightarrow f'(x) &= \frac{2\tan x}{1 - \cos x} > 0 \Rightarrow \\
&pf(\alpha) + qf(\beta) + rf(\gamma) \geqslant f(p\alpha + q\beta + r\gamma)\text{(应用彦森不等式)} \Rightarrow \\
&p\ln(\sec\alpha - 1) + q\ln(\sec\beta - 1) + \gamma\ln(\sec\gamma - 1) \geqslant \\
&\ln[\sec(p\alpha + q\beta + r\gamma) - 1] \Rightarrow (\sec\alpha - 1)^p(\sec\beta - 1)^q(\sec\gamma - 1)^r \geqslant
\end{aligned}$$

$$\sec(p\alpha+q\beta+r\gamma)-1\Rightarrow$$
$$[\sec(\theta+A)-1]^p[\sec(\theta+B)-1]^q[\sec(\theta+C)-1]^r\geqslant$$
$$\sec[\theta+(pA+qB+rC)]-1 \tag{P$_8$}$$

这即为前面$(P_7)'$式的一个指数推广.

下面我们精心装点美妙的不等式

$$(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)\geqslant 1 \qquad ④$$

推广 22 设$\triangle ABC$为锐角三角形,$\alpha,\beta,\gamma\in(0,3/2)$,且$\alpha+\beta+\gamma=3$,则

$$\prod(\sec A-1)^{\alpha}\geqslant m[\prod(\cos A)^{1-\alpha}]^3 \tag{P$_9$}$$

其中
$$m=9^3\prod(3-2\alpha)^{2\alpha-3}(6+\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha})^{-3}$$

显然,当$\alpha=\beta=\gamma=1$时,上式化为④式.

证明 令$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\in(0,1)$且$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=1$,$n=(\prod\alpha_1^{\alpha_1})^{-1}$,应用三角恒等式

$$2=2\sum(\cot B\cot C)=\sum(\cot B+\cot C)\cot A=\sum\alpha_1\left[\frac{(\cot B+\cot C)\cot A}{\alpha_1}\right]\geqslant$$
$$\prod\left[\frac{(\cot B+\cot C)\cot A}{\alpha_1}\right]^{\alpha_1}=n\prod\left(\frac{\cot B+\cot C}{\tan A}\right)^{\alpha_1}=$$
$$n\prod\left(\frac{\cos A}{\sin B\sin C}\right)^{\alpha_1}=n\prod(\cos A)^{\alpha_1}\cdot\prod(\sin B\sin C)^{-\alpha_1}=$$
$$n\prod(\cos A)^{\alpha_1}\cdot\prod(\sin^2 A)^{\alpha_1-1}\Rightarrow$$
$$\prod(\cos A)^{2\alpha_1}\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^2\prod(\sin^2 A)^{1-\alpha_1}=$$
$$\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\prod(1+\cos A)^{1-\alpha_1}\cdot\prod(1-\cos A)^{1-\alpha_1} \qquad ⑤$$

由于

$$\prod(1+\cos A)^{1-\alpha_1}=[\prod(1+\cos A)^{\frac{1-\alpha_1}{2}}]^2(\text{注}\sum\frac{1}{2}(1-\alpha_1)=1)\leqslant$$
$$\left[\sum\frac{1-\alpha_1}{2}(1+\cos A)\right]^2=$$
$$\left[\sum\frac{1}{2}(1-\alpha_1)+\frac{1}{2}\sum(1-\alpha_1)\cos A\right]^2=$$
$$\left[1+\frac{1}{2}\sum(1-\alpha_1)\cos A\right]^2 \qquad ⑥$$

记
$$t=\prod(1+\cos A)^{1-\alpha_1}$$

由⑤得

$$\prod(\cos A)^{2\alpha_1}\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot t\prod(1-\cos A)^{1-\alpha_1}\Rightarrow\prod\left(\frac{1-\cos A}{\cos A}\right)^{1-\alpha_1}\geqslant$$
$$\left(\frac{n}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{t}\prod(\cos A)^{3\alpha_1-1}\Rightarrow\prod(\sec A-1)^{\frac{3}{2}(1-\alpha_1)}\geqslant$$
$$\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^3\prod(\cos A)^{\frac{3}{2}(3\alpha_1-1)} \qquad ⑦$$

令 $\alpha=\frac{3}{2}(1-\alpha_1),\beta=\frac{3}{2}(1-\beta_1),\gamma=\frac{3}{2}(1-\gamma_1)\Rightarrow\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{3}{2})$ 且

$$\alpha+\beta+\gamma=3\Rightarrow\prod(\sec A-1)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{3}\left[\prod(\cos A)^{1-\alpha}\right]^{3} \quad ⑧$$

又

$$t=\prod(1+\cos A)^{1-\alpha_1}\leqslant\left(1+\frac{1}{3}\sum\alpha\cos A\right)^{2}\leqslant$$

$$\left(1+\frac{1}{6}\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{2}n=\prod\alpha_1^{-\alpha_1}=\prod\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right)^{-(1-\frac{2}{3})\alpha}$$

代入⑧式即得(P_9)式.

另证　应用恒等式有

$$4\prod\sin A=\sum\sin 2A=\sum\alpha_1\left(\frac{\sin 2A}{\alpha_1}\right)\geqslant$$

$$\prod\left(\frac{\sin 2A}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}=\prod\left(\frac{2\sin A\cos A}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\Rightarrow$$

$$2\left(\prod\alpha_1^{\alpha_1}\right)\prod(\sin A)^{1-\alpha_1}\geqslant\prod(\cos A)^{\alpha_1}\Rightarrow$$

$$\left[\prod(\cos A)^{\alpha_1}\right]^{2}\leqslant4\left(\prod\alpha_1^{\alpha_1}\right)^{2}\prod(\sin^2A)^{1-\alpha_1}=$$

$$4\left(\prod\alpha_1^{\alpha_1}\right)^{2}\prod(1+\cos A)^{1-\alpha_1}\prod(1-\cos A)^{1-\alpha_1}$$

以下过程同上,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\alpha=\beta=\gamma=1$.

此外,顺便指出:(P_1)式证法5有

$$\prod(\sec A-1)(\sec B-1)\geqslant\prod\left[\sec\left(\frac{A+B}{2}\right)-1\right]^{2}=\prod\left(\csc\frac{C}{2}-1\right)^{2}\Rightarrow$$

$$\prod(\sec A-1)^{2}\geqslant\prod\left(\csc\frac{A}{2}-1\right)^{2}\Rightarrow$$

$$\prod(\sec A-1)\geqslant\prod\left(\csc\frac{A}{2}-1\right)$$

在(P_1)式中作置换

$$(A,B,C)\to\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

有

$$\prod\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-1\right]\geqslant1\Rightarrow\prod\left(\csc\frac{A}{2}-1\right)\geqslant1\Rightarrow$$

$$\prod(\sec A-1)\geqslant\prod\left(\csc\frac{A}{2}-1\right)\geqslant1 \quad ⑨$$

同理可得:

$$\prod(\csc A-1)\geqslant\prod\left(\sec\frac{A}{2}-1\right)\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^{3} \quad ⑩$$

这也是两个有趣的结论.

对于 $k\geqslant1,x\in(0,\frac{\pi}{2})$,设函数

$$f(x)=\ln(\sec^kx-1)\Rightarrow f'(x)=\frac{k\sec^{k+1}x\sin x}{\sec^kx-1}>0\Rightarrow$$

$$f(\theta+A)+f(\theta+B)+f(\theta+C)\geqslant 3f\left(\theta+\frac{A+B+C}{3}\right)=$$

$$3f\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\sum\ln[\sec^k(\theta+A)-1]\geqslant 3\ln\left[\sec^k\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1\right]\Rightarrow$$

$$\prod[\sec^k(\theta+A)-1]\geqslant\left[\sec^k\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1\right]^3 \qquad (※)$$

这正是推广 21 中当 $\lambda=\mu=v=1$ 时的特例.

但是,对于函数

$$f(x)=\ln(\csc^k x-1)\Rightarrow f'(x)=-\frac{k\csc^{k+1}x\cos x}{\csc^k x-1}<0$$

因此,用此种方法不能建立(※)式的配对式.

为此,我们先建立不等式

$$[\csc(\theta+A)-1][\csc(\theta+B)-1][\csc(\theta+C)-1]\geqslant[\csc(\theta+\frac{\pi}{3})-1]^3 \qquad ①$$

证明 设

域外高手

$$(x,y,z)=(\theta+A,\theta+B,\theta+C)\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\sin x\sin y\leqslant\left(\frac{\sin x+\sin y}{2}\right)^2\leqslant\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}1-\sin x-\sin y\geqslant 1-2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\\ \dfrac{1}{\sin x\sin y}\geqslant\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{1-\sin x-\sin y}{\sin x\sin y}+1\geqslant\frac{1-2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}+1\Rightarrow$$

$$\frac{(1-\sin x)(1-\sin y)}{\sin x\sin y}\geqslant\frac{(1-\sin\dfrac{x+y}{2})^2}{\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(\csc x-1)(\csc y-1)\geqslant\left(\csc\dfrac{x+y}{2}-1\right)^2\\ \text{同理}(\csc z-1)(\csc\varphi-1)\geqslant(\csc\dfrac{z+\varphi}{2}-1)^2\end{array}\right\}$$

(其中 $\varphi=\frac{1}{3}(x+y+z)=\theta+\frac{\pi}{3}$)$\Rightarrow$

$$\prod(\csc x-1)(\csc\varphi-1)\geqslant\left[(\csc\frac{x+y}{2}-1)(\csc\frac{z+\varphi}{2}-1)\right]^2\geqslant$$

$$\left[\csc\frac{1}{4}(x+y+z+\varphi)-1\right]^4=(\csc\varphi-1)^4\Rightarrow$$

$$\prod(\csc x-1)\geqslant(\csc\varphi-1)^3\Rightarrow$$

$$\prod[\csc(\theta+A)-1]\geqslant\left[\csc(\theta+\frac{\pi}{3})-1\right]^3$$

为了继续前进,我们先建立

引理　设 $x_i>1(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,记 $G_n=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}$,则有

$$T_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\leqslant(G_n-1)^n \qquad ⑫$$

证明　(1) 当 $n=2$ 时

$$T_2=(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1\leqslant$$
$$x_1x_2-2\sqrt{x_1x_2}+1=(\sqrt{x_1x_2}-1)^2$$

当 $n=3$ 时

$$\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)\leqslant(\sqrt{x_1x_2}-1)^2\\(x_3-1)(G_3-1)\leqslant(\sqrt{x_3G_3}-1)^2\end{cases}\Rightarrow(G_3-1)T_3\leqslant[(\sqrt{x_1x_2}-1)(\sqrt{x_3G_3}-1)]^2\leqslant$$
$$(\sqrt[4]{x_1x_2x_3G_3}-1)^4=(\sqrt[4]{G_3^3\cdot G_3}-1)^4=$$
$$(G_3-1)^4\Rightarrow T_3\leqslant(G_3-1)^4$$

(2) 假设当 $n=m$ 时,⑫ 式成立,那么当 $n=m+1$ 时,根据归纳假设有

$$\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_m-1)\leqslant(\sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_m}-1)^m\\(x_{m+1}-1)(G_{m+1}-1)^{m-1}\leqslant(\sqrt[m]{x_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}-1)^m\end{cases}\Rightarrow(G_{m+1}-1)^{m-1}\cdot T_{m+1}\leqslant$$
$$[(\sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_m}-1)(\sqrt[m]{x_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}-1)]^m\leqslant$$
$$(\sqrt[2m]{x_1x_2\cdots x_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}-1)^{2m}=(\sqrt[2m]{G_{m+1}^{m+1}\cdot G_{m+1}^{m-1}}-1)^{2m}=$$
$$(G_{m+1}-1)^{2m}\Rightarrow T_{m+1}\leqslant(G_{m+1}-1)^{m+1}$$

即当 $n=m+1$ 时 ⑫ 式仍然成立.

综合上述(1) 和(2) 知对任何 $2\leqslant n\in\mathbf{N}$,⑫ 式成立.

另证　(1) 由上述知,当 $n=2,3$ 时,⑫ 式成立;

(2) 假设当 $n=m+1$ 时 ⑫ 式成立,即

$$T_m(G_m-1)=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_m-1)(G_m-1)\leqslant(\sqrt[m+1]{x_1x_2\cdots x_mG_m}-1)^{m+1}=$$
$$(\sqrt[m+1]{G_m^m\cdot G_m}-1)^{m+1}=(G_m-1)^{m+1}\Rightarrow$$
$$T_m\leqslant(G_m-1)^m$$

即当 $n=m$ 时 ⑫ 式仍然成立,等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

再证　(1) 从 $n=2$ 时 ⑫ 成立,易推得 $n=2^2$ 时 ⑫ 式成立,且易归纳证明当 $n=2^m(m\in\mathbf{N})$ 为 2 的正整数次幂时 ⑫ 式成立(略).

(2) 如果 n 不为 2 的正整数次幂时,总可以找到一个自然数 r,使得 $n+r=2^k(k\in\mathbf{N})$ 为 2 的自然数幂,于是依归纳假设有(记 $2^k=n+r=t$)

$$T_n(G_n-1)^r=(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)(G_n-1)^r\leqslant(\sqrt[t]{x_1x_2\cdots x_nG_n^r}-1)^t=$$
$$(\sqrt[t]{G_n^n\cdot G_n^r}-1)^t=(\sqrt[t]{G_n^{n+r}}-1)^t=(G_n-1)^{n+r}\Rightarrow T_n\leqslant(G_n-1)^n$$

即此时 ⑫ 式仍然成立.

人们养花是为了美化生活,我们建立引理是为了应用它.如果我们在 ⑫ 式取 $n=3$,并令

$$(x_1,x_2,x_3)=(\sec^kA,\sec^kB,\sec^kC)\Rightarrow[(\sec A\sec B\sec C)^{k/3}-1]^3\geqslant$$
$$(\sec^kA-1)(\sec^kB-1)(\sec^kC-1)\geqslant(2^k-1)^3 \tag{P_{10}}$$

这是一个漂亮的不等式,它将$(P_5)'$式完善成一个双向不等式.当然,它还可以再推广为

$$\left\{\left[\prod\sec(\theta+A)\right]^{k/3}-1\right\}^3\geqslant\prod[\sec^k(\theta+A)-1]\geqslant\left[\sec^k\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1\right]^3 \tag{P_{11}}$$

11　喜迎金秋

只要我们在春天里播种耕耘,就会在秋季喜获丰收.

首先,我们将推广 22,再推广成

推广 23　设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,正参数 $\lambda,\mu,v\leqslant1$,指数 $k\in\mathbf{N}$,$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{3}{2})$,且 $\alpha+\beta+\gamma=3$,则有

$$\prod(\sec^kA-\lambda)^\alpha\geqslant(f+Q)^3 \tag{P_{12}}$$

其中

$$Q=[(1-\lambda)^\alpha(1-\mu)^\beta(1-v)^\gamma]^{1/3} \tag{①}$$
$$f^3=m\delta\left(\frac{e^k-1}{e-1}\right)^3 \tag{②}$$
$$m=9^3\prod(3-2\alpha)^{2\alpha-3}(6+\sum\frac{\beta\gamma}{\alpha})^{-3} \tag{③}$$
$$\delta=\left[\prod(\cos A)^{1-\alpha}\right]^3 \tag{④}$$
$$e=2(\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma)^{-1} \tag{⑤}$$

略证　我们应用以前建立的一系列结果,并令

$$(x,y,z)=(\sec A,\sec B,\sec C)$$
$$t=(x^\alpha y^\beta z^\gamma)^{1/3}\geqslant e \tag{⑥}$$

记

$$T^k=\prod(\sec^kA-1)^\alpha=T_1P=\prod(\sec A-1)^\alpha P\geqslant m\delta P \tag{⑦}$$

其中

$$P^{\frac{1}{3}}=\left(\sum_{i=1}^{k-1}x^i+1\right)^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k-1}y^i+1\right)^{\frac{\beta}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k-1}z^i+1\right)^{\frac{\gamma}{3}}(\text{应用赫尔特不等式})\geqslant$$

域外高手

$$\sum_{i=1}^{k-1} t^i + 1 \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} e^i + 1 = \frac{e^k - 1}{e - 1} \Rightarrow P \geqslant \left(\frac{e^k - 1}{e - 1}\right)^3 \Rightarrow \quad ⑧$$

$$T_k = T_1 P \geqslant f^3 \Rightarrow \quad ⑨$$

$$\prod (\sec^k A - \lambda)^\alpha = \{\prod [(\sec^k A - 1) + (1 + \lambda)]^{\frac{\alpha}{3}}\}^3 \geqslant$$

$$\{[\prod (\sec^k A - 1)^\alpha]^{\frac{1}{3}} + [\prod (1 - \lambda)^\alpha]^{\frac{1}{3}}\}^3 =$$

$$(T_k^{1/3} + Q)^3 = (f + Q)^3$$

特别地，当 $\lambda = \mu = v = 1$ 时，$Q = 0$，(P_{12}) 式化为

$$(\sec^k A - 1)^\alpha (\sec^k B - 1)^\beta (\sec^k C - 1)^\gamma \geqslant f^3 = m\delta\left(\frac{e^k - 1}{e - 1}\right)^3 = M\delta \quad (P_{13})$$

即

$$M = m\left(\frac{e^k - 1}{e - 1}\right)^3$$

我们在本文中探讨的均是只涉及一个三角形的三角不等式，现在，我们将上式推广到 n 个三角形中去.

推广 24 约定 $n, k \in \mathbf{N}, \alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{3}{2})$. 满足 $\alpha + \beta + \gamma = 3$，$\triangle A_iB_iC_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为锐角三角形，则有

$$\prod [(\prod_{i=1}^{n} \sec A_i)^{\frac{k}{n}} - 1]^\alpha \geqslant M(\prod_{i=1}^{n} \delta_i)^{\frac{1}{n}} \quad (P_{14})$$

其中 M 的意义同上.

$$\delta_i = [\prod (\cos A_i)^{1-\alpha}]^3$$

(P_{14}) 有几个趣味特点：

(1) 它将不等式

$$(\sec A_i - 1)(\sec B_i - 1)(\sec C_i - 1) \geqslant 1 \quad ⑩$$

"连升三级" 推广而就.

(2) 等号成立的条件有趣，且更有趣的是：当 $n = 1$ 时，(P_{14}) 式化为(P_{13}) 式；当 $n > 1$ 时，当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \backsim \triangle A_nB_nC_n$ 时，(P_{14}) 式也化为(P_{13}) 式；

(3) 除开没引入参数，(P_{14}) 式将式 ⑩ 推广得比较全面彻底.

证明 我们应用推广 23 的结论和在前面建立的结论引理，有

$$\begin{cases} [(\prod_{i=1}^{n} \sec A_i)^{\frac{k}{n}} - 1]^{n\alpha} \geqslant \prod_{i=1}^{n} (\sec^k A_i - 1)^\alpha \\ [(\prod_{i=1}^{n} \sec B_i)^{\frac{k}{n}} - 1]^{n\beta} \geqslant \prod_{i=1}^{n} (\sec^k B_i - 1)^\beta \Rightarrow \\ [(\prod_{i=1}^{n} \sec C_i)^{\frac{k}{n}} - 1]^{n\gamma} \geqslant \prod_{i=1}^{n} (\sec^k C_i - 1)^\gamma \end{cases}$$

$$[(\prod_{i=1}^{n} \sec A_i)^{\frac{k}{n}} - 1]^\alpha \geqslant \{\prod_{i=1}^{n} [\prod (\sec^k A_i - 1)]^\alpha\}^{\frac{1}{n}} \geqslant$$

$$[\prod_{i=1}^{n} (M\delta_i)]^{\frac{1}{n}} = M(\prod_{i=1}^{n} \delta_i)^{\frac{1}{n}}$$

现在,我们将(P_{11})式(包括前面一系列三角不等式)

$$\prod[\sec^k(\theta+A)-1]\geqslant\left[\sec^k(\theta+\frac{\pi}{3})-1\right]^3$$

拓展到凸 n 边形的情形.

推广25 设 $1\leqslant k\in\mathbf{N},3\leqslant n\in\mathbf{N},A_1A_2\cdots A_n$ 为凸 n 边形,$0\leqslant\theta_i<\frac{\pi}{2}$ 使得$(\theta_i+\frac{A_i}{2})\in(0,\frac{\pi}{2})(1\leqslant i\leqslant n)$,则有

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\sec^k(\theta_i+\frac{A_i}{2})-1\right]\geqslant\left[\csc^k\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)-1\right]^n \tag{P_{15}}$$

其中,$\theta=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i$.

特别地,当 $n=3$ 时,我们作置换$(A_1,A_2,A_3)\to(A,B,C)$(约定 $\triangle ABC$ 为锐角三角形),再令

$$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2})$$

则(P_{15})式化为我们偏爱的

$$\prod(\sec^kA-1)\geqslant(2^k-1)^3$$

证明 (1) 设

$$\varphi_i=\theta_i+\frac{A_i}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\varphi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=$$
$$\theta+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}A_i=\theta+(\frac{n-2}{2n})\pi=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{n}-\theta)\Rightarrow$$
$$\sec\varphi=\csc(\frac{\pi}{n}-\theta)$$

由于

$$\varphi_i\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\cos\varphi_i\leqslant(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i)^n\leqslant$$
$$\left[\cos\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i}{n}\right)\right]^n=(\cos\varphi)^n\Rightarrow$$
$$t=(\prod_{i=1}^{n}\sec\varphi_i)^{\frac{1}{n}}\geqslant\sec\varphi \tag{⑪}$$

(2) 我们再证下面的不等式成立

$$\prod_{i=1}^{n}(\sec\varphi_i-1)\geqslant(\sec\varphi-1)^n \tag{⑫}$$

当 $n=2$ 和 3 时,我们已经知道 ⑫ 式成立.

假设当 $n=m$ 时 ⑫ 式成立,那么当 $n=m+1$ 时,设

$$\begin{cases}\varphi = \dfrac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\varphi_i,\ \alpha = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i \\ \beta = \dfrac{1}{m}[\varphi_{m+1} + (m-1)\varphi]\end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}\varphi_i + \varphi_{m+1} + (m-1)\varphi\right] =$$

$$\frac{1}{2m}[(m+1)\varphi + (m-1)\varphi] = \varphi$$

由归纳假设有

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{m}(\sec\varphi_i - 1) \geqslant (\sec\alpha - 1)^m \\ (\sec\varphi_{m+1} - 1)(\sec\varphi - 1)^{m-1} \geqslant (\sec\beta - 1)^m\end{cases} \Rightarrow$$

$$(\sec\varphi - 1)^{m-1}\prod_{i=1}^{m+1}(\sec\varphi_i - 1) \geqslant$$

$$[(\sec\alpha - 1)(\sec\beta - 1)]^m \geqslant$$

$$\left[\sec\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 1\right]^{2m} = (\sec\varphi - 1)^{2m} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{m+1}(\sec\varphi_i - 1) \geqslant (\sec\varphi - 1)^{m+1} \qquad ⑬$$

即当 $n = m + 1$ 时 ⑫ 式仍然成立.

综合上述,当 $n \in \mathbf{N}$ 时 ⑫ 式成立,等号成立仅当 $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi$.

(3) 我们证

$$T_k = \prod_{i=1}^{n}(\sec^k\varphi_i - 1)$$

则

$$T_1 = \prod_{i=1}^{n}(\sec\varphi_i - 1) \geqslant (\sec\varphi - 1)^n$$

且

$$T_k = \prod_{i=1}^{n}\left[(\sec\varphi_i - 1)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\sec^i\varphi_i + 1\right)\right] =$$

$$T_1\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\sec^i\varphi_i + 1\right)(\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant$$

$$T_1\left(\sum_{i=1}^{k-1}t^i + 1\right)^n \geqslant$$

$$T_1\left[\sum_{i=1}^{k-1}(\sec\varphi)^i + 1\right]^n \geqslant$$

$$(\sec\varphi - 1)^n\left[\sum_{i=1}^{k-1}(\sec\varphi)^i + 1\right]^n =$$

$$(\sec^k\varphi - 1)^n$$

即(P_{15})式成立,等号成立仅当 $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \cdots = \varphi_n = \varphi$.

此外,如果我们增设 $0 < \lambda_i \leqslant 1(1 \leqslant i \leqslant n)$ 并记 $Q = \left[\prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)\right]^{1/n}$,那么我们

又可以从参数方面将(P_{15})式推广为

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\sec^k\left(\theta_i+\frac{A_i}{2}\right)-\lambda_i\right]\geqslant\left[\csc^k\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)-1+Q\right]^n \tag{P_{16}}$$

相应地,上式已有配对式

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\csc^k\left(\theta_i+\frac{A_i}{2}\right)-\lambda_i\right]\geqslant\left[\sec^k\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)-1+Q\right]^n \tag{P_{17}}$$

同样,(P_{15})式也可以从涉及1个凸 n 边形推广到 m 个凸 n 边形 $\{A_{1j},A_{2j}\cdots A_{nj}\}(j=1,2,\cdots,m;1\leqslant m\in\mathbf{N})$ 的情形.

$$\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\sec\left(\theta_i+\frac{A_{ij}}{2}\right)\right]^{\frac{k}{m}}-1\right\}\geqslant\left[\csc^k\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)-1\right]^n \tag{P_{18}}$$

12　再开新花

在前面,我们长途跋涉,跨越"千山万水"终于到达了"花鸟之乡".本文的最后,我们再建立三个关于正切的新的漂亮的三角不等式,作为本文的告别礼.

(1)我们在前面建立了结论

$$(q+r)\tan\frac{A}{2}+(r+p)\tan\frac{B}{2}+(p+q)\tan\frac{C}{2}\geqslant2\sqrt{qr+rp+pq} \tag{A_1}$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}=\frac{\tan\frac{B}{2}}{q}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{r} \tag{①}$$

现在我们建立(A_1)式的指数推广,并保持等号成立的条件不变,仍然是①式,这样的推广最漂亮,也最令人满意.

推广26　$\triangle ABC$ 为任意三角形,λ,μ,v 及 p,q,r 为正数,则当 $k\geqslant1$ 时,有

$$\lambda\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}\right)^k+\mu\left(\frac{\tan\frac{B}{2}}{q}\right)^k+v\left(\frac{\tan\frac{C}{2}}{r}\right)^k\geqslant\sqrt{(qr+rp+pq)^{2-k}} \tag{A_2}$$

等号成立仅当①式成立,其中 $\lambda=\frac{1}{2}p(q+r),\mu=\frac{1}{2}q(r+p),v=\frac{1}{2}r(p+q)$.

证明　我们记

$$S=\lambda+\mu+v=qr+rp+pq$$

应用(A_1)式和加强幂平均不等式,有

$$\sqrt{S}\leqslant\sum\lambda\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}\right)\leqslant S\left[\frac{1}{S}\sum\lambda\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}\Rightarrow\sum\lambda\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}\right)^k\geqslant\sqrt{S^{2-k}}$$

等号成立仅当①式成立.

有趣的是,当取 $k=2$ 时,(A_2)式化为

$$\sum\lambda\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{p}\right)^2\geqslant 1\Rightarrow\sum\left(\frac{q+r}{p}\right)\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2 \tag{A_3}$$

这确为一个漂亮的结果.

(2) 让我们放松心情,从三角恒等式作变化

$$\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1\Rightarrow\prod\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \qquad ②$$

这一有趣的变化如作游戏,成立吗?其实,② 式不仅成立,它还可以指数推广为:

推广 27 设 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{3}{2})$,且 $\alpha+\beta+\gamma=3$,则对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^{\alpha}\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)^{\beta}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)^{\gamma}\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 m \tag{A_4}$$

其中

$$m=\left[(3-2\alpha)^{3-2\alpha}(3-2\beta)^{3-2\beta}(3-2\gamma)^{3-2\gamma}\right]^{-1} \qquad ③$$

显然,当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,(A_4) 式化为 ② 式(因为 $m=1$).

其实,从 ② 式我们易得不等式链

$$\frac{2}{3}\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)\geqslant\left[\prod\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant 2\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad ④$$

证明 我们设

$$\begin{cases}\beta+\gamma-\alpha=3-2\alpha=3p>0\\ \gamma+\alpha-\beta=3-2\beta=3q>0\\ \alpha+\beta-\gamma=3-2\gamma=3r>0\end{cases}\Rightarrow p+q+r=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=1\Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}\geqslant\sum\cos\frac{A}{2}=\sum p\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{p}\right)\text{(应用加权不等式)}\geqslant$$

$$\prod\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{p}\right)^{p}\Rightarrow$$

$$\prod\left(\sec\frac{A}{2}\right)^{p}\geqslant\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\left(\prod p^{p}\right)^{-1} \qquad ⑤$$

设

$$T(\alpha)=\prod\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^{\alpha}=\prod\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)^{\alpha}=$$

$$\prod\left(\sec\frac{A}{2}\right)^{\beta+\gamma-\alpha}=\left[\prod\left(\sec\frac{A}{2}\right)^{p}\right]^3\geqslant\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3\left(\prod p^{p}\right)^{-3}=$$

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3\left[\prod\left(\frac{3-2\alpha}{3}\right)^{\frac{3-2\alpha}{3}}\right]^{-3}\Rightarrow$$

$$T(\alpha) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 m$$

等号成立仅当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(2) 前面的 ② 式

$$\prod\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

不仅可以推广成(A_4)式,它还有一个"貌若天仙"的"配偶"

$$8\prod\csc A \geqslant \prod\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right) \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 \tag{⑥}$$

不仅如此,⑥ 式还可以从指数方面推广成(A_4)式的配对式:

推广 28 设 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,3)$,$\alpha+\beta+\gamma=3$,且满足 $\alpha<3\gamma$,$\beta<3\alpha$,$\gamma<3\beta$,则对任意 $\triangle ABC$,有

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)^{\alpha}\left(\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^{\beta}\left(\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)^{\gamma} \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 e \tag{A_5}$$

其中

$$e=\left[\prod(3-3\alpha+\beta)^{3-3\alpha+\beta}\right]^{-\frac{1}{4}} \tag{⑦}$$

显然,当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,$e=1$.(A_5)式化为 ⑥ 式右边.

证明 我们证

$$(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\beta}{3},\frac{\gamma}{3}\right)\Rightarrow\sum\alpha_1=\frac{1}{3}\sum\alpha=1$$

$$\begin{cases}p=x^{\alpha_1}y^{\beta_1}z^{\gamma_1}\\ q=x^{\gamma_1}y^{\alpha_1}z^{\beta_1}\\ M^{\frac{1}{3}}=m=x^{3\gamma_1-\alpha_1}\cdot y^{3\alpha_1-\beta_1}\cdot z^{3\beta_1-\gamma_1}\end{cases}\quad(M=m^3=x^{3\gamma-\alpha}\cdot y^{3\alpha-\beta}\cdot z^{3\beta-\gamma})$$

再记 $T(\alpha_1)=\prod\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)^{\alpha_1}$(应用赫尔特不等式)$=$

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^{\alpha_1}\left(y+\frac{1}{z}\right)^{\beta_1}\left(z+\frac{1}{x}\right)^{\gamma_1}\geqslant$$

$$p+\frac{1}{q}=p+\frac{1}{3q}+\frac{1}{3q}+\frac{1}{3q}\geqslant$$

$$4\left[p\left(\frac{1}{3q}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3^{3/4}}\left(\frac{p}{q^3}\right)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow$$

$$T(\alpha_1)\geqslant\frac{4}{3^{3/4}}\cdot m^{-1/4} \tag{⑧}$$

应用恒等式

$$1=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=yz+zx+xy=\lambda\left(\frac{yz}{\lambda}\right)+\mu\left(\frac{zx}{\mu}\right)+v\left(\frac{xy}{v}\right)\geqslant$$

$$S\left[\left(\frac{yz}{\lambda}\right)^{\lambda}\left(\frac{zx}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{xy}{v}\right)^{v}\right]^{\frac{1}{S}}(\text{其中 } S=\lambda+\mu+v)\Rightarrow$$

域外高手

$$x^{\mu+v}\cdot y^{v+\lambda}\cdot z^{\lambda+\mu}\leqslant\frac{\lambda^{\lambda}\mu^{\mu}v^{v}}{S^{S}} \tag{9}$$

我们令

$$\begin{cases}\mu+v=3\gamma_1-\alpha_1\\ v+\lambda=3\alpha_1-\beta_1\\ \lambda+\mu=3\beta_1-\gamma_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=1\\ \lambda=1+\alpha_1-3\gamma_1\\ \mu=1+\beta_1-3\alpha_1\\ v=1+\gamma_1-3\beta_1\end{cases}\Rightarrow P(\alpha)=\prod\left(x+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}=$$

$$\left[\prod\left(x+\frac{1}{y}\right)^{\alpha_1}\right]^3=[T(\alpha_1)]^3\geqslant\left(\frac{4}{3^{3/4}}\cdot m^{-1/4}\right)^3=$$

$$\left(\frac{4}{3^{3/4}}\right)^3\left(\prod x^{\mu+v}\right)^{-\frac{3}{4}}\geqslant\left(\frac{4}{3^{3/4}}\right)^3(\lambda^{\lambda}\mu^{\mu}v^{v})^{-\frac{3}{4}}=$$

$$\left(\frac{4}{3^{3/4}}\right)^3\left[\prod(1+\alpha_1-3\gamma_1)^{1+\alpha_1-3\gamma_1}\right]^{-\frac{3}{4}}\Rightarrow$$

$$P(\alpha)=\prod\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)^2\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3e$$

等号成立仅当 $\alpha=\beta=\gamma=1$(此时 $e=1$),且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

以上述证明可知,(A_5) 式的证明比 (A_4) 式的证明要难,技巧性也更高.应用同样的技巧,我们可构造推广式(对于锐角 $\triangle ABC$)

$$\prod(\sin A+\csc B)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3S_1(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\prod(\sin A+\sec B)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)^3S_2(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\prod(\cos A+\sec B)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{5}{2}\right)^3S_3(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\prod(\cos A+\csc B)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3S_4(\alpha,\beta,\gamma)$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,3)$,$\alpha+\beta+\gamma=3$.$S_i(\alpha,\beta,\gamma)(i=1,2,3,4)$ 是关于 α,β,γ 的代数表达式.

(3) 我们曾多次应用重要的三角恒等式

$$\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1 \tag{10}$$

建立过许多漂亮的结论.

如果我们设 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$,且使 $\theta+\frac{A}{2},\theta+\frac{B}{2},\theta+\frac{C}{2}$ 均为锐角,并记

$$S(\theta)=\sum\tan\left(\theta+\frac{B}{2}\right)\tan\left(\theta+\frac{C}{2}\right) \tag{11}$$

由于在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内正切是增函数,因此有

$$S(\theta)\geqslant\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1 \tag{12}$$

等号成立仅当 $\theta = 0$.

但这样的特例并非常有，也许有人要问，当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，有结论

$$S(\theta) \geqslant D^2(\theta) > 0 \qquad ⑬$$

成立吗?其中 $D(\theta)$ 是摆脱了 A,B,C 的只与 θ 有关的函数式代数表达式.

如果能成功建立⑬式，那么我们在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时就能建立优美不等式(设 $\lambda,\mu,\nu > 0$)

$$\sum(\mu+\nu)\tan\frac{A}{2} \geqslant 2\sqrt{\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu} \qquad ⑭$$

的每参数推广式

$$\sum(\mu+\nu)\tan\left(\frac{A}{2}+\theta\right) \geqslant 2\delta D(\theta) \qquad ⑮$$

其中

$$\delta = \sqrt{\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu} \qquad ⑯$$

其实，如果增设些限制条件，⑮式是存在的.

推广29 设 λ,μ,ν 为正数，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{6}$ 使 $\theta+\frac{A}{2},\theta+\frac{B}{2},\theta+\frac{C}{2}$ 均为锐角，且满足条件

$$S(\theta) = \sum\tan\left(\theta+\frac{B}{2}\right)\tan\left(\theta+\frac{C}{2}\right) < 9 \qquad ⑰$$

则

$$T_\lambda^{(\theta)} = (\mu+\nu)\tan\left(\theta+\frac{A}{2}\right)+(\nu+\lambda)\tan\left(\theta+\frac{B}{2}\right)+(\lambda+\mu)\tan\left(\theta+\frac{C}{2}\right) \geqslant 2\sqrt{(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)(1+Q(\theta))} \qquad (A_6)$$

其中

$$Q(\theta) = \frac{8\tan 3\theta}{\tan 3\theta + 3\cot\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)} \geqslant 0 \qquad ⑱$$

显然，当 $\theta = 0$ 时，$Q(\theta) = 0$，(A_6) 式化为前面的式⑬.

证明 由已知条件有 $\tan 3\theta \geqslant 0$，且设

$$\begin{cases}(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\theta+\frac{A}{2},\theta+\frac{B}{2},\theta+\frac{C}{2}\right) \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ (x,y,z) = (\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma)\\ t = \tan 3\theta\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}+3\theta \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta = \left(\frac{\pi}{2}+3\theta\right)-\gamma \Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = \frac{1+tz}{z-t} \Rightarrow$$

$$S(\theta) = yz+zx+xy = t(x+y+z-xyz)+1 \qquad ⑲$$

且

$$\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x+y+z \geqslant 3\tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \qquad ⑳$$

利用式⑲及不等式

$$\left(\sum x\right)S(\theta) = \left(\sum x\right)\left(\sum yz\right) \geqslant 9xyz \Rightarrow S(\theta) \geqslant t\left[\sum x - \frac{1}{9}\left(\sum x\right)S(\theta)\right]+1 =$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{9}t\left(\sum x\right)[9-S(\theta)]+1 \\ 9>S(\theta)>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$S(\theta)\geqslant\frac{t}{3}\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)[9-S(\theta)]+1\Rightarrow$$

$$\left[3+t\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]S(\theta)\geqslant 9t\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)t\Rightarrow$$

$$S(\theta)\geqslant\frac{3+9\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{3+\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$1+\frac{8\tan 3\theta\cdot\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}{3+\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$1+\frac{8\tan 3\theta}{3\cot\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\tan 3\theta}=1+Q(\theta)\Rightarrow S(\theta)\geqslant 1+Q(\theta)\Rightarrow \qquad ⑳$$

$$T_\lambda^{(\theta)}=\sum(\mu+v)\tan\alpha=\sum(\mu+v)x\geqslant 2\sqrt{\left(\sum\mu v\right)\sum yz}=$$

$$2\sqrt{\left(\sum\mu v\right)S(\theta)}\Rightarrow T_\lambda^{(\theta)}=2\sqrt{\left(\sum\mu v\right)(1+Q(\theta))}$$

即(A_6)式成立.

当$\theta=0$时,(A_6)式等号成立仅当

$$\lambda\cot\frac{A}{2}=\mu\cot\frac{B}{2}=v\cot\frac{C}{2}$$

当$0<\theta<\frac{\pi}{6}$时,(A_6)式等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形,且$\lambda=\mu=v$.

大家知道,代数、几何、三角是数学的三大基石,因此它们是数学家庭中的共父同母的三兄弟,千丝万缕,变化万千,丰富多彩,令人敬畏,却又美妙无限,趣味无穷,令人神往.

编后语　缺乏对命题方法及试题背景的研究会导致原创性试题缺失,以至陈题泛滥,更有甚者会波及全国大赛.比如在北京大学出版社1993年出版的单墫教授主编的《数学奥林匹克》竞赛篇p35例7为:

求最小正数λ,使对任意$n\in\mathbf{N}$和$a_i,b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$都有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

3年后这个问题成为中国数学奥林匹克国家集训队试题.

出乎意料,5年以后1998年全国高中数学联赛第2试第2题居然是:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n \in [1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

这种现象的出现是对偌大中国竟不能命一道“安全”的试题最大的嘲讽，也是长期不重视命题研究与试题评价的恶果.

“随机时代”的精英处境与信仰危机

田廷彦

· 十分矛盾的是,科学和科学家在今天被冷落的一个重要因素恰恰是科学的兴起.科学家往往得到贵族的支持,但科学恰恰又是在与封建势力、宗教迷信的斗争中发出光彩;而民主、自由、科学越能实现,科学家也就越发退到历史后台.在今天,科学与技术联系紧密,离信仰却越发遥远.

· 热力学和信息论认为,越是随机的东西就越贬值;但文学艺术未必这么认为.在一个复杂的时代,精英相对失落了,人们欣赏的是强者.强者与精英已不是同类概念,它更易实证(实证主义也是科学“不幸”带来的).所以,即使人们意识到科学与信仰的关系,也无法阻挡科学家被冷落.

· 不能把科学、信仰同迷信之间的区别,简单地看成“一个是正确的,另一个是错误的”.其实科学和信仰也是人创造的,人不可能做到纯粹的客观,也不是无所不知的神,所以科学与信仰常常在犯错误.科学、信仰同迷信之间的区别,具有深层次的文化含义.

“文化大革命”结束后,有的红卫兵因为得知“万恶不赦”的刘少奇平反了,于是出家当了和尚.

1992 年,十四大确立要搞市场经济,北京某著名高校一老教授跳楼自杀.

这些人因为受时代的局限,所以观点不一定正确,但是他们的作为也是令人感叹的,因为他们有真信仰.

不过,若说所有具有信仰的人的毁灭都是由于受到时代的局限,那可并不确切.时代并不一定总在进步,而且往往无法判断时代在进步还是退步.我们只能说时代在转型,而信仰就是时代转型最大的绊脚石.

1980 年代初,陈景润是中国人心目中的偶像.直到很晚我才知道,路透社当时的评论是:“中国一位数学家在一个不太有用的问题上取得一些进展,他受到本国人民的崇拜,让西方的电影明星都妒忌.”要是在当时就把路透社的评论公之于国人,很多人会不以为然,因为电影明星毕竟是资产阶级情调的“代言人”,多少有些腐朽.我当时不过是一懵懂学生,也感受到“科学的春天”的蓬勃向上,自然接受这样的价值观是好的,甚至是“天经地义”的.

但是,现在的情形完全不同.价值趋向多元化,除了违法乱纪,同性恋、卖淫、吸毒都已经宽容了,还有什么不能宽容呢?有!那就是信仰.否则不同宗教之间也不会如此水火

不容了.所以说,信仰绝对是社会转型最大的绊脚石,哪怕有那么一点价值取向也不行.人与人的最大反差,不是身材长相、智力体力,而是价值观.

美国人承认,人都是为自己的,但必须诚信,诚信是起码的,更了不起的是做好事(所以他们觉得雷锋了不起),他们提倡在诚信的基础之上做好事.但是我们这里的某个人,可能在40或20年前嗓门比谁都响,确实也在学雷锋,在今天则大搞假冒伪劣,诚信全无.这么大的180度反差能在一个人身上实现,唯一的解释只能是,这个人根本没有任何信仰,连一点原则和底线都可以放弃.

这就是所谓的"识时务者"?

看看书上是怎么说的.

首先,科学、科学家的价值观本倒也并非天经地义、一统天下.在西方,科学的极度受崇敬是从牛顿到爱因斯坦的这段日子(牛顿逝世后英国为他举行国葬,几位公爵、伯爵和一位大臣为他抬棺材;爱因斯坦尽管要求丧事从简,但他逝世时亚洲首脑们正在召开万隆会议,会议破例举办了追悼仪式),不过几百年,主要是伏尔泰、圣西门等人在起作用.在当时,科学是向基督权威发起冲击的有力武器.

到叔本华,他区分了认知与意欲.比如学习是认知,谈恋爱是意欲.前者容易比高低,我觉得这可以用来解释科学家受崇敬的原因;但在意欲范围内就全然不同,否则谈恋爱也可以比赛了.19世纪中后叶,最大的颠覆开始了,达尔文、尼采都强调,没有什么永恒不变的观念,世界无非永远是强者的世界,永远唱强者的赞歌(这大概是唯一的"信仰"?).进化论的力量主要不在于它的什么新概念,而在于它的颠覆性.现在由于世上多数人接受了对意欲的强调而淡化了对认知的渴求,所以科学家的地位大大降低了.

19世纪另一个伟大思想来自物理学.热力学告诉我们,散发到太空中去的热是不能回复利用的,否则就违反了热力学定律.这个定律微观层面的解释是,热能是一种分子随机运动,也就是说,越是随机的东西就越贬值!在此基础上,香农提出信息就是不确定性的减少,也就是说信息和能量一样,它的价值也可用确定性来衡量.电子计算机发明以后,我就在想,既然文字、音符和数学符号是有限的,为什么不用计算机去搜索呢?计算机必定可以在海量的排列组合中(大多数毫无价值,这正是由于随机性),搜索出杜甫的诗歌、贝多芬的音乐和怀尔斯证明费马大定理的论文,但是这个数字实在是太大了,还不如人的大脑来得快.不过,人的大脑可不是随机、盲目地进行搜索(至于现代艺术后面还要提及),而是一个高级的思维过程,因此杜甫、贝多芬和怀尔斯就被称做精英.

无数例子表明,大自然是随机与优化共存的.如果宇宙纯粹是随机的,就会进人热平衡状态,不可能有这么丰富的结构.我以为结构的形成是优化在起作用.比如蛋白质折叠即依据能量最小原理,很快就完成了,计算机搜索则要花上几百几千年.同样,寻找网络中的最小路径,物理模型将在瞬间找到,而计算机搜索又是难以想象的繁复.最不可思议的是人脑.我们知道,计算机下棋主要也是靠大量的搜索,而象棋大师可以在很短时间内找到最佳或接近最佳的步数.诗人、音乐家在游山玩水时都能触发灵感,找到最合适最美妙的诗句或旋律,数学家又何尝不是如此?尽管今天算法在不断改进,但海量的搜索毕竟无法避免,远不如人脑来得快捷(更何况算法的设计本身就依赖于人脑).总之,这些发自

内心的不可思议的直觉，比常人更快地达到优化，我们称之为天赋.天赋本来就被定义为单位时间内处理信息的速度，不是指哲学式的深刻.

生物学家研究一种药物，比如抗癌研究中需要对大量化合物进行筛选、组合与提炼，这一过程实在是不大可能有太多的直觉起作用.因此，很少有人说生物天才.其实我相信生物学也需要天赋，只不过极端复杂的研究对象和庞大的研究团队掩盖了个人能力而已.

当随机性和复杂性无限加大的时候，个人能力越发不起作用.但经济学是只管结果的，只要稀缺，就是值钱的.通俗地说，尽管证明哥德巴赫猜想是很不容易的，买彩票中亿元大奖也是不容易的！一个是难度，一个是机遇(其实证明哥德巴赫猜想也需要机遇，比如正好选择一个正确的方向，否则就陷入死胡同).愈是强调随机的世界，机遇当然就愈加重要.

社会演进或许可以从生命进化中获得借鉴.生命进化就是一个不断优化自己以更好地适应环境的过程.这就是所谓的“适应性”.进化论专家说：“适应性造就复杂性”“进化是个修补匠.”也就是说面对复杂的外界环境，优化是个时时监控、时时改变的运作过程，不是输入初始条件就可以计算的.在这里有两个最大的“矛盾”(本质上也差不多).一是生命进化似乎朝着更有结构的方向，它是如何远离热力学第二定律所描述的热平衡态的？这导致普里戈金耗散结构论的产生.其次，在生命进化的过程中，优化与随机并存.优化似乎是一宏观现象，而突变则是微观的基因行为，如果基因突变是随机的，它是怎样与宏观生命的优化相协调的？难道真的有一半左右的生物全然由于基因突变而变得更糟，黯然退出自然舞台吗？

人的思维和意识也存在类似问题.尽管人的智商和情商的提高都不像计算机那样，两者也有很大差异.如前所述，智商，比如搞数学或文艺，是内在的优化过程，人际关系相对不太重要，几乎不存在适应性问题.这种优化的目的，是达到更高的确定性，更加优秀、出色，结构性更强；如果一个社会要求科学家或艺术家要像商人一样会搞人际关系，我认为这个社会肯定大有毛病.另一方面，情商则是外在的优化过程，这个优化过程使我们更加适应环境，以达到利益最大化.情商不要求我们出类拔萃，而恰恰是接近社会平均水平，根据正态分布，平均才是主流，诚所谓大智若愚.随着随机性和复杂性的逐渐加强，情商也就比智商重要了.个人卓越的推理、计算和想象力越发不起作用.科学家和艺术家的天赋越发激不起世人的兴趣，歌星影星会走红，管理家企业家会吃香(而踢球的那帮人还算比较亏，因为成绩大家有目共睹，不太好蒙混过关).

与生命的优化相比，算法是“简单”的，这个好处是它可以发展得很快，而生命和意识的进化则十分缓慢(我们不比5000年前的人聪明多少).今后，当计算机的搜索速度超级加快呢？其智能进一步提高呢？是否人类就不需要自己来创作诗歌、音乐和数学了？是不是会彻底铲除精英、天才了？想想这真是有点可怕.现在明白当代社会之所以走上这条道路的必然性了吧！人类精英可以定义为做高度确定性的事情.随着随机性和复杂性的提高，个人天赋越发不重要，但这在观念上可能会走向另一个极端.谁更喜欢随机性？当然是那些素质差、不学无术的人，这也与热力学或信息论的结论一致.举两个最能体现随

机性的事件，一个是打的，一个是排队，这跟一个人的学业、品德之类无关(权势姑且不论，他们不需要打的和排队).差的人当然喜欢全社会的所有事务都像排队和打的，这样他们就与优秀的人机会彻底平等了.而且排队更好，因为差的人甚至还可以插队，这样他们非但没有劣势，还占据优势，而好的人不会去插队，这就是大名鼎鼎的逆向选择——也就是说，在一个毫无秩序和规则的环境中，最守规矩的人寸步难行.

十分引人思索的是，艺术与爱情在历史上鼓吹自由与平等，不能说不是一支深入人心的强大力量；但科学也在鼓吹自由与平等，科学催生了法律，发展了技术，使人先与其他任何动物拿到了武器，这样人就不得不处于一种战略平衡，不得不进行制度改革，否则大家同归于尽就为期不远.我认为在社会制度演进方面科学起的作用更大，为什么它反而被人漠视呢?原因就在于艺术与爱情比科学更具亲和力.不幸的是，迷信其实也是利用了这种亲和力.

现代艺术与爱情不认为随机的东西都是贬值的，所以涂鸦作品就应运而生.说到这里，倒可试图阐明信仰与迷信之间的区别，这个问题其实并不容易回答.迷信当然是错误的，但是科学和信仰并非以"正确的"面目出现而与迷信划分界线.

《随机致富的傻瓜》里提到，某个原始人在摸自己鼻子的时候，天突然下雨了，于是就发展出一套摸鼻子求雨的祈祷仪式.摸鼻子和下雨有什么关系?这显然是迷信.对每个有意识的人来说，察觉世界万物之间有联系并不困难，但迷信者却喜欢从极其偶然的事件中寻求莫名其妙、幼稚可笑的联系，在此过程中，没有任何逻辑思考和实验证实，全然凭借自己的主观感觉.换句话说，迷信可能是因为人们对随机性的认识不够，把毫无价值的巧合错当成是很有价值的必然事件.但信仰就不同，它伴随必不可少的严肃深入、理性抽象的思考，特别是它决不相信小概率事件，不相信生活中两件难得碰到一起的小事有什么深刻联系，它认为具有某种逻辑或历史必然性的事物之间才算有深刻联系.人类文明史上必然会有一段时间相信一个万能的神，只不过我们给他取名叫上帝；而对自然认识到一定程度，必然会有人坚信大统一物理学.也许上帝根本就不存在，大统一物理根本就是错误的，但这不是迷信，而是信仰，是世界不同地点、不同时代的精英们都不约而同想得到的东西，所以它不是迷信.

也许有人会反驳说，算命也是必然出现的，它是一种信仰么?不，算命只能是迷信.算命简直到了马路上随便什么人都可以做，其招摇撞骗行径不言而喻.当然，我们必须承认，任何历史事件，只要存在相当长的一段时间，或者说是"成气候"，它就有学术价值.算命本身不可信，但是算命毕竟是中国历史上不可或缺的文化现象，特别是《易经》，是否胡说姑且不论，但谁也不能忽略它在中国历史上起过作用这一事实.历史科学和社会科学也是科学，科学最了不起的一点就是对事实的尊重.

于是我们可以信仰科学，但不可以迷信科学，科学本来就与迷信水火不相容.

总而言之，对于信仰，主要必须同时具备以下几个特征：① 发自内心；② 不约而同，也就是说四海精英都可想到，且所想之事物高于生活，决不与生活琐事与切身利益挂钩；③ 有一定深度的理性、哲学思维，除却这三条中的任何一条，就不可称之为信仰.

人类社会经常有一股强制力量或媒体恶意炒作，把某些人吹捧上天，这就成为教条，

带有迷信性质了.

算命则依赖于投掷铜片之类的偶然事件猜测人的命运,这种鼓吹随机性的做法违反了第3条,而与个人命运连在一起,又违反了第2条.所以,算命更是迷信.违反第3条是迷信最大的诱惑力.凡所有的迷信都有个特征:形象易懂,或虽不易懂但也有神秘感,拒绝怀疑,拒绝理性思考,没有深入、艰苦、漫长的探索过程,喜欢从随机事件中寻找"启示".正因为它所依托的是无处不在的随机事件,它面对的是难以接受怀疑和理性的公众,也就是说它用普遍的事争取普遍的人,这恰恰是科学所不具备的.

心理学中心理暗示的作用似乎也与迷信类似,不过心理学家始终认为这种做法是科学的.

爱情与算命一样,也违反了第2、3条,我觉得爱情确实包括一定的迷信成分.不过有一点可以肯定,即使爱情是迷信,一般不会对社会造成问题,因为它纯属个人行为.

还有一种现代特别流行—— 自己过分相信自己,叫做自恋,显然不违反第1条,也未必违反第3条,但是违反了第2条.所以自恋也可算是对自己的迷信.自恋之所以在今天流行,是因为今天随机的世界其价值多元化了,人与人越发不一致了,这个时候人只能先选择相信自己.

所以,真正的信仰是不简单的,甚至是要付出惨痛代价的!

量子力学诞生后,情况又发生了新的变化,比之在热力学中,随机性的地位更加上升.现代艺术与量子力学几乎同时诞生,具有文化上强烈的相关性和逻辑性(量子力学认为概率过程本身是逻辑的、确定的,在这里我们必须区分几个概念,一是逻辑性,一是因果性,一是确定性,一是随机性.特别是,随机性的对立面是确定性,而不是逻辑性和因果性.生活中任何细微的变化我们都可以用一个"瞬时"逻辑或因果概念解释,就像马尔可夫过程;宏观过程也一样,但不一定是确定的.所以数学是数学,物理是物理,佛教是佛教).

总之,科学在牛顿阶段是机械化的钟表世界,在热力学与进化论阶段,承认随机的东西,但越随机就越贬值;到了量子力学阶段,随机性就不那么贬值了.文学艺术其实是一直跟科学对着干的,它们认为个性和缘分之类在随机世界中方能体现无遗.文学和科学一直就这样:在反对独裁专制时并肩作战,同时又为了共性和个性的价值问题争吵不休.从斯诺的《两种文化》一直到1990年代的《高级迷信》、"索卡尔事件",真是热闹非凡.显然,科学家和独裁者都不希望世上所有事务都像打的和排队(喜欢打的和排队的人当然是差人,但不喜欢的人未必都是精英,还包括伪精英).文学艺术甚至可依此而将科学也理解为某种强势权力而进行批判,或者认为科学反对独裁不如它来得彻底.由于量子力学到复杂性的发现,科学家承认世界是复杂的,线性的科学是简单模型,这意味着科学与人文开始靠近了,这也是最近10年来的新气象.

但科学终究不会去研究个性.复杂性无非是确定与随机的混合作用,它当然不否定逻辑性,只是认为确定性世界太简单,不能解释天气、地震、心律、意识和生命进化等诸多方面的问题.在中国历史上,凡是新的统治者特别是少数民族登上舞台,总有些汉族知识分子拼命守节,结果被杀了.值得思索的是,他们总能找到死的理由,但也有很多知识分

子决定好好活下去.爱国还是保守,卖国还是宽容,聪明还是愚蠢?只能是各人各解释,死有死的逻辑,活有活的逻辑.这就是社会文化的复杂性,符合一定的概率统计,但难以深究.概率本身也是一种逻辑,非常适用于复杂世界,但是如何比概率走得更深入呢?

不得不承认,现代艺术在随机性方面走得更远;还有规模巨大的现代商业,炒房、股票、彩票的出现大大冲击了人们的头脑,使人们怀疑兢兢业业搞研究工作究竟还有多少价值.《随机致富的傻瓜》的作者根据后现代思想家德里达的作品常让人摸不着头脑,用蒙特-卡罗随机发生器生成了一段语言,尽管胡说八道,但很能蒙人,与德里达说的话很像.同样的例子还有"索卡尔事件".作者问道,难道古代和近代一些精美的雕塑竟然是美术家的随机过程?为什么到了现在商业,随机性就那么强呢?其实,现代艺术和商业在随机性上比科学走得更远,源头恐怕还是科学,特别是量子力学.故而"金融大鳄"索罗斯针对现代商业模式将自己创立的基金命名为"量子基金",因为他崇拜量子物理学家海森伯.

强调随机性的结果必定是漠视精英(注意这是一逻辑判断,强调随机性针对的是确定性,而不是逻辑性).现代社会是小看精英的,不是它想这样做,而是必然导致的结果.仪器先进了,名医就少了;传统文学和交响乐的精巧布局、宏大叙事也终结了.快餐文化出现了,肯德基的配料恐怕比中国传统菜肴简单得多,很多人说它是垃圾食品,但它还是站稳脚跟.京剧说书没人听,超女快男出现了,文化像布朗运动,瞬息万变;草根才是主流.尤其是计算机的发明,只要把别人的文章点击到自己的博客中,略微改变一下,就是自己的想法了.只有一块领地还不敢"侵犯",那就是抽象思维领域,一个商人或运动员还不至于混个数学院士当当,同样,现在也没人敢宣称自己是思想家.现在什么家都有,就是没有思想家,任何综艺节目还不至于为参赛者的思想或境界打分,否则也太离谱了.

随机性必定冲击人们的信仰和宗教.达尔文、尼采以后,特别是进入现代社会后,精英已不与强者画等号了.不做精英做强者.对于强者,我觉得除了跟外界斗之外,还要对内心、对自我斗争.但是对自我的斗争,除了让自己胆子大一些,意志力强一些,不就是价值观的改变吗?于是明白了,真正成功的人士,必须放弃一些原则和底线,尤其是不能坚持固有信仰,或者必须让自己的信仰和旧的价值观"冬眠".这样的人才可能成功.反之,那些"不成功"的人,如果是智力、身体、懒惰、性格或机遇的问题,才是真正的"不成功".

如果出于不愿意放弃道德底线或信仰,根本不愿意做一些事,似乎并不是真的不成功.但是,这也可以被看做是"不成功".刚才已经定义过强者了,谁说对外界的斗争失败才是唯一的不成功?对自我的斗争失败了,难道也不能算"不成功"?

毕竟,这个世界已几乎没人关心你成功或不成功的原因了.

孤独虞美人——数学·诗歌·艺术断想

田廷彦

学生时代的快乐体验之一，就是跑自然博物馆摘抄各种动物的名字.这样的举动总免不了旁人的目光.记得一天中午，古生物厅里就我和母亲两个人，我感到惬意极了.直面亿万年前这些庞然大物的骨骼，并不感到可怖.我偷偷摸了摸黄河象的化石，坚硬得很.

从初一到大学的最后一天，呆在阅览室里"觅宝"一直是我的一大癖好.那时复印不方便，每每看到中意的图书，就把其中最精彩的内容抄在笔记本上，常常是一字不漏地全抄.不过印象最深的还是读初中时，那时课业压力并不大.记得曾在中学阅览室里抄过一本名叫《天文万花筒》的小书，几乎每天都抄.一个星期六下午，阅览室里人非常稀少.我抄完一段，带着一丝神秘感抬头看看窗外蔚蓝的天空，似乎觉得和先前不大一样了.

不知不觉，到了关门的时候，我一个人走出阅览室，书包的重量没有改变，我却又觉得它重了些.这时天色近晚，西边还挂着一丝余晖.操场上，几个同学还在打篮球.偶尔传来几声鸟叫，微风摇动着梧桐树的叶子，柔和的阳光透过树叶的缝隙落到墙壁上，像跳动的音符.这一切是那么宁静，却不是死寂.刹那间，我模糊了自身和周围的分界，一种无比美妙的感觉涌上心头.

可惜这种体验再也没有重现.十多年后一次出差，从火车上观看日落.那时太阳已不再刺眼，还整个地浮在空中.眼前的一切——农田、房屋、果树和鱼塘——都处于飞快的变动之中，俨然成了一幅幅风景画，太阳就是所有这些画的共同背景.顿时，我觉得太阳像一个守护神，抚育着地球上的生灵——包括多少目空一切、自私自利的人.随着历史一页页地翻过去，一些曾经风光过的人将湮没无闻.太阳依旧是太阳，天空到处是湛蓝的.

后来有一天，我在办公室翻阅报纸时，偶尔读到了描述三幅经典画面的诗句，那是一个古人的感慨.与我不同，他面对的不是夕阳，而是下雨：

少年听雨歌楼上，红烛昏罗帐；壮年听雨客舟中，江阔云低，断雁叫西风.而今听雨僧庐下，鬓已星星也.悲欢离合总无情，一任阶前点滴到天明.

这是蒋捷的《虞美人·听雨》，因为写得太直，不算宋词中最著名的篇章.当然它仍不失为一部好作品，少年的憧憬，壮年的奔波，老年的凄凉.从"上"到"中"，再到"下"，一生竟能如此高度地浓缩于寥寥数语之中.尤其是选景极佳，又有一件共同的事——"听雨"——把它们串在一起，真是回味无穷.

我觉得，这首词的另一高妙之处，就是对人"生而孤独"的体验. 歌楼里有那么多美女在唱歌，客舟中或许有不少人谈笑、发牢骚，为什么唯独听雨给予作者很深的印象呢？史书说蒋捷生性不喜交游，不过，与其说他在这首词里宣扬悲观厌世，还不如说是对孤独的生动体验啊！

我又想起了英国前首相希思. 作为政治家，他的名声超过世间大多数音乐家，但希思心目中真正向往的却是音乐. 也许正是因为他认为音乐能够面对孤独的真我的缘故吧！

诗人是孤独的，音乐家也是孤独的，但我觉得他们的孤独可能还比不上数学家的孤独 —— 又有哪个行业的知音比数学家的还要少呢！诗人往往选择自杀，音乐家的这类记录则比较少见，数学家更是活得好好的，这还不能说明问题吗？数学家是如此擅长于默默享受孤独，也许正是由于数学比音乐或诗歌更少地与现实有瓜葛；也可能是数学家永远面对一个无穷的未知世界，永远有超越自我的感觉，不为自己的才思枯竭而痛苦.

是什么促使天才们这么做？凭借自己的头脑，即使不想当大老板，也可钻进公司做个薪金不薄的职员. 但他们没有 —— 因为爱惜自己的天才，于是宁可安贫乐道淡泊一生；因为明白自己的使命，于是数学史上大师也就层出不穷了. 远的不说，就说当代：有以办公室为家的德 · 乔治；有四海漂泊的爱多士；有唯一懂得 15 000 页有限单群证明的戈朗斯坦；还有代数几何学之集大成者格罗滕迪克，他拒领克拉福德大奖，隐居山林；今天，解决庞加莱猜想的佩雷尔曼无意中效仿了他……

科学随笔

人们老是把数、理、化并列，有时也把数学和计算机、下棋相提并论. 但专家指出，与数学最接近的，很可能是音乐与诗歌. 爱因斯坦不是说过，这个世界可以由诗组成，也可以由数学公式组成. 电磁学泰斗麦克斯韦不是成天捧着电学手册计算各种电器的功率吗？他常写诗，他的方程组不也正是一首伟大的诗吗？

我相信，无论是写诗、作曲，或是创造科学理论，很重要的一点就在于整体上的把握. 天才们追求的是整体的、统一的、深度的和谐，这无疑是非常困难的. 整体性越强，难度也就越大，也就越难以为常人所理解. 这也是普通人与天才的重要区别之一. 科学中以数学的整体感最强，所以没有人考数学是可以花一两个晚上"突击"出来的；作为对应，文艺中整体感最强的可能是音乐. 有的时候，作为欣赏者都震撼不已，真不知那些创造者"疯"到什么地步了. 也许控制情绪的一个行之有效的办法是意识到创造是无穷尽的，是群山而不是孤峰，前面还有更美的景色等待着，故而从忘我中暂时解脱出来是必要的.

相比之下，从事于长篇创作的人，结构上可以不那么紧凑，但对结构所费的心思却可能更多. 在《红楼梦》中，我们看到每位公子、小姐"创作"的诗歌，都要与其性格相符. 这种写作难度可想而知. 长篇与短篇创作，像是体育比赛中短跑依靠的是爆发力，而长跑则需要耐力. 两者不可比较. 从这个意义上，我不完全同意把发明理论的数学家看得比解难题的数学家高明. 也许发明理论可以帮助我们找到一个大金库，这对整个数学来说更加重要，但是灵感一现，找到解题方法时的那种"众里寻他千百度"的欣喜，却是旁人无法体会的（我的中学数学老师为之作了一个意味深长的比喻：精神鸦片）. 当然，无论是短的还是长的创作，整体永远是重要的. 后现代艺术尽管不再追求传统艺术的细腻、雅致的风格，但在简约中仍需要见到整体的冲击力，这样的要求可能不是降低了，而是提高了. 当

然，这里的标准越加不一致，很多作品价值并不大．总之，文科与理科的主要区别在于形象思维与抽象思维，但从整体把握这一点来看，文艺天才与理科天才在本质上倒是没有什么区别．

我还相信，技巧无疑是非常地重要，但仅有技巧是不够的，真正伟大的作品更需要真情．为创作而生，为创作而死，这也许以诗人最为敏感．当他们在独裁社会下无法表达理想时，想要去死；当他们达到辉煌的创作高峰而无法超越时，也想要死．天才都是宇宙的精灵，创作是他们的有效生命 —— 这赋予了生命的新的意义，即不再将学习工作退休、买房结婚生子看成是最重要的任务去完成．爱因斯坦多次说过科学与艺术的这方面作用，即逃避无聊或无奈的生活，或是摆脱物欲的纠缠，达到内心的安宁．所以，尽管爱因斯坦没有想自杀，但他对婚礼、葬礼之类的事持极端的低调，足以说明一切．

这也是我把科学、艺术看得比棋牌"高级"的原因．因为棋牌的正当目的，除了谋生，便是炫耀智力或对技巧的兴趣(也许我的理解是有偏颇的)，尽管兴趣本身就可认为是一种情，但这类"情"绝对不是通过其本身得到表达的，更何况计算机技术已经削弱了棋牌的魅力．尽管很多人也试图将围棋与中国哲学扯上关系，可我认为其中毕竟含有不少牵强．同样道理，历代武侠小说中，真正的高人没有一个仅仅是玩弄武艺的．蒋捷或天才李煜的《虞美人》，还有许多灿烂诗篇，无一不是文字中见真情，这是对人生的感慨；爱因斯坦的宇宙宗教感情，则是对宇宙的赞叹．文学渲染的是有我(《听雨》便是典型)，而科学赞赏的是忘我．所有的创作都须从孤独中得到体验和升华后方能完成．

这都是人类中真正智慧的头脑被丰富的经历洗练后达到的极致的创造，肯定还有更多第一流的创造没能流传下来．这里有种种原因，有的天才无所谓出名；有的则是没有被保护好，他们又不太懂得人情世故．与其说是情商不高，不如说是环境不好．爱因斯坦的情商并不低，冯・诺伊曼更是个生存能手，但是他力荐图灵与哥德尔这两位不怎么会生存的天才，使世人看到了他们的绝代光华．更典型的是玻尔，他一开始做学生时受到电子发现者汤姆孙的冷遇，后来自己当了老师，发誓不能重蹈覆辙，于是才有泡利与他吵架、海森伯与其争执的故事．冯・诺伊曼和玻尔或许在购物时很会"讨价还价"，但在发现其他天才时则是一个无与伦比的欣赏者，因为他们的内心是相通的．

大家都知道印度数学奇才拉马努金写信给哈代的故事，另一件事知道的人就不多了．那是在 1918 年的某一天，拉马努金因为不适应英国的生活环境，企图卧轨自杀未遂，被带到警察局．哈代跑到警察局为之担保，说拉马努金是皇家学会会员，还说会员享有豁免权．警察将信将疑地放拉马努金走了．不久警察察明，其实哈代为拉马努金尚未争取到会员资格，而且会员也并不享有豁免权．正式当选是在一个月以后．利特尔伍德还担心拉马努金自杀一事会影响他的当选，设法弄了张拉马努金精神无恙的证明（事后没用上）．1936 年哈代自己出了车祸，受了点皮外伤．本来他以为到警察局跑一趟说明一下情况就可以了，没想到一位高级官员拉住他说，你以前曾为拉马努金"撒过谎"．尽管算不了什么大事，对于哈代这样有头有脸的人当然还是不利的，但也从另一个角度说明他是多么地爱才．

牛顿与哈雷的例子更是典型．性格古怪的牛顿若是没有哈雷的热心协助，他的工作

可能还将封存许多年.还有纳什,若非妻子与普林斯顿大学的"精心呵护",是没有《美丽心灵》的故事的.(《美丽心灵》给予我的最大启示是,不少天才过分投人,往往表现出一种自我,所以"善"也是另一种人类最可贵的东西.也许某个天才医生发明了一种药可以有效地抵抗癌症,延长了无数人的生命,他的贡献,如果一定要比的话,当然比一些只会临终关怀的人要大,但也不排除这个人比较贪功.所以,不能说他的贡献可以替代那些临终关怀的人.即使癌症被攻克了,弥留之际的人也是应该得到临终关怀的.)

总的来说,天才既有"进得去、出不来"的,也有"进得去、出得来"的,对此不可强求.也许比提高天才的情商更容易做的,是改善我们的环境.天才与环境的关系很复杂.有的无所谓功成名就,就像诸葛亮的朋友,闲云野鹤,逍遥自在.其实,发现他们的伯乐也不是像人们想象的那么少,关键在于社会是不是容忍他们的存在.谁都不否认布鲁诺、伽利略时的社会不是好社会,但他们的言论毕竟有产生影响的机会,宗教裁判所也是出于信仰而不是少数人的私利才对他们下手的.所以他们死得冤,却又那么光彩.反观中国封建社会,才更是扼杀天才的,因为皇帝们认为天才弊大于利.对于一个不求发展、只想维持统治的独裁社会,天才又有何用?但是,当我们的社会要求有发展的时候,情形就完全不同.假如阿贝尔生活在明朝,他的论文在中华帝国没有任何反响,我认为这是很正常的事.皇帝尽可以承认阿贝尔是天才,只是于己于国都无用.这就是赌场的游戏规则,你尽管对抗不了它,但可以不参加,赌棍们也没有干涉你,你还是完好的你.但是,在社会的经济科技文化要求有发展时,如果还用老一套就有点可悲了,比如一群人使用权力排挤了阿贝尔:不学无术的认为会管人比懂技术了不起;有一点点学问的则硬说自己的东西才是最有价值的,说阿贝尔胡说八道,他根本不配称天才——这是什么?这也是谋杀啊!谋杀思想.所以,当需要天才们的贡献成为推动社会的力量之时,不能像以前那样做.无论是优劣无分,还是劣胜优汰,都是腐朽的表现.而后者可能比前者更伤天才们的心,因为它取消了人们沉默或隐逸的权利,不能容忍懂得莫扎特却不会谈恋爱结婚的人,使保留自己的个性与价值观也变得困难.还不如"鸡犬之声相闻,老死不相往来".

所以,唯有宽松的环境,方能让创作达到自由的境地.人类社会在几千年内就达到今天的文明,实属不易,但人与人之间还不那么和谐,人的内心亦然.前者主要是围绕着两个方面,一是生存(主要是为钱),一是自尊;后者则是健康问题(包括生理和心理两方面).生存、健康和自尊是人生最基本的三样东西,既然它们仍占据了时刻需要考虑的主导地位,说明我们的社会文明是一种初级文明.在高级文明中,所有人考虑的都是沟通,做自己感兴趣的事,逐步达到自我实现,这个时候人依然不能摆脱痛苦和孤独,但却未必有遗憾.低层次的矛盾和误解(比如说两个小贩为一个摊位而打破了头)将不复存在.如果我们的社会进化到几乎不需要伯乐的地步,试想那该是多么美丽的景象:无论是希腊的沙滩,还是印度的森林,或是大学校园,都有人在这无穷的时空里投入无尽的想象,直接与宇宙对话、与自己对话、与逝去的伟大先人对话……我似乎找到了一种解释,数学、音乐、诗歌,这些大自然本来没有的东西,至少有一个功能竟如此相似——都是表达人生孤独的方式,这种孤独感,不是彻底的"信息丧失",而是某些表面交往不太能理解的流露,也是超越时代的壮举.也许在千里之外,或是百年之后会有人相知,会有人共鸣,尽管

对于初创者来说,那可能是一种奢求.

每个人都有孤独感.被排挤、被打击后的孤独是一种外在的、低级的孤独,是一种悲;创作中达到无人企及的孤独,是一种内在的、高级的孤独,或许是一种美(路遥就是为创作而耗尽生命的).尤其是后者,一般人即使能想象,也未必能达到;天才们能达到,也未必都表达出来.

尽管我很想模仿蒋捷写一首《虞美人·日落》,却迟迟无法动笔,我怎么可能比得上他的美丽哀愁?也许我只能去想,如果阅览室就是"歌楼",火车就是"客舟",那么我的"僧庐",它又在哪里呢?

编后语 在"东方论坛"上连叶中豪都将田廷彦称为"田大才子",可见小田兄也非浪得虚名,小田内心深处有一种挥之不去的精英意识与怀才不遇之隐,再辅以旧时小文人多愁善感,所以此文读之倒也有文如其人之感.

数学是高端文化,欣赏不易,不过编者以为数学要像乒乓球学习,走入"大球时代"和"短分时代".

过去乒乓球讲求大板劈杀,高速爆冲,刁钻发球,弧圈快攻,对阵双方往往交手二三回合就"速战速决".观众来不及看个明白便胜负已定,使比赛变得索然无味.1999 年国际乒联在哥本哈根专题研究"如何使乒乓球更有魅力".决定开启"大球时代",将 38 mm 球换成 40 mm 球.这样体积增加了 16.6%,表面积增加了 10.8%.使球在空气中的阻力增大,飞行速度下降了 13%,质量从 2.5 g 变成了 2.72 g,使得转动惯量增加,将旋转性减弱了 21%.2001 年在大阪举行的第 46 届世乒赛上首次启用"大球".运动员的接球率与回合数明显增多,银白色的飞行弧线无论在比赛现场还是电视机里都更加清晰可见.

2001 年,国际乒联又大胆废除了沿袭百年的 21 分制,改为现行的 11 分制,这一重大决策显然出自"老谋深算"的数学头脑,据德国国家队教练舍普的统计表明,21 分赛制中打到 20 平的概率为 7.1%.施行 11 分制后,打到 10 平的概率为 16%.尽管局数增加到 7 打 4 胜能起到一定的平衡作用,但 44 分的"样本"是不能和 63 分相比的.国际乒联的良苦用心在于,降低顶级选手"稳操胜券"的把握,增强比赛的悬念,从而调动更多选手冲击冠军的积极性.

对于这两项措施,数学也应该找到类似的办法,使数学更具观赏性和趣味性.

现代通信、密码与代数组合论[①]

丘维声[②]

各位同学晚上好，很高兴今天能和大家在这里谈一谈我的科研工作的情况，比较通俗易懂地讲一讲现代通信、密码与代数组合论.

代数组合论是数学的一个分支，现代通信是社会生活中必不可少的一个组成部分.同学们都从全国各地来到北京，经常要和父母亲、兄弟朋友交换信息，特别是你们这些刚到大学的同学，尤其是外地的，可能经常要和爸爸妈妈联系，讲一讲自己的情况，不管在哪里，只要有电话，就可以随时和家里联系.但你可能在路上，可能还想边走边说，也就是要在任何时候、任何地方都能相互联系，这个通信应该是移动通信，所以我们的现代通信体现在移动通信，而移动通信必然是无线通信.你不可能从家里扯一条线到你北京大学宿舍，要通过无线电在空中传播.

1 移动通信

移动通信经历了几个阶段.第一个阶段，也就是第一代，模拟的移动通信，俗称“大哥大”.那时候模拟，也就是把我们的声音信号转化成为电波，这样转化，必然会有“失真”的情况.加上空中各种因素的干扰，所以如果同学们还记得使用过“大哥大”，你发现声音经常带有噪声，还有就是声音不像，比如你爸爸打电话来，你听起来像是你妈妈的声音，因为失真了.它是模拟的，模拟的必然不可能模拟得那么好.这是第一代.

同学们，不只你们要给爸爸妈妈打电话，张三也要给他妈妈打电话，李四也要，空中有许多用户同时在通话，那么怎么区别开来呢?这就好比我们看电视，可能看中央一台，也可能看中央二台.靠频道区别，叫频分多址.打个比方，就像我们这个大教室，假如我们有50对用户同时要通话，那就把这个大教室划分成50个小房间，每个小房间只允许一对用户在里面.这就是把频率划分成50个小的频率范围，划分成50个小房间，当然是你在

---

① 摘自《北大讲座》(第四辑)，北京大学出版社.

② 丘维声，北京大学数学科学学院教授，博士生导师.中国数学会组合和图论理事会常务理事，教育部全国中等职业教育教材审定委员会委员兼数学教材审定组组长，教育部中等职业学校文化基础课教学大纲审定委员会委员，《数学通报》副主编，国家规划教材《数学(基础版)》主编，北京数学会普及委员会副主任，北京市基础教育教材编写委员会委员.研究方向：代数组合论，信息可靠与安全，群表示论.

这个小房间里,他在那个小房间里说.但本来这么大的教室划分成50个,挨得太近了.挨得太近,就会“隔墙有耳”,别人也听得见.一个用户频率太窄的话,那与它相邻的就会互相干扰,这就是为什么“大哥大”经常有噪声.后来在20世纪80年代,把模拟通信转化成数字形式,即转化成无线电波易区分的两种状态,分别用0,1表示,于是声音信号转化成0,1序列.一个大的教室分成50个小房间,每个小房间就小了.如果分成10个,频率就宽一点.频率宽一点,相互之间干扰就小一点.这就好像马路上如果划成10道,就比较混乱.如果分成2道,干扰就小了.原来50对用户,10个小房间,那怎么办?那就让这10个小房间每个小房间有5对用户进去谈话.

这就麻烦了,同时进去就不行了,一个小的房间5对用户讲话,谁都可以听到别人的谈话.于是他们(谈话的人)约定,按时间划分(当然,我现在夸张点说)先是第一对用户进去,其他在外面等.第一对用户讲了一分钟后出来,第二对用户进去,讲一分钟后又出来,如此类推.当然,我是比喻地说,实际上是0,1脉冲,如果把0看成-1,就是-1,$+1$,看成一下一上,脉冲有间隙,可以插入间隙中,按时间划分,叫做时分多址.这是欧洲移动通信小组于1982年开始研究的,1988年成功了,叫GSM(Global Sphere Mobile)即全球范围内的移动通信,简称全球通,这是第二代.这个数字通信当然比最早的模拟通信先进.第二个优点,每个频率宽一些.用某个频率的用户因此受到的干扰小了许多.原来10个道的马路,现在分成了3个道.第一道与第二道的车就不容易经常碰着了.当然这里也还是有些问题,它没有抗自然界干扰的能力,天空中电磁波在传播中受干扰,电位高低变了,0和1就变换了,你也不知道,影响了原来要传播的信息,没有抗随机干扰的能力.而且用户之间干扰仍然不能完全避免.虽然(车道)宽了一点,但宽了一点也免不了碰撞.还有就是不太保密.保密性是很重要的.因此手机到了第三个阶段.这就是大家在电视中常听到的CDMA(Code-Division Multiple Access),也就是码分多址.

下面我们要详细地说什么是码,什么是码分多址.如果设计得好的话,别人不易破译,还有抗自然干扰的作用.而且如果构造得好的话,用户之间不会有干扰.因此它起码有两个优点:一个是安全保密,一个是声音比较逼真.具体是怎样操作的呢?用个粗略的比方,我们还是用这个大教室.50对用户在这讲话,那谁都听不清谁讲话,更重要的是不保密了,那还了得,我和好朋友讲话,你也听得见!那我只能假定每个人只会一种语言,比如说我是客家人,只会说客家话,不会普通话,第二个人会讲普通话,但不懂客家话,第三个人讲英语,但不会汉语,第四个人会德语……比如我现在用客家话讲,你们都听不懂我讲什么,我是说“今晚我给大家讲话”.那我讲,你听不懂,就保密了.但这如何实施,是工程上的问题.还有一个声音逼真,抗自然干扰,“天有不测风云”,如果打个雷,就干扰了信号,但这都是不可能事先知道的.保密可以通过每对用户用各自一种语言的方式解决,但你讲话会干扰我呀,你的English“Good Morning!”会影响我的客家话呀!

2　安全保密

安全保密,最早的恐怕是打仗时的军事需要和外交需要,这方面一个突出例子,就是

第二次世界大战时的珍珠港事件.1941年12月7日凌晨1点28分,美国西雅图海军监听站截获了日本外务省发给驻华盛顿大使馆的一份电报:"请贵大使在当地时间7日下午1时将我国的答复递交美国政府(如可能则递交国务卿)."电报中提及的"答复"的第十四部分的最后一句话是:"因此日本政府遗憾地通知美国政府,鉴于美国政府的态度,日本政府不得不认为通过今后的谈判不可能达成协议."此时在华盛顿已是早晨5时(时差3小时).华盛顿下午1时,相当于远东地区拂晓前两小时.美国在截获密报之后,不知道日本要袭击哪个具体的地方.1941年12月8日(星期一)凌晨(远东地区时间),日本飞机突袭珍珠港,发生了震惊世界的珍珠港事件.信息安全保密是特别重要的,关系到国家安全,因此很早就有了恺撒(Caesar)密码:把待发送的明文中的每个英文字母右移3位,例如明文day变成了密文gdb.为了提高加密速度,首先把26个英文字母a,b,c,…,z对应于0,1,2,…,25;右移3位就是把每个字母对应的数加3,把3称为密钥.如果和大于或等于26,就减去26,这样可以使数保持在0与25之间.例如,day对应于3,0,24,加3得6,3,1,它对应于gdb.现在看起来,像这种加密方式肯定不行.因为你在截获了几次密文后,通过分析英文文章中字母出现的频率规律,就容易破译出密文中的一个字母,譬如a,对应于哪个字母,这就能够破译出密钥.此外,26个字母对应于26个数,无线电哪里认得26个数呀!无线电比较容易识别的是两种状态,分别用0和1表示.这就很自然地想到二进制.用5个二进制数字,就可以把26个字母和标点符号都表示出来.例如

$$3 = 1\times 2 + 1,\quad 24 = 1\times 2^4 + 1\times 2^3$$

3,24分别对应于00011,11000.从而明文day对应于序列00011 00000 11000,称为明文序列.加密方式把明文字母对应的数加3,于是就成为把明文序列加上序列00011重复地使用它,这个序列称为密钥序列.这时会遇到$1+1=2$,但是无线电只会识别0和1,不会识别2,因此序列中的0和1就不能是整数.这就需要引进下述概念.

在整数集$\mathbf{Z}$中,把所有偶数组成的子集记作0,把所有奇数组成的子集记作$\bar{1}$.令$Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$.在Z_2中规定加法和乘法运算如下

$$0+\bar{0}=\bar{0},\quad \bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1},\quad \bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$$
$$\bar{0}\times\bar{0}=\bar{0},\quad \bar{0}\times = \times\bar{0}=\bar{0},\quad \bar{1}\times\bar{1}=\bar{1}$$

加法满足交换律,结合律,有零元素0,1的负元素等于$\bar{1}$;乘法满足交换律、结合律,以及对于加法的分配律,有单位元素$\bar{1}$,$\bar{1}$的逆元素等于$\bar{1}$.我们把Z_2称为二元域.

上述明文序列和密钥序列中的0和1分别是二元域中的元素$\bar{0}$和$\bar{1}$,于是把明文序列和密钥序列(重复地使用)的对应元素相加,得序列00000 00011 11011,称它为密文序列.合法的接收者知道密钥序列00011,把它与密文序列相加就可得出明文序列00011 00000 11000.上面已经指出,如果密钥是一个数3,这很容易被对手破译.因此像00011这样的密钥序列是不安全的.那么什么样的密钥序列才安全呢?

掷一枚5分的硬币,正面向上记作1,背面向上记作0,一直掷下去,这样得到的序列称为随机序列.用随机序列作为密钥序列肯定是安全的,因为对手哪里知道你第一次掷硬币出现的是正面还是反面?第二次是正面还是反面?就是你自己,如果不记下来的话,明天就忘了.但这又有一个问题,你给别人发密电,他也不知道密钥,他也不会翻译出来.

比如我给魏恩遒(在场的一个听众)的密文是用掷硬币得到的密钥序列加密的，他怎么知道我第一次掷的是正面还是反面?第二次是正面还是反面?…… 那好，我打个电话给他，那不就什么都让人知道了吗?(笑)发E-mail吧，那也不行.那我只能请孙悟空，让他把密钥序列送给魏恩遒.因为孙悟空武艺高强，没人打得过他.如果不请他去送，而让别人去送，就可能被对手抓住，抓住了就麻烦了(笑).今天我给魏恩遒发个密文，用掷硬币得到密钥序列请孙悟空送给他，明天我又要发密文，又得请老孙.你这样一次一次地送密钥序列，不如就请他把明文送过去!(笑)那怎么办呢?我就降低要求，不用随机序列，而用伪随机序列.

什么是伪随机序列呢?让我们看一个例子.序列 $\alpha = 0110100$，其中0和1的个数相差1.把 α 看成周期为7的无限序列，左移1位得，$\alpha_1 = 1101000$，把 α_1 也看成周期为7的无限序列.

$$\alpha = 0110100$$
$$\alpha_1 = 1101000$$

在一个周期里，α 和 α_1 的对应位置元素相同的位置有3个，元素不同的位置有4个，它们的差等于-1，这个数称为 α 的自相关函数在1处的值，记作 $R_\alpha(1)$.类似地，把 α 左移2位，3位，…，6位，可以求出 α 的自相关函数在2处，3处，…，6处的值也等于 -1.当 $0 < s < 7$ 时，$R_\alpha(s)$ 称为 α 的自相关函数的旁瓣值.从刚才所求出的结果知道，$\alpha = 0110100$ 的自相关函数的旁瓣值只有一个: -1.像这样的序列称为伪随机序列或拟完美序列.即一个周期为 v 的无限序列，如果在一个周期里，0和1的个数相差1，并且它的自相关函数的旁瓣值只有一个: -1，则称它为伪随机序列或拟完美序列.α 的自相关函数的旁瓣值 $R_\alpha(s)$ 的绝对值越大，就表明 α_s(或把 α_s 的0和1互换得到的序列)与 α 越像.因此如果周期为 v 的序列 α 是一个伪随机序列，那么 α 不管左移几位(只要不是 v 的倍数)，得到的序列都和 α 很不像，这样就很难分辨出 α 是什么样子.好比川剧的变脸，由于每一次都变得和演员的脸很不一样，因此很难知道演员自己的脸是什么样子.反之如果演员每一次化装后都跟他自己的脸有许多相同之处，那么就容易辨认演员长得什么样.这说明了用伪随机序列作为密钥序列是比较安全的.

3　声音逼真

给每一个手机用户指定一个序列，也称为码.如果它们都是伪随机序列，那么不仅安全保密，而且还能抗随机干扰，即能够纠错.为了使通话时声音逼真，还需要减弱用户之间的相互干扰.这应当要求用户的序列满足什么性质呢?设指定给用户甲、乙的序列分别为 α，β.考虑 α 和 β_s 的对应位置元素相同的位置的个数减去元素不同的位置的个数，它们的差称为 α 与 β 的互相关函数在 s 处的值，记作 $R_{\alpha,\beta}(s)$.$R_{\alpha,\beta}(s)$ 绝对值越大，就表明 β_s(或把 β_s 的0和1互换得到的序列)与 α 越像.因此如果 α 与 β 的互相关函数每处的值的绝对值都很小，那么 β 不管左移几位得到的序列都和 α 很不像，从而用户甲跟丙，用户乙跟丁两对用户同时通话时，用户丙只能听到甲说的话，听不到乙说的话，从而减弱用户

之间的相互干扰.

综上所述,为了安全保密和声音逼真,要求给共用一个频道的每一个用户指定的一个序列,它的自相关函数的旁瓣值的绝对值很小,并且每两个序列的互相关函数在每处的值的绝对值都很小.这能够办到吗?1974 年,Welch 研究出一个结论:设共用一个频道的用户有 M 个,给每个用户指定的序列的长为 L,则所有序列的自相关函数的旁瓣值的平方和与每两个序列的互相关函数在每处的值的平方和相加得到的值一定大于或等于 $M(M-1)L^2$,等号成立当且仅当所有序列的自相关函数在同一处的旁瓣值之和等于 0.这表明不可能构造出序列集使得每个序列的自相关函数的旁瓣值的绝对值都很小,并且每两个序列的互相关函数在每处的值的绝对值都很小.比较好的序列集的构造是有待今后继续研究的课题.

4　差　集

上面给出的拟完美序列 $\alpha = 0110100$ 还有什么性质呢?设序列 $\alpha = 0110100$ 从左到右的位置分别为第 0,1,2,3,4,5 六位,则序列中 1 所处的位置为第 1,2,4 位.把 1,2,4 看成 Z_7 中的元素,即把 1 看成整数集中被 7 除余数为 1 的所有整数组成的子集,其余类似.令 $D = \{1,2,4\}$,容易计算出 D 中任意两个不同元素的差组成的有重集合中,使得 Z_7 中的每个非零元恰好出现 1 次,像这样的子集称为差集.差集是代数组合论的一个重要分支.一般地,差集与拟完美序列有密切联系.只要构造出某种类型的差集,就可以构造出拟完美序列.例如,如果我们构造出 Z_7 中的差集 $D = \{1,2,4\}$,那么我们可以按照下述方法构造出一个周期为 7 的序列:在第 1,2,4 位写 1,其余位置写 0,即 0110100,这就是上述 $\alpha = 0110100$.那么差集 $D = \{1,2,4\}$ 又是如何构造出来的呢?在 Z_7 中,从 1 出发,1 的 2 倍等于 2,2 的 2 倍等于 4,4 的 2 倍等于 8,而在 Z_7 中,$\bar{8} = \bar{1}$,因此又回到 1.从而得到 Z_7 的子集 $D = \{1,2,4\}$,这就是一个差集.这里,"2 倍"中的"2"称为差集 $D = \{1,2,4\}$ 的乘子.由此看出,如果找到了乘子就可以构造出差集.那么如何寻找乘子呢?这要靠乘子定理,关于乘子定理有一个著名的乘子猜想.这些年我一直在研究差集和乘子猜想,取得了一些进展,特别是解决了 $n = 3p^r$ 情形的乘子猜想,已经发表在《中国科学(A 辑)》2002 年第 1 期上.

从现代通信、密码与代数组合论的关系,可以体会到数学在信息时代的作用.今天我就讲到这里,谢谢大家.

斯蒂夫·库克和利奥尼德·莱文:好办法难找[①]

没有什么算法可以解决这些问题——一些不会改变的基本问题——正是这个原因吸引了我.

——斯蒂夫·库克

有时有些东西做不到倒是好事.我很高兴别人不能对我为所欲为,有很多事情他们做不到.

——利奥尼德·莱文

1 怎样迅速地解决问题?

一个15岁的普通人便可以看懂毕达哥拉斯定理的证明,但当那些希腊几何学家发现它时,他们还祭了神.成百万的人可以哼出贝多芬《第九交响曲》,但很少有人可以奢求自己会有他这样的音乐天才.所有优秀的思想都有一个基本的不对称的事实——易于认识而难于发现.在计算理论中,这种不对称是很重要的,至少看起来是这样.

想想著名的推销员旅行问题.假设我们的推销员威利·罗曼有一条推销路线、一个旅行预算和一张航班票价表.他要从波士顿开始,走遍图1所示的9个城市后返回波士顿,并且不超出预算.他请你找出他应走的路线.如果他的预算宽裕,则你的任务很简单.但如果他的预算比较紧张,你就得认真地想想了.甚至不可能不超支.你可能得考虑每一种可能的次序,但对这么少的城市,却大约有100 000条可能的路线!

任务是在确定的预算内,来测定推销员威利能否从波士顿开始,走遍所有的其他城市后再返回波士顿.

如果有3个城市A,B和C,互相之间都有往返的飞机,则有6种可能的次序(或者拜访每个城市的序列):ABC,ACB,BAC,BCA,CAB和CBA.如果有4个城市,则有24种次序:对于A,B,C的6种可能次序中的每一种,第4个城市D可有4种位置.比如,对于次序BCA,可有以下4种次序:DBCA,BDCA,BCDA和BCAD.

次序的数目叫阶乘(用符号!表示).阶乘增长很快也很大:4的阶乘$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$;$5! = 5\times4! = 120$;$6! = 7\ 200$,如此类推.固然,计算机很擅长处理大量的可能性,但这种可能性的数目却远远超出了任何数量的计算资源的能力.正如斯蒂夫·库克所指出的:

---

① 摘自《大师的智慧》[美]萨沙等著.刘甲译.河北大学出版社.



图 1　推销员旅行问题

如果有 100 个城市，需要求出 100! 条路线的费用.没有哪个计算机可以求出 100! 条路线.让人们理解这一点是比较困难的.如果做一些简单的计算便能认识到，若让太阳系中所有的电子以它们旋转那么快的频率来计算它，就算太阳燃烧完了也算不完.这个问题的基本点在于有些东西在实践中是行不通的.

推销员问题的不对称性是这样的：如果某人给威利一条特定的路线，他可以很简单地计算出这条路线是否符合自己的预算限制.让威利找到一个好的解决方案是不容易的，但验证却很容易.

在 20 世纪 50 年代和 60 年代，许多设计、运筹学和人工智能方面的问题好像都有这种难于解决易于检验的特性.计算机科学界的许多人都怀疑它们属于一系列共同的数学问题.

20 世纪 70 年代初有两位科学家——美国的斯蒂夫·库克和俄罗斯的利奥尼德·莱文同时独立地描述了这个系列.现在称为 NP 完全问题（下面将看到取这个名称的原因），这些问题的数目非常庞大，并且仍在增加.对于计算机科学家来说，证明某个问题属于这个系列等同于说明了找到它的一个严格正确的答案是不可能的——顾客必须愿意接受一个近似正确的答案.

在西方计算传统中，计算的困难性的观念来源于逻辑和艾伦·图灵关于"不可计算性"的结论.迈克尔·拉宾最早把可计算问题的固有困难性的概念形式化.斯蒂夫·库克 1971 年定义 NP 完全问题时也跟随了这个传统.

开始于 20 世纪 50 年代末期的苏联运筹学研究界不正式地形容某些优化问题说要有 perebor，其俄语意思是"蛮力"或者让人精疲力竭.苏联科学家用"蛮力搜索问题"指那些在确定最佳答案前必须搜索所有或者几乎所有可能性的问题.但是，即使是中等大小的

推销员旅行问题，要试遍其所有可能性无论如何都是行不通的.

然而，蛮力问题背后的理论，不像在西方传统中那样来源于逻辑，而是来源于安德烈·柯尔莫哥洛夫的字符序列的任意性和描述它的困难性之间的关系这个概念.柯尔莫哥洛夫的这个概念利用了20世纪40年代末美国克洛德·香农的信息理论.从那以后，苏联和西方在数学科学方面的联系就很少了.①

1971年莱文在苏联一些大学的演讲中和在1973年的短篇论文中，说明了蛮力问题和柯尔莫哥洛夫的任意性之间的关系，其中一个结论就是NP完全问题的一个特征.

但这只是讨论的开始.从那以后，库克、莱文或任何科学家都没有真正证明这个系列中的问题是极其困难的.他们只是证明了，如果这个系列中的任何问题很复杂，则所有的都很复杂.这样他们便提出了今天理论计算机科学中的这个较重要的尚无定论的问题：NP完全问题是否需要进行完全的搜索?换句话来说，如果哪个算法只须考察可能路线中的一小部分，便能够解决像推销员旅行问题这样的问题，那么它就会改写计算机科学的历史.

2　斯蒂夫·库克：逻辑和西方传统

斯蒂夫·库克1939年出生于纽约布法罗.他的父亲是联合碳化物公司的一名化学家，还在布法罗大学任教.他父亲总是梦想着在乡下生活，斯蒂夫10岁时，全家迁到纽约州克拉伦斯的一个奶牛场.他们把土地租给一个农场主，但留下了一头牛（由斯蒂夫饲养和挤奶）和其他一些动物.

我对象棋类的东西有一点兴趣——但没什么特别.我上学时数学比较好，但那只是一所普通的乡村中学.我当然从未想过要当数学家.我母亲的叔叔亚瑟是威奇托大学的一位数学教授，他是我知道的唯一一个当数学家的祖辈.

纽约州克拉伦斯也是可植入起搏器的发明者威尔逊·格莱特巴赫的家乡.他激发了少年时代的库克当电气工程师的雄心.

夏天我在他的谷仓的阁楼里给他干活，在那儿他有一个小铺子.晶体管是新的——当时是50年代——他正在试验晶体管电路，我帮他焊接电路.我发现这很有趣.

我开始到密歇根大学上学时，我的专业是他们所谓的科学工程，但我的兴

① 这种相互隔离导致的独立但却做出类似发现的程度是令人惊讶的.这一章是关于莱文和库克的独立发现.我们立刻又想到了另外两项独立的成果.拉宾1959年提出复杂性的基础时，苏联的格雷戈里·蔡廷（Gregorii Samuilovich Tseitin）也在进行类似的研究.1969年格雷戈里·查汀（Gregory Chaitin）在纽约也定义了和柯尔莫哥洛夫类似的任意性的衡量，但晚了几年.

趣却是电气工程.大学一年级(1957年)我选了一门伯纳德·盖勒开的1学分的程序设计课.

库克和一个朋友一起编了一个程序验证著名的哥德巴赫猜想——每个大于3的偶数都是两个质数之和.直到他们所计算的数为止,这个猜想都成立.(这个猜想仍然未被证明,因为要证明质数的普遍性质是很难的;另一方面,也没有人找到过反例.)

库克完成了数学专业的学习,还学了不少计算理论,知道图灵停机问题等内在的不可能问题.然后库克进入哈佛大学攻读数学博士,打算研究代数.但对他最有影响的老师却是应用科学教研室的王浩.王浩受过数理逻辑和哲学方面的教育,他研究自动定理证明——由计算机自己发现证明.

另一个影响是复杂性理论,由迈克尔·拉宾在1959年的论文中给出其数学基础.复杂性理论的许多奠基人物,包括拉宾、尤里斯·哈特马尼斯和斯坦恩,都给库克这样好学的研究生讲过课.

看上去这是一个自然而基本的问题.显然存在原则上用算法可解但实践上却不可解的问题,因为还没解完太阳系已经毁灭了.因此,考察问题的固有难度是一个很自然的问题.

在真正的计算机出现以前,除了手工没办法执行算法.这项工作是如此乏味,以至没有人关心复杂性问题.既然现在我们有了这些威力巨大的机器帮助我们,而它们看起来威力极大,每秒执行成千上万次操作,那么想想到底可以解决哪些类型的问题便很自然了.

库克的导师王浩对这些看法加入了一种逻辑观点.

我很熟悉他(王浩)的思想和方法,我的NP完全问题的结论类似于他的结论.图灵和王浩说的是谓词演算,而我说的是命题演算.

谓词演算和命题演算是数理逻辑中的两种语言.王浩研究了谓词演算的可满足性问题的复杂性.库克后来对命题演算的可满足性感兴趣.为了理解其差别,看看下面的例子.

谓词演算做出的是关于个体的群体的陈述.例如:"所有的奥林匹克选手都很强壮",这个断言描述为:"对于所有X,若奥林匹克选手(X),则强壮(X)."

谓词演算允许你用X代替特定的个体,例如,如果你知道阿基里斯①是一名奥林匹克选手,也就是"奥林匹克选手(阿基里斯)"成立,那么上面的公式导出的"强壮(阿基里斯)"这个结论也成立.

而库克研究的命题演算是一种较简单的语言,它只允许做出关于个体的断言,例如,"阿咪是一只猫".命题演算允许你从原有的命题推导出新的命题.例如,如果命题"要么

---

① 阿基里斯是古希腊一位勇士,生有一双飞毛腿,是跑得最快的人.——译者注

科普名篇

阿咪是一只猫，要么阿黄是一条狗”和“阿黄不是一条狗”都成立，那么这条规则允许你推导出“阿咪是一只猫”成立.

3 可满足性

对于两种逻辑语言都很重要的一个问题是，是否存在一个真假值的赋值使得某个给定的公式成立. 如果存在，那么这个公式就是可满足的，否则就是不可满足的. 例如，“x 且非 y”是可满足的，因为只要 x 赋真值，y 赋假值这个命题就成立.

而“x 且非 y 且非 x”是不可满足的，因为无论怎样赋值 x 或非 x 中必有一个不成立，这样整个断言就不成立.

阿隆索·丘奇和艾伦·图灵证明，甚至在无限的时间里要想确定谓词演算中的某个式子是否可满足，在计算上都是不可能的. 库克证明确定命题演算的可满足性可能需要试验很大比例的可能赋值.

存在多少种可能赋值呢?如果有 1 个变量(比如 x)，那么有 2 种可能赋值：x 真或 x 假. 如果有 2 个变量(x 和 y)，那么有 4 种可能赋值：x 真，y 真；x 真，y 假；x 假，y 真；x 假，y 假. 一般来说，如果有 n 个变量，那么有 2^n 种可能赋值. 这样 10 个变量就有 1 000 种赋值，20 个变量有 1 000 000 种，30 个变量有 10 亿种，40 个变量有 1 万亿种. 每加 10 个变量，可能的赋值数就增加 1 000 倍.

可能性的数目随变量 n 的数目按指数增长，因为 n 在上式中是指数. 如果某种算法分别检验所有的可能性，那么执行算法的时间也是按指数增长，或者说这种算法需要指数时间. 而在多项式时间算法里，所需的时间按照 n 的某个固定次方的一个表达式增长，这里 n 表示问题的大小.

例如多项式时间表达式 n^3，当 $n=10$ 时其值为 1 000；当 $n=20$ 时，值为 8 000；当 $n=30$ 时，值为 27 000；当 $n=40$ 时，值为 64 000. 把它和 40 个变量的 1 万亿种可能赋值的指数增长比较一下!

4 定义 NP 完全问题

库克在哈佛完成博士论文后，在加利福尼亚大学伯克利分校呆了很短一段时间，然后去了多伦多大学.

1971 年，他在计算机协会第三次年度讨论会的一篇论文中阐述了关于可满足性的思想. 库克讨论了可以在多项式时间内验证一个可能的解答——候选答案的问题. 既然确定哪个候选答案最好并不总是可能的，那么程序就不得不去猜一个解答. 因此，库克称这些问题为非确定性多项式问题或 NP 问题. 猜测部分是非确定性的，检验部分是多项式的.

推销员旅行问题和可满足性两者都有这种特性，因为你可以迅速地检验一个候选旅行计划是否满足推销员的预算，以及某个候选赋值是否使某个式子成立. 重要的问题在

于，能否在多项式时间内找到合适的候选答案.

库克证明了可满足性问题是NP问题中最难的问题之一.确切说就是，如果可满足性问题有多项式时间算法，那么NP问题中所有的问题都有.这就使得可满足性成了一个NP完全问题.在实践中，证明一个问题是NP完全问题也就意味着很难解决它，尽管如果能找到一种候选答案，便能很快地检验它.如果幸运的话，若有人找到一种对一个NP完全问题有效的算法，那么这种算法可能对所有的NP完全问题都适用.

库克的论文发表不久，加利福尼亚大学伯克利分校的理查德·卡普证明了另外21个问题也是NP完全问题，包括一个与推销员旅行问题紧密相关的问题.他用一种叫可归约性的方法进行论证：如果这些问题中的任何一个可被迅速解决，那么可满足性问题也可以.因此，这些问题至少和可满足性问题一样难 —— 反之亦然.但很不幸，他们都没有证明这些问题事实上很难.

5　一个(几乎)永恒的话题

因此，你可能会问，如果没有证明哪个问题确实很难的话，那么怎样才算是有所成就呢?打一个比方可能有所帮助.如果一个专利申请说可能实现永恒运动，那么专利办公室会立即拒绝这个申请.专利审查者使用了可归约性进行论证：如果机器真能像所说的那样运行，那么能量守恒假设便是错误的，而审查者们对这个假设深信不疑.

永动机类似于NP完全问题.如果任何一个这样的问题能够迅速地得到解决(在多项式时间内)，则所有的都能，那么现行的NP完全问题需要进行完全搜索的假设就是错误的.计算机科学家们深信NP完全问题确实很难.因此，如果一个计算机科学家遇到某个问题他不能给出快速的算法，他可能会试图证明这个问题是NP完全问题，由此隐性地得出这些问题确实很难的结论.库克对此进行了总结.

> NP完全问题可能无法在多项式时间内解决.我们知道所有的NP问题都能在指数时间内解决.它们也可能可以在多项式时间内找到答案，但这还是一个尚无定论的问题.如果一个像可满足性这样的NP完全问题可以在多项式时间内解决，那么所有的都可以.它们都是互相可归约的 —— 这就是这个问题的重点.
>
> 在卡普的研究之后，全世界的研究人员已经证明了成千上万个问题是NP完全问题.其中典型的有，电话网络的最优几何设计，格子棋的最佳走法等.库克被NP完全问题的数目吓了一跳.
>
> 我以为NP完全问题只是一个有趣的想法.我没有意识到它的潜在的影响.

6　利奥尼德·莱文：柯尔莫哥洛夫传统

20世纪60年代，库克在哈佛研究复杂性理论时，苏联的一名年轻的中学生正在学习

蛮力问题和柯尔莫哥洛夫复杂性.

利奥尼德·莱文1948年生于乌克兰腹地的一个工业城市第聂伯罗彼得罗夫斯克.他父亲阿纳托里·莱文起初在中学教俄语和文学,后来获得了教育学博士学位,然后到大学任教.利奥尼德的母亲安娜·艾伦堡是一名工业建筑师,主要设计桥梁.莱文很早就对科学和数学感兴趣.

> 我在学门捷列夫表(元素周期表)时遇到了困难.它没有我希望的那么有规律.我认真地研究它,重画了好多遍,几乎画得像后来我在美国看见的那样了.

莱文还在家中的浴室里用混合药物做化学实验.他父亲给他买了著名的苏联科学作家雅可夫·培雷曼写的一套丛书,并鼓励他参加苏联的奥林匹克竞赛.奥林匹克竞赛是苏联政府策划的比赛,用于选拔在数学和科学方面有特殊才能的学生.优胜者从县区级选拔到地市级,然后再选拔到专攻科学的寄宿学校.

> 20世纪50年代末60年代初,苏联出现了一股热衷于科学的潮流.奥林匹克竞赛极其热门,全国的大多数孩子都参加.并且如果获奖了,又不是犹太人的话,便可以参加国际奥林匹克竞赛.

莱文在基辅城物理奥林匹克竞赛中得了第一,被送到基辅大学专攻物理和数学的寄宿学校.有一天,柯尔莫哥洛夫亲自访问了这所学校.莱文当时15岁.

> 柯尔莫哥洛夫的访问是一件大事.他与所有的领导见了面,然后会见了孩子们.那是在一间巨大的屋子里.他提了一个问题,然后让我们举手回答,事实上很快便成了我和另一个男孩之间的一次比赛.

柯尔莫哥洛夫给小莱文提出的问题对他后来在计算机科学中遇到的问题是一次很好的准备.下面是莱文的一种解法的例子.

柯尔莫哥洛夫没有忘记莱文解难题的能力,后来还邀请莱文到莫斯科大学他自己的学校去.

> 他教一个24个孩子的小组.他给我们开了一场音乐会——他特别喜欢音乐.他还分析诗歌,他知道很多东西,并且很多都达到了专业水平.
>
> 柯尔莫哥洛夫开始是当历史学家,我想他在什么地方提到过他曾证明了一些猜测,然后他向别人介绍了自己的研究,他们说这很优秀但我们需要更多的证明.于是他决定当数学家,数学一个证明便足够了.

7 莱文对柯尔莫哥洛夫难题的解答

问题 假设所有单词,即所有字符序列,属于两个类别之一——一类适于印刷(好的),另一类不适合(差的).现在给定一个无限字符序列,是否总是可以将其拆成有限的序列,以使所有序列都属于同一类?第一个可能除外.

解答 是的.如果某个字符序列其所有前面的部分都是好的则称其为带有好的前缀.假设无限序列 $A = a_1, a_2, \cdots$ 上限为 n,那么切去多于 n 个字母的前缀总是留下带有不好的前缀的无限后缀 A(也就是说,该后缀至少有一个前缀是差的).切去第一段的 $(n+1)$ 个字母.剩下的(不带有好的前缀)序列带有差的前缀;将其切去.不断重复前一步,便可以将 A 拆成有限个差的前缀(第一个可能除外).为了理解可以进行这样的无限重复,假设不能.那么切去第 k 个差的前缀后,所剩序列的任何子序列前缀都是好的,这样便可以切去一个前缀直到那一点为止,并得到(与假设矛盾)一个好的前缀序列.

如果不存在这样的 n,切去一个前缀,留下带有好的前缀的无限后缀.可以不断重复前一步,否则前几个前缀的长度之和可以作为 n,而我们假定不存在这样的 n.这并不意味着可以任意地切去序列,因为那样会留下一个带有差的前缀的后缀.但有可能可以将其切去使得每次都留下一个带有好的前缀的后缀(因为不存在这样的 n),这样 A 便拆成有限个前缀,它们(第一个可能除外)都是好的,因为它们都是好的前缀序列的前缀.

莱文沉浸于数学之中,几乎排斥其他的一切.他下象棋,但拒绝演奏钢琴.

> 我很喜欢读苏联小说.我的记忆力很好,可以记住大段的诗歌而只是为了好玩.后来,我失去了这种记忆力,因为我担心它会限制我的想象力.

虽然苏联的体系培养了大量的年轻数学家和物理学家,但却有过一段反对计算机科学的历史.

> 在20世纪50年代初,计算机科学在苏联是一个非法的话题.
>
> 我想一些苏联哲学家是被诺伯特·维纳激怒了——他年轻时是一位杰出的数学家,但老年时却写一些计算机科学方面的无意义的文章.他晚期的"大众科学"思想之一就是控制论,控制论在苏联曾是一个用来指代计算机科学的时髦字眼.

但到20世纪60年代,苏联军方坚持学校必须教授计算机科学课,因为计算机明显具有大量的应用.他们甚至开始培养年轻学生使用计算机,莱文在所有本科生都须参加的半军方的单位里工作时第一次接触了计算机.

我们…… 用一些非常老的计算机工作,(用) 打卡带,许多灯和平板. 它给人印象极其深刻. 另外,我们还学了一些概率方面的东西. 比如火箭飞行,它撞上某个东西的概率有多大.

我当然讨厌军事. 但我们在那儿学的数学却比我们大学正规的计算机课程 Algol 更有趣 —— 这门课除了语言什么也没有.

8 柯尔莫哥洛夫复杂性

莱文 1971 年写博士论文时研究了柯尔莫哥洛夫复杂性. 柯尔莫哥洛夫当他的导师,他和莱文的答辩委员会都同意了这篇论文,答辩委员会还包括其他几位杰出的苏联数学家. 但是,莱文却没有获得博士学位.

那时,几乎所有的苏联年轻人都是共青团员 —— 这是一个面向孩子们的类似共产党的组织. 它通过各种活动教育我们要热爱我们的政府. 我曾搞过一些破坏.

对于我做的事情,已经有过惩罚,但这样也不好:那样上级便会知道出了什么问题. 因此他们试图假装什么也没发生,我本来也就可以避开惩罚了.

但我没有注意到时代已经随着捷克斯洛伐克发生了变化 —— 由于某种原因我不想认识这一点.

我总是吵吵闹闹而且非常傲慢,正是那时大学的官方需要的再好不过的替罪羊.

最大的打击并不是(博士学位) 被否决本身,而是这个决定的正式理由中毫不含糊地使用了极少使用的政治词语. 这段话使我再也不可能获得博士学位,最终导致了我移民.

莱文 1973 年移民美国以前,在一家苏联杂志《信息传输问题》上发表了一篇关于通用顺序搜索问题的文章. 他勾勒出了蛮力问题和柯尔莫哥洛夫信息理论之间的形式上的联系. 柯尔莫哥洛夫信息理论考察一系列字符(0 和 1) 的“任意性” 及描述该系列字符所需的字符数之间的关系. 比如,用几个字描述一串连续的 100 万个 1 是很容易的(我们已经这样做了),也可以用类似的简单方式描述任何重复的模式,比如,00111 重复 100 万次. 用柯尔莫哥洛夫的术语来说,可以简单描述的较长的模式并不是任意的. 柯尔莫哥洛夫得出的一个基本结论便是任意性的程度很少依赖于所用的数学语言. 无论怎样定义,大多数序列都是“任意的”—— 它们的描述至少和其本身一样长.

(你可以用一个计数变量自己证明这一点. n 个二进制数字(1 和 0) 可以组成多少个数?2^n 个. 编码为 $m < n$ 个二进制数字的程序可以描述多少个不同的数?只有 2^m 个. 例如,如果 $m = n - 10$,则 2^m 只是 2^n 的 1/1 000,因此 99.9% 的长度为 n 的数都需要 $n - 10$ 个以上的二进制数字来描述它们.)

编写描述长字符串的程序到底有多难?莱文研究了这个问题.

> 这个问题相当于编写简短而快速的程序生成给定字符串.我想到了一个方法把平铺问题简化(一个空间压缩问题)为这个问题,但失败了.不过,我成功地证明了一个类似的问题——查找部分布尔函数的小二度电路(电路设计中的一个问题)的普遍性.我还证明了其他5个问题的普遍性,包括可满足性、调整覆盖、图映射和嵌入.

由于在苏联的闭塞,莱文并不知道库克和卡普已经独立地证明了大多数同类问题是"普遍存在的"——他们管它们叫NP完全问题.

> 因为苏联的任何图书馆或机构没有收到过发表库克和卡普论文的学报,所以那几年苏联并没有人知道这些论文.在旅游和流通方面的限制阻止了这项研究通过私人渠道进入苏联.后来,我的确对卡普的研究感到惊讶,因为我没想到有那么多奇妙的问题都是NP完全问题.

在苏联对莱文的论文的确有一些反应,但和库克的研究所引起的反应相比就小得多了.

> 有些人很感兴趣.我不知道这是真的感兴趣,还是对我的政治麻烦的同情;人们有时对我过分礼貌.但并没有引起很大的反响.20世纪70年代末,苏联人民听说卡普的研究后才开始注意到它.

9 库克和莱文——NP完全问题以后

20世纪70年代中期,莱文正在与苏联官方解决他的问题时,库克开始研究一个新的问题:怎样权衡时间和内存?

任何有着一间乱糟糟的办公室或房间的人都知道在小小的空间里找东西或者整理一捆报纸有多麻烦.库克和多伦多大学的波罗庭一起研究计算机上类似的一个问题.

> 想想国税局试图整理1亿份税单.快速的方法便需要大量的计算机内存,而内存很少的情况下只有缓慢的方法.我们证明了不存在既快速又不需多少内存的方法.

(给擅长数学的读者:所需时间和内存空间之积至少必须与$(n^2)/(\log n)$成正比,其中n是所需整理的税单数.)

对外行人而言,如果科学家宣称解决某个问题是不可能的或不可行的,那就等同于

没有希望了.库克说他青年时的顾问,发明家威尔逊·格莱特巴赫,一个虔诚的长老教徒,常常嘲笑他所选择的领域.

从我证明不可能性闻名开始,他总是非常怀疑.他说:"证明什么事物不可能会是什么进步吗?"(但)并不是说你想解决的问题是不可能的,总会有绕个弯解决它的办法.可以退一步,你并不是真的想要一台永动机,只需要引进一种能源它就可以"永动"了.

对于NP完全问题,你可以利用启发式方法、捷径、近似方法以及其他各种方法绕过它.人们已经研究过这些东西.我想揭示NP完全问题的目的是为了让人们转去解决一些有实际意义的问题.我想这是有肯定意义和建设性的.需要强调的是虽然技术发展迅速,但仍然存在一些基本的原则,仍然有一些制约因素.

库克继续进行命题逻辑算法的基本研究.他目前的兴趣点是寻找命题逻辑式的简短证明(多项式长度).

莱文现在是波士顿大学的计算机科学教授,在那儿他正与马里奥·茨格蒂、拉兹洛·巴白、芝加哥大学的兰斯·弗德诺合作发展一种"透明"证明理论.

这些数学家发展了一种以如下奇怪的方式写证明的方法:如果证明有一个错误,那么对所写证明的任何细微部分进行的数学检验将在一定比例的时间里发现一个错误.为讨论方便,假设每次发现一个错误的概率为1/2.现在假定以这种方式写了一个证明,并检验其正确性.如果对不同的部分进行了40次检验,并且未发现错误,则所写证明错误的概率小于一万亿分之一.

这有点儿像全息摄影.这种照片的每个部分都包含其他部分的信息.证明的各个部分也是如此.

10　很大的问题

最近,普特斯顿大学的安德鲁·威尔斯提出了一种有希望解决费马最终定理的方法,这个问题18世纪以来一直困扰着许多学者,当时这位法国数学家在他的一个证明的边缘上胡乱写了一个难题.证明NP = P会发生同样的事情吗?换句话说,可以在多项式时间内检验其解答的问题可以在多项式时间里解决吗?(图2).

如果某个问题在一定时间内可以解决,那么其解答在同样时间内也可检验.因此P包含于NP中.计算机科学中的一个较重要但却尚未定论的理论问题就是,成千上万个NP完全问题在多项式时间内实际上是可解决的吗?还是的确需要指数时间?也就是说,P等于NP吗?

库克：我们无法证明这些东西，这是数学这个领域的尴尬之处．我们无法证明P不等于NP．因此可能会有人发明某种聪明的并行算法，可以在多项式时间内解决NP完全问题．

很难说这种情况下什么叫进展．虽然这不是唾手可得的，但也有了局部的成果．人们正从众多的不同的领域向它挑战．顺便说一句，有可能 P = NP．

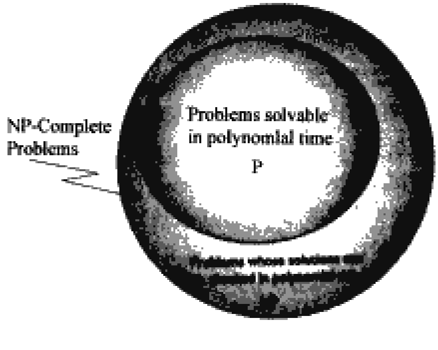


图 2

莱文：数世纪以来几乎所有著名的数学猜想都得到了解决，这个事实强有力地证明了可以在多项式时间内解决NP完全问题，而不需要指数时间．数学家们常常认为历史证明NP问题需要指数时间．但事实上历史强有力地证明了不需要指数时间．

编后语　库克1939年出生于纽约州的布法罗．他10岁时，全家移居乡村，在纽约州的小镇克拉伦斯附近的一间农舍定居．克拉伦斯是可植入式心脏起搏器发明者格雷特巴奇(Wilson Greatbatch)的故乡．与这位在当地很有名气的人距离如此之近，令库克产生了将来要做一名电机工程师的愿望．暑假期间，库克来到格雷特巴奇的工作间——一间粮食仓库中的经改建的阁楼——打工．将问世不久的晶体管焊入电路，他的这一愿望越发强烈了．1957年，库克进入密歇根大学，学习电机工程．

大学第一年，库克选了一门一个学分的计算机编程课程，并深深沉迷其中．他与一个朋友一起编写了一个检验哥德巴赫猜想的程序．电机工程被抛弃了，库克决定主修数学．

1961年库克从密歇根大学毕业后，便去哈佛大学攻读数学博士学位，他原本计划研读代数学，但很快就发现自己已深受逻辑学家王浩的影响．

1971年他发表了题为《定理证明过程的复杂性》(《The Complexity of Theorem Proving Procedures》)的论文．其中他提出了NP完全性这样一个载入史册的概念，并由此被选为加拿大皇家学会会员和美国国家科学院院士．

素因子分解与计算机[①]

和田秀男

1 前 言

$M_{216\,091}$ 作为第三十个麦尔森素数被 D. Slowinski 等所发现. 虽然它被判定为素数,但并不是说细分了 $\sqrt{M_{216\,091}}$ 内的所有的素数. 在自然数 m 是 20 位数的情况下,若想细分 $\sqrt{m}$ 内的所有素数,既使用大型的计算机也需要 1 000 亿年以上. 但若只须判定是不是素数,而不是写出所有素因子的话,那么用一下 Adleman 和 Rumely 在 1980 年创造的方法,在 15 秒钟内就可判定 50 位的自然数. 而且若已经知道了 m 是个合成数,那么对 50 位数在 12 小时内一定能进行素因子分解(Wagstaff 的研究). 下面说明一下有哪些方法.

2 麦尔森数的内容

被发现的第三十个麦尔森数是 $M_{216091}=2^{216091}-1=65050$ 位的素数. 这是人类至今所得到的最大的素数. 不管怎样,$M_p=2^p-1$,p 是素数这个与完全数有关的数被称为麦尔森数. 这个数历来被人们所关心着. 正如 $M_{11}=2\,047=23\times 89$ 这一结果所示,麦尔森数的结果不只是素数. 在 1588 年时被告知 $p=2,3,4,7,13,17,19$ 时,M 为素数. 1644 年,麦尔森指出在 $p\leqslant 257$ 这个范围内,除上面的 p 值外还有 $p=31,67,127,257$ 的情况下,也是素数. 1772 年欧拉证明 M_{31} 是素数. M_p 的除数 q 可以由费马小定理写成 $q=2kp+1$ 的形式. 虽然知道可以利用平方余数的第 2 补充法则写成 $q=8l\pm 1$ 的形式,但同样难免带来大量的计算麻烦. 1878 年刘维卡提出如下的想法.

使 $S_1=4$. $S_{i+1}\equiv S_i^2-2(\mathrm{mod}\ M_p)$ 若确定了 S_i,那么 $M_p=$ 素数 $\Leftrightarrow S_{p-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ M_p)$.

根据这一方法确定了 M_{127} 是素数,此后,又知道了 M_{67}, M_{257} 不是素数,而 M_{61}, M_{89}, M_{107} 是素数,麦尔森的断言,便不可思议地只对了一半. 此后不久,出现了下面的竞赛.

(1) $p>257$ 时,M_p 是否是素数.

(2) $p\leqslant 257$ 时,M_p 可完全素因子分解.

---

① 本文为李再春译.

开始时,这种竞赛是计算机性能竞赛.方法是利用刘维卡测验法.但只要把一个大的数的平方编成计算程序,就无法进行分拆计算.因为 $A \cdot 2^p \equiv A + B \pmod{M_p}$,而计算机是以二进位法进行计算的.第 29 个麦尔森数 $M_{132\,049}$ 就是在大数平方计算上利用了快速乘算法.一般来说算 n 位数的平方所用的时间要比算 2^n 需要更长的时间,但若是 2 位数的话,在 $A, B, C, D < p$ 时,$(Ap + B)(Cp + D) = (p^2 + p)AC + p(A - B)(D + C) + (p + 1)BD$.这种方法用了三次乘法计算.若如此重复计算.就可以用相当于 $n^{\log 2^3}$ 的时间即可完成.进而,若利用快速傅里叶变换,那么只用相当于计算 $n \cdot \log n \cdot \log\log n$ 的时间就可以了.在试用一种超级计算机时,偶然发现的 $M_{216\,091}$ 也是利用了快速傅里叶变换.

第二次竞赛的冷却是在 1979 年用门德歇罗法发现 15 位的 M_{257} 的素因子 535 006 138 814 359 和 1980 年用 $p - 1$ 法发现 25 位素因子 1 155 685 395 246 619 182 673 033 之际,这时 M_{257} 被分解为 $M_{257} = p_{15} \times p_{25} \times p_{39}$($p_n$ 意即 n 位素数).最后使分解工作出现不顺利现象的是 M_{211} 和 M_{251},它们后来用二次筛法在 1983 年末及 1984 年被分别地分解为

$$M_{211/15\,193} = 60\text{ 位合数} = 60\,272\,956\,433\,838\,849\,161 \times p_{40}$$

$$M_{251/(503 \times 54\,217)} = 69\text{ 位合数} = 178\,230\,287\,214\,063\,289\,511 \times 61\,676\,882\,198\,695\,257\,501\,367 \times p_{26}$$

它们不是素数而是合数,这样第二次竞赛也结束了.日本的业余数学学者陶山弘实氏利用 16 比特计算机根据最近的椭圆曲线法得到如下分解结果

$$M_{461/12\,767 \times 358\,228\,856\,441\,770\,927} = 118\text{ 位的合数} = 7\,099\,353\,734\,763\,245\,383 \times p_{99}$$

3　费马数的内容

费马数是 $F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, \cdots$ 形式的自然数.在 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 是素数的情况下 1665 年费马断言 F_n 在 n 为任何自然数的情况下都是素数.F_n 的素因子 q 应用费马小定理可知能用 $q = k \cdot 2^{n+1} + 1$ 的式子表示.欧拉在 1732 年,利用此式子得到 $F_5 = 641 \times 6\,700\,417, 641 = 10 \times 2^6 + 1$ 的分解结果.利用平方剩余的第二补充法则和上面的欧拉的发现可得到 $q = k \cdot 2^{2n+2} + 1$ 这样一个式子.兰多利尔利用此式在 1880 年得出 $F_6 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721, 274\,177 = 1\,071 \times 2^8 + 1$ 的结果.1877 年贝帮提出 $F_n =$ 素数 $\Leftrightarrow 3^{(F_n - 1)/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$ 这样一种判定法.由于 $(F_n - 1)/2 = 2^{2^n} - 1$,那么计算一下 $3^2, 3^4 = (3^2)^2, 3^8 = (3^4)^2$ 的话,需要 $2^n - 1$ 次计算.分解算法是 $A \cdot 2^n + B \equiv -A + B \pmod{F_n}$ 也可以不用.根据他的这一判定法,1905 年得出 F_7 是合成数,但 $F_7 = 59\,649\,589\,127\,497\,217 \times p_{22}$ 这一完全分解结果直到 1970 年才得出.这时用的是连分数法.1980 年利用门德哥罗法得出 $F_8 = 1\,238\,926\,361\,552\,897 \times p_{22}$ 的完全素因子分解结果.目前已知道 $5 \leqslant n \leqslant 19$ 范围的 F_n 都是合成数.但还没有发现 F_{14} 的任何素因子.F_{20} 是否为素数也没有弄清.利用贝帮的判定法要进行 $2^{20} - 1 = 1\,048\,575$ 次的巨大数的平方计算,这在目前的时间上也不允许.对于 $n > 20$ 的 F_n,从发现素因子入手,已知道 74 个合

数的存在了.最大的合数是 $F_{23\,471}$,它约有 $3\times10^{7\,067}$ 位数.和费马的断言背道而驰在 $5\leqslant n$ 的 F_n 中没有发现一个素数,而发现了 83 个合数.

4 $p-1$ 法

要想知道自然数 m 是否为素数,首先就是看能否分解为小素数的乘积.例如要找出 10^8 以下的所有素数,那是非要下一番功夫不可.若 m 是素数,对于 $(a.m)=1$ 的 a 来说,$a^{m-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ m)$ 是自然的.若 $a^{m-1}\not\equiv1(\mathrm{mod}\ m)$,那么就可以断定 m 是合数.这就是所谓的费马检验法.正如 $2^{340}\equiv1(\mathrm{mod}\ 341)$,$341=11\times31$ 所示,当 $a^{m-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ m)$ 时不能说 m 是素数.然而,当 $m-1$ 被素因子分解时,设 $m-1=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$.若对各 $i(1\leqslant i\leqslant r)$ 均有 $a_i^{m-1}\equiv1$,$a_i^{(m-1)/p_i}\not\equiv1(\mathrm{mod}\ m)$ 成立的 a_i 值的话,m 是素数是可以断定的.这是因为 a_i 的位数可以切分为$p_i^{e_i}$,$\varphi(m)$ 为 $p_i^{e_i}$,从而 $\varphi(m)=m-1$,这样 m 为素数就可自然得到.其中 a^{m-1} 可以在求解中编拟成 $a^2,a^4,a^8,a^{16},\cdots(\mathrm{mod}\ m)$,这样对它的计算只要用计算 $\log m$ 的时间就可以了.因此,此法不愧为 $m-1$ 素因子分解的高效率的判定法.那么,当已知 m 为合成数的情况下,又是如何进行素因子分解的呢?1974 年 J. M. Pollard 想出了如下的方法.

一般来说,即使 m 的素因子p 很大,也很容易知道 $p-1$ 可以分解为小素数的乘积.

设 $p-1=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$,$p_i^{e_i}<M$.假设 M 是 10^5 左右的一个数.其次把 $p_i^{f_i}<M\leqslant p_i^{f_i+1}$ 范围的所有的素数幂 $p_i^{f_i}$ 的乘积预先求出,并假定其为 k.$p-1$ 成为 k 的约数.从而根据费马小定理,对 $(a,m)=1$ 中的 a 有 $a^k\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$,从而 a^k-1 和 m 均被p 所整除.这样一来,计算 (a^{k-1},m) 就有可能发现 m 的真约数.请注意 k 虽为一个很大的数,但可以用计算 $\log k$ 的时间就可以算出.最大公约数用欧几里得辗转相除法求得,这可以根据莱茉的定理,进行 m 的位数的5倍以内的分析计算就可以,这样就只用相当于计算 $\log m$ 的时间就可以求得.例如:

在 $m=(10^{53}-1)/9=11\cdots1$(53 个 1 的排列)时,可求得素因子 $p=1\,325\,815\,267\,337\,711\,173$,可写成 $p-1=2^2\cdot3^2\cdot11\cdot53\cdot1\,279\cdot1\,553\cdot3\,557\cdot8\,941$.这是 $p-1$ 法的第一个阶段.M_{257} 的素因子 $p=1\,155\,685\,395\,246\,619\,182\,673\,033$ 可写成 $p-1=2^3\cdot3^2\cdot19^2\cdot47\cdot67\cdot257\cdot439\cdot119\,173\cdot1\,050\,151$.对于 M 来说若大于 119 173 就无法求解,但若做如下的工作的话,既使 $M<1\,050\,151$ 也无妨.在大数情况下,$p-1$ 的素因子除了 1 个数字外都很小,从而可以假定只一个素因子 p_{r+1} 在 $M<p_{r+1}<\tau$ 的范围内.这时按比 $M<q<\tau$ 范围内的素数q 小的顺序 (a^{kq-1},m) 计算的话,就可以取得 m 的素因子 q.这是 $p-1$ 法的第二阶段.

5 $p+1$ 法

当不知道 m 是否是素数,也不能对 $m-1$ 进行素因子分解的时候,如果 $m+1$ 可以素

因子分解的话，可以用下面的判定法.

当 $m+1=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ 时，选择整数 a 和 b，使之 $(m,2b)=1$，a^2+4b^2 对模 m 是平方非剩余，然后确定斐波那契数列 y_n 为

$$y_0=0,y_1=1,y_{n+1}=ay_n+by_{n-r}$$

于是依费马小定理，得 $M=$ 素数 $\Rightarrow y_{m+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$，还有对于 $1\leqslant i\leqslant r$ 有

$$y_{m+1}=0,y_{m+1/p_i}\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow m=\text{素数}$$

y_{m+1} 可以如计算 a^{m-1} 那样利用 $y_{m+n}=y_my_{n+1}+by_{m-1}y_n$，这样计算时间也相当于计算 $\log m$.

其次，看一下 m 等于合成数时的情况. 虽然 m 的素因子 p 或许是个很大的数. 但可以假定 $p+1$ 是一些小素数的积. 与 $p-1$ 法同理，确定一个 k 值的话，在 $\left(\dfrac{a^2+4b}{p}\right)=-1$ 的假设下有 $y_k\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，于是随着计算最大公约数 (y_k,m)，m 的素因子也随之而得到. 这就是 $p+1$ 法的内容. 它在 1975 年由 J. H. Conway 提出，用 $p-1$ 法，还可以利用第二阶段的内容去取得 $p-1$ 法无法得到的素因子.

6 门德哥罗法

用计算机制出随机数表的简单方法是：设 $a\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$b$ 为奇数把小于 2^k 的任意自然数 x_0 作为出发点，使 $x_{i+1}=ax_i+b(\mathrm{mod}\ 2^k)$，$0\leqslant x_{i+1}<2^k$，然后按顺序求 x_i，就会得以 2^k 为周期的数列. 当 $k=32$ 位数时，由于周期大，观察数列的小范围，似乎 $x_1,x_2,\cdots$ 是胡乱显示出来的，据此，若使 $y_i=x_i/2^k$ 时，则 y_i 不可靠，但很一致，可以当做随机数的代用品来使用.

1977 年 J. M. Pollard 把上面的方法变了个形. 提出如下的素因子分解法. 确定一个数列 x_i：$x_0=1$，$x_{i+1}=x_i^2+1$，那么对于素数 p 来说根据房间分配法有 $x_i=x_{i+k}(\mathrm{mod}\ p)$ 的分配（即抽屉原则），这时若 $j\geqslant i$，则有 $x_j=x_{j+k}$. l 取 $lk\geqslant i$ 的值. 若设 $j=lk$，则 $x_j\equiv x_{j+lk}=x_{2j}$. 总之存在一个 j，它可满足 $x_{2j}-x_j\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. 这个性质可以派上用场. 根据递推式以 $\mathrm{mod}\ m$ 依次计算 $x_{2i}-x_i$. 例如求 100 个左右的话，求其积和 m 的最大公约数 1 的话计算 100 次；若不是 1，则求得 m 的真约数的可能性很大. 这种方法就是门德哥罗（蒙特卡罗）法.

7 难波的方法

下面介绍一下，可以用袖珍计算机操纵的简单的方法.

设 $m=x\cdot y$. 若设 y/x 的临近分数为 y_0/x_0，则

$$(yx_0+xy_0)^2-(yx_0-xy_0)^2=4xyx_0y_0$$

若 $x_0y_0=k$，有

$$(yx_0+xy_0)^2-4mk=(yx_0-xy_0)^2 \tag{①}$$

由于 $y/x \approx y_0/x_0$，所以右边的值小. 于是

$$yx_0 + xy_0 = [\sqrt{4mk}] + 1 \qquad (设它等于\ T) \qquad ②$$

于是

$$(yx_0 - xy_0)^2 = T^2 - 4mk \qquad (设它等于\ s^2) \qquad ③$$

上面的这种算法中 $k = 1,2,\cdots$，如 ② 计算 T，计算 ③ 的右边，成为平方数的时候计算 $yx_0 + xy_0 = T$，$yx_0 - xy_0 = s$，从而得出 $xy_0 = (T - s)/2$ 的结果，这时，$1 < (m,(T - s)/2) < m$ 的可能性很大.

以上是难波完尔先生在 1980 年提出的方法，这种方法程序简单，是很实用的方法. 关于 ② 的右边，R. S. Lehman 分析了在 ② 右边加上 2 或 3 时的详细情况.

8　连分数法

把自然数 m 的连分数展开，就成为

$$\sqrt{m} = k_0 + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{\beta n}, \qquad k_i \in \mathbf{N}$$

这时近似分数 P_n/Q_n 和 β_n 的关系是

$$\frac{P_n}{Q_n} = k_0 + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$$

$$\beta_n = (\sqrt{m} + b_n)/a_n$$

$$P_n^2 - mQ_n^2 = (-1)^n a_n \qquad ①$$

用一个平方数 B^2 表示若干个 $(-1)^n a_n$ 的积得

$$\prod P_n^2 \equiv \prod (-1)^n a_n = B^2 \pmod m$$

由于左边是个平方数，若设 A^2，那么 $A^2 - B^2$ 被 m 所整除，这时 $1 < (m, A - B) < m$ 的可能性大，这就是连分数. 这里有个问题就是如何高明地使 $(-1)^n a_n$ 的积成为平方数. M. A. Morrison 和 J. Brillhart 在 1970 年做过如下的努力.

a_n 的 2 以外的素因子是如 ① 中 m 由于 mod p 而成为不完全平方数的素数，从而求出使 $(m/p) = 1$ 成立的以从小到大顺序排列的 1 000 个素数即 $p_1, p_2, \cdots, p_{1\,000}$. 然后聚集 1 003 个包括 2 以及这些素数的 a_i.

当完成素因子分解 $(-1)^i a_i = (-1)^i \cdot 2^{e_0} \cdot p_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot p_{1\,000}^{e_{1\,000}}$ 时和 1 002 维的向量以 mod 2 进行预料时，出现 1 次从属关系即可以发现 $(-1)^i a_i$ 的积可以成为平方数. 其中最费时的是寻求可以分解为众多的小素数的 a_i，求出 a_i 后若有个大的记忆库，就可利用行基本变形发现 1 次从属关系.

以上是大型计算机的算法. 1975 年 D. Shanks 发表了袖珍计算机使用方法. 据说 20 位内的数分解的事情容易. 原理是设 $m = p \cdot q$，$p < q$，在 $m \not\equiv 1 \pmod 4$ 时，把对位于两侧理想数 $p = [p, \sqrt{m}] = [p, pr + \sqrt{m}]$，$r = [\sqrt{m}/p]$ 的既约二次无理数 $\beta_0 = (\sqrt{m} + pr)/p$ 连分数展开. 于是由 $[\beta_0] = 2r$ 得 $\beta_1 = 1/(\beta_0 - 2r) = (\sqrt{m} + pr)/(q - p \cdot r^2)$，从

而得 $b_0 = b_1$. 利用这一结果和 $p^2 = (p)$ = 单项理想数这一结果,当把$\sqrt{m}$以连分数展开时,若 $a_n = t^2$,则有$[a_n, \sqrt{m} + b_n] = [t, \sqrt{m} + b_n]^2$(设它等于 a^2). 这时 p 和 a 同属于理想数一类的时候多些. 因而若把$(\sqrt{m} + b_n)/t$ 以连分数形式展开,则在分母出现 p. 以上就是原理. 算法是:

(1) 把$\sqrt{m}$ 连分数展开. 使 a_m = 平方数 $= t^2$, n = 偶数的 t.

(2) 把$(\sqrt{m} + b_{n+1})/t$ 以连分数展开,使 $b_s = b_{s+1}$ 的 s,这时有 a_s 及$a_s/2 = p$.

在这种算法中,不用 b_n 而利用b_{n+1} 的理由是 $a' = a$ 的共轭等于$[t, \sqrt{m} + b_{n+1})$ 和若把$(\sqrt{m} + b_{n+1})/t$ 连分数展开则以递减顺序前进,在很多情况下,这时,在(1) 环节上计算更前面的数,或把$\sqrt{m}$ 换成$\sqrt{3m}$ 来计算就可以了. 这种算法的优点是,有必要计算的值只有 a_i, b_i,它们的大小都在 $2\sqrt{m}$ 以下.

9　二次筛选

C. Pomerance 在 1982 年,研究了在计算机的记忆库更大的情况下的比连分数法更快的方法,其原理虽与连分数法相似,但更加简单,欲对 m 进行素因子分解时,这样寻找满足 $A^2 \equiv B^2 \pmod{m}$ 的 A 与 B:

设 $x_i = [\sqrt{m}] + i$, $-10^9 < i < 10^9$,那么由于 x_i 与$\sqrt{m}$ 临近,所以 $b_i = x_i^2 - m$ 是个较小的数. 这样一来只有小的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_{1\,000}$ 才成为素因子的可能性下,求 1 002 个这种 b_i. 若 $b_i = x_i^2 = x_i^2 - m = (-1)^{e_0} p_1^{e_1} \cdots p_{1\,000}^{e_{1\,000}}$,那么接下来就可用连分数法,把若干个 b_i 相乘就得出一个平方数. 从而就增大了发现 m 的因子的可能性.

不过问题在于如何快而多地寻找出只被分解为 $p_1, p_2, \cdots, p_{1\,000}$ 的 b_i 上. 固定一个 $p_j (1 \leqslant j \leqslant 1\,000)$. 设 $x^2 \equiv m \pmod{p_1}$ 的解为 $\pm a$,那么把 b_i 分割为p_j 时就有 $x_i \equiv \pm a \pmod{p_j}$. 从而若先在 w_i 中引入一个 $\log|b_i|$ 值,进行一次分解运算求出满足 $a \equiv x_i \pmod{p_i}$ 最小 i 值,从对位于此 i 的w_i 中减去 $\log p_i$,然后再从排列 p_i 数的w_i 中减去 $\log p_i$,同样从满足 $-a \equiv x_i \pmod{p_i}$ 的 w_i 中也减去 $\log p_i$ 的话,可以全部发现可以分为 p_j 的b_i,并可从 w_i 减去 $\log p_j$. 把 $1 \leqslant j \leqslant 1\,000$ 中的所有 j,同样全部筛一次,那么最后 $w_i = 0$ 的 b_i 就是只被分解为$p_1, p_2, \cdots, p_{1\,000}$ 的那个数. 对于较小的 p_j 来说,在很多情况下 b_i 可以用p_j^2来分解,从而求出满足 $x^2 \equiv m(p_j^2)$ 的 x,这样也可用同理求出可以用 p_j^2分解的所有 b_i. p_i^3 也同样. 这样一来不用多少分解计算,就可求出很多只持有 p_j 因子的 b_i. 这种方法称为二次筛法.

10　椭圆曲线法

1985 年初,H. W. Lenstra. Jr 提出一种新的素因子分解法,下面用雅可比椭圆函数 $Sn(2)$ 加以说明(D.V. Chudnovsky 和 G. V. Chudnovsky 的研究).

有从加法公式引出的公式

$$Sn(u+v)\cdot Sn(u-v)=\frac{Sn^2u-Sn^2v}{1-k^2Sn^2uSn^2v}$$

乘以 k,并两边平方,再设 $x_u=k\cdot Sn^2u$,则得

$$x_{u+v}\cdot v_{u-v}=\frac{(x_u-x_v)^2}{(1-x_ux_v)^2}$$

若设 x_u 为有理数并且 $x_u=X_u/Z_u$,则得

$$X_{u+v}=Z_{u-v}(X_uZ_v-X_vZ_u)^2$$

$$Z_{u+v}=X_{u-v}(Z_uZ_v-X_uX_v)^2$$

为了减少计算量,变上式为

$$X_{u+v}=Z_{u-v}[(X_u-Z_u)(X_v+Z_v)-(X_u+Z_u)(X_v-Z_v)]^2/4$$

$$Z_{u+v}=X_{u-v}[(X_u-Z_u)(X_v+Z_v)+(X_u+Z_u)(X_v-Z_v)]^2/4$$

这样通过 6 次乘法运算就可得出 X_{u+v},Z_{u+v}(P. L. Montgomery 的办法).同理可得有关 X_{2u},Z_{2u} 的公式.若从 mod p 考虑的话,从任意出发点 X_u,Z_u 出发,由于它们成为集合,因此总可以得出 $X_{mu}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.这个计算量与 $\log n$ 相差不多.此后可利用 $p-1$ 法的第 1、第 2 阶段便可得出 m 的素因子 p.这种方法叫做椭圆曲线法.在素因子分解中,初次用上了"高度"数学.由于这种方法的出现,人们已分解了至今没有分解的若干个数.由于不需要很大的记忆容量,因此完全可以应用微机来搞实验.例如,最近有这样的例子.

若 p 为素数,那么 $Y_p=(p-1)!+p$ 就不能用 p 以下的数分解.因此,它成为素数的可能性似乎很大.Y_2,Y_3,Y_5,Y_7,Y_{11} 是素数,而当 $11<p<53$ 时 Y_p 是合成数,这一结果已由森本光先生所确定,而且 Y_{53} 大致也被判断为素数,即对于若干个 a,$a^{Y_{53}-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ Y_{53})$ 是成立的.

陶山先生把这个 68 位数的素数做了如下的表示:$Y_{53-1}=52(52!+1)=2^2\cdot 13\cdot 71\cdot 103\cdot 733\cdot p^7\cdot p^{16}\cdot p^{38}$,$p^7=6\ 874\ 997$ 和 $p^{16}=1\ 098\ 482\ 930\ 441\ 153$ 是用 $p+1$ 法发现的,为了表示 p^{38} 是素数,做了如下分解

$$p^{38-1}=2^4\cdot 13^2\cdot 241\cdot 8\ 543\cdot 12\ 799\cdot p^{11}\cdot p^{13}$$

而 $p^{11}=57\ 593\ 701\ 709$ 是用椭圆曲线法在 8 比特微机运转了 3 小时后发现的.由于 p^{38-1} 已分解成功,因此利用费马测验的扩张得出 p^{38} 是素数的结果.据此同理得出 Y_{53} 也是素数.

10 素数判定法

当自然数 m 不能分解为 10^8 以下的素数,$m+1$ 和 $m-1$ 也无法进行素因子分解时,下面的 Adleman 和 Rumely 的方法具有决定性意义.为了更好地说明,设 $t=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\approx 500\ 000$.

有很多素数 $q-1$ 为 t 的约数.若设其积为 s,那么

$$s = \prod_{(q-1)/t} q \approx 2.55 \times 10^{83}$$

又设 $s < m < s^2 \approx 6.50 \times 10^{166}$，对 s 的素因子 q，$q-1$ 的素因子 p 的范围是 $2 \leqslant p \leqslant 17$. 对于这些 q, p 的数组合我们想列高斯和 $\tau(x)$. 即对于 q 的原始根 g 当 $(a,q)=1$ 时，确定 $x(a) = \xi_p \mathrm{indga}$（$\xi_p = 1$ 的 p 乘根）和 x，设 $\tau(x) = \sum_{a=1}^{q-1} x(a) \cdot \xi_q^a$（$\xi_q = 1$ 的 q 乘根）. 于是若 m 等于素数时，$\tau(x)$ 乘以 m 时得

$$\tau(x)^m \equiv \sum x^m(a) \cdot \xi_q^{am} = x^{-m}(m) \sum x^m(am) \cdot \xi_q^{am} = x^{-m}(m)\tau(x^m) \pmod m$$

从而可知，只要存在 1 个使

$$\tau(x)^m \equiv x^{-m}(m)\tau(x^m) \pmod m \qquad ①$$

不成立的数组 p 与 q，那么 m = 合成数. 反过来说，虽然 p 与 q 使 ① 成立时，并不是 m = 素数. 但是对于使

$$m^i = r_i \pmod s, \quad 0 < r_i < s, 0 \leqslant i \leqslant t \qquad ②$$

成立的所有 r_i 不是 m 的约数的话，m 就可判定为素数. 更确切地说，虽然有时需要另外的处理计算，但这时就可以完全地判定是否是素数了. 无论在怎样的情况下，都可以使用这个方法，既使 m 是 100 位数，用大型计算机，在 1 分钟内就可确定其是素数与否.

编后语 近日在烟台举行的中国科协第三届学术交流理论研讨会中，中国科协书记处书记冯长根尖锐地指出了我国学术论文存在的问题，问题共 6 个，分别为引言笼统，不介绍同行工作，参考文献太少，缺乏研究过程，缺乏原创，不介绍已有成果. 这 6 个问题中有 5 个与没大量阅读原始文献有关，所以及时译介各国文献十分重要. 李再春先生非学数学出身，但精通日文，当年在编者一再请求下靠一本日汉数学手册翻译了此文，错误避免不了，但其价值是显然的.

素性判断的一个重大进展[1]

齐民友

判断一个自然数(以下自然数集合均包含 0) 是否为素数,是当代应用数学的一个核心部分 —— 密码的编译与破解的基础之一.2002 年 8 月印度三位青年数学家 M. Agrawal,N. Kayal 和 N. Saxena 在这方面做出了重大贡献.后两位作者当时还是硕士研究生,而且还参加过 IMO 竞赛.第一位是他们的硕士导师.他们的贡献立即得到世界数学界的高度肯定.但他们的文章一直没有正式发表.在他们的工作基础上,得出了素性判断的算法(现在通称 AKS 算法).2004 年 1 月,A. Granville 以《素性判断很容易》为题,在美国数学会的年会上作为当年数学大事之一作了介绍.并于 2005 年 1 月在美国数学会会刊上发表[2].Granville 对 AKS 作了很高的评价,认为其特点在于其"简单"、"独创" 与"优美",其数学基础中学生都能懂,因而力主在中学里介绍它.另一位密码专家 Bernstein 则认为 AKS 算法已将密码破译的速度提高了两百万倍,"当然这还不够快".

本文打算向读者介绍的仅是作为 AKS 算法的基础的一个定理.它极为简单,所有的高中生都能懂.Granville 说,它只是初等数论的一个习题而已.它给出了 a 是素数的充分必要条件如下,这里 a 是任意自然数(以后记作 $\forall a \in \mathbf{N}$).

定理 1 正整数 n 为素数的充分必要条件是

$$(x+1)^n \equiv x^n + 1 \pmod n \qquad ①$$

在 $\mathbf{Z}[x]$ 中成立.这里 $n \geqslant 2$.

这里的关键在于在 $\mathbf{Z}[x]$ 中成立这一限制.$\mathbf{Z}[x]$ 表示整系数多项式之集合.它是一个环.而上式就表示

$$(x+1)^n - (x^n+1) = nq(x)$$

.而且 $q(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 是一个整系数多项式,我们通常用的 $a \equiv b \pmod n$ 则表示 $a - b = nq$,这里 q 是一个整数,所以 $q \in \mathbf{Z}$.$\mathbf{Z}$ 是整数环,而与整系数多项环式 $\mathbf{Z}[x]$ 不同.

证明 (1) 必要性:设 n 是一素数,则 $n \geqslant 2$.由二项式定理

$$(x+1)^n = x^n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} + 1 \qquad ②$$

因为 $1 \leqslant n-1$,所以上式中的 $\sum\limits_{r=1}^{n-1}$ 不会缺项,其各项系数因为是组合数故均为正整数.因

① 摘自《数学通讯》(2005 年第 9 期).

② A. Granville. It is easy to determine whether a given integer is prime. Bull. AMS. vol. 42. no 1.(2005),3-38.

为 n 为素数,所以在系数

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

中,$r!$必可整除分子中的因子$(n-1)\cdots(n-r+1)$,从而上式可写成 nC_r,$C_r\in\mathbf{Z}$.因此,② 式右方可写为 $x^n+1+nq(x)$,$q(x)\in\mathbf{Z}[x]$.必要性得证.

(2) 充分性:设 n 为一合数,而有一个素因子 $p>1$,其幂为 $k\geqslant 1$.我们现在来看 ② 式之右方的一项$\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}x^{n-p}$.因为 $n-1,\cdots,n-p+1$除以 p 时,余数分别为 $p-1,\cdots,1$.所以此数之素因子分解中只能出现 p^{k-1} 而不能被 n 整除.从而它不能在 $\mathbf{Z}[x]$ 中 mod n 为 0.又因 ② 式右方各项对 x 之幂不同而不能相消,所以

$$(x+1)^n-(x^n+1)\equiv 0\ (\bmod\ n)$$

在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不能成立.充分性得证.

注:如果我们认为 1 是素数(有些外国文献中不是这样做的),则上述定理中的条件 $n\geqslant 2$ 可以不要.

现在我们想利用它来证明费马小定理:

费马小定理　若 n 为素数,则对一切正整数 a 有

$$a^n\equiv a(\bmod\ n) \quad ③$$

从表面上看,只须在上面的定理中令 $x+1=a$ 即可.但是这是不许可的.因为前一个定理是在 $\mathbf{Z}[x]$ 中成立的,而费马小定理讲的是 $\mathbf{Z}$ 中的事情.$\mathbf{Z}[x]$ 中的 x 是一个未定元(indetermint),它不是一个数,所以什么叫做"令 $x+1=a$"是需要事先弄明白的.这样说,牵涉对数学中某些根本问题如何正确理解,所以这里稍微多说几句.当我们谈到 $\mathbf{Z}[x]$ 时,我们是对整数环 $\mathbf{Z}$ 再"添加"一个未定元 x,至于 x 是什么,我们并不关心,反正是一个记号就是了.但是我们要规定一些运算规则,使得例如 $x\cdot x=x^2$,ax^3 等等都有意义,而且还有一些运算规则如交换律、分配律等,还有例如同类项的运算规则,都是一些"形式运算的规矩"都成立,从而可供使用.只要服从它们,就得出一个新环 $\mathbf{Z}[x]$.它是整数环 $\mathbf{Z}$ 的一个"扩充".令 $x+1=a$ 是错误的.这是因为其左方在 $\mathbf{Z}[x]$ 中,是一个 1 次多项式,而右方则是另一个环 $\mathbf{Z}$ 中之元,即令将 $\mathbf{Z}$ 扩充,并视它为新环 $\mathbf{Z}[x]$ 中之元,也只是一个零次多项式,不可能与左方的一次多项式相等.在许多问题中,一个多项式总是被看成一个函数,而 x 是一变量.这是在另一框架(或者视角)下讨论其他问题之所需.所谓变量,首先是一个数(实数或复数),它可以在某个集合中取值.而例如魏尔斯特拉斯还主要认为此集合是无穷集合,但它总是一个数.多项式之值也是一个数,它位于另一集合(值域)内.不同的视角用于不同的问题.例如,设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式(函数),而我们想研究有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的各种性质,这时就需要把 x 看成一个变量,这时可问 x 取何值时 $Q(x)=0$ 这样的问题.但若讨论将 $\mathbf{Z}(x)$ 如何扩充为一域,这时所谓 $Q(x)=0$,就是说它是一个零多项式,即其所有系数都为零,只要有一个系数不为零,$Q(x)$ 就不是零多项式.当 $Q(x)$ 不是零多项式时,$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 就有意义,尽管作为一个函数,分母确有可能在某

点为零，使$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$在该点无意义. 这种情况在教学中是会发生的. 例如在讲到通分约分时，就用的是环的视角. 这时要求分母不为零，就是要求 $Q(x)$ 不是零多项式(但若将 x 看成一个数，则 $Q(x)$ 可能在某点为零). 我们通常不提这个问题可能是由于以为中学生从来不会想到它，但是在讲有理函数的各种性质时大家都会讲它(至少是因为高考时是会考到它的，搞错了会扣分). 长此以往，连大学里讲代数时也很少有人想到中学数学里还有这么一个小毛病，以至于人们以为就只有把 $Q(x)$ 看成一个函数的一个视角，而忘记了在整个数学中还有这么一个很重要的视角. 从这个视角看来，就看见了用 $\mathbf{Z}(x)$ 代替 $\mathbf{Z}$，这正是 AKS 成功的关键. 这有点像器官移植，同一个肾，在一个人身上管用，在另一人身上就会有排异反应. 同是一个 $Q(x)$，在高考时必须看成一个函数，否则就会失败，而在讨论素性判断时，则必须看成是一个环中的元素，这样就成功了. 所以中学生的"定位"就是等待器官移植的病人，最重要的只要"配合"，就是听话，老师好比手术医生，他应该懂得排异反应的道理. 科学家的任务是把道理弄清楚. 他自己不做手术，但没有他，手术医生们难以有大的进展.

附带还可提出一个问题：当我们要解方程 $Q(x)=0$ 时，x"称为"未知数. 什么是未知数? 它绝非变量. 因为一旦 x 变了，$Q(x)$ 原来是零，也可能变成非零了，所以未知数首先是数，只不过不知其值罢了，未知二字是数的限制词. 但实际上连 x 是不是数也是未知的. 这就要看您规定了 x 在什么环或域内. 如果规定 $x\in\mathbf{Z}$，就是指的求整数解，而这种解可能不存在. 规定 x 是实数，也可能解不存在，但当 $Q(x)$ 是复系数多项式而在复域中求解，则解一定存在，只不过其值"未知"罢了. 所以，这时未知数其实是"数未知". 这里可能翻译上出一点毛病，未知数是英文的 unknown 的译文，unknown 就是"未知"，连 x 是否为数尚且不知，更不说其值是多少了. 所以从实质上说，这里有两个问题：首先是存在问题，即在某一集合中是否存在 x 适合此方程. 这个集合可能是一个环，或域，或者其他. 其次是，如果解存在了(或假设解存在了)，又怎样把它算出来. 但是教学的事情，不可能一切都只从实质上说，而且还要适当地从实际上说. 这里又得用上器官移植的例子. 学生的"定位"是要听话，听多少话，听什么话，各级学生又有不同. 对于第一次学 $2x+5=-11$ 的学生，难道需要叫他考虑存在的问题吗?教师是很难当的. 即要从实质上说懂得这些问题，更要知道，从实际上说对什么学生说什么话. 还要把二者很好地结合起来，所以教学是一种艺术. 至于多少有点麻烦的方程，研究解是否存在等，那是科学家的事情了. 现在问题在于大家都随着什么指挥棒转，即无法从实质上说，也无法从实际上说，要么拼命"越位"，要么互不配合，球怎么个踢法?

下面回到正题，证明费马小定理. 前面说了，它不是定理 1 的推论，但是其证法可以直接搬过来用.

费马小定理的证明　我们可以用数学归纳法. 当 $a=1$ 时，定理自然成立. 设结论对 $1,2,\cdots,a-1$ 都已得证，则对于 a，由二项式定理，有

$$(a+1)^n=a^n+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}+1$$

但在定理 1 的证明中我们已经看到$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=nC_r$，$C_r\in\mathbf{Z}$，但同时还有 $a^{n-r}\in\mathbf{Z}$，所

以

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} = nC, \quad C \in \mathbf{Z}$$

这就是说

$$(a+1)^n \equiv a^n + 1 \pmod n$$

再用归纳假设，即得

$$(a+1)^n \equiv a + 1 \pmod n$$

定理证毕.

定理 1 的证明还告诉我们如下结论成立.

定理 1′ 正整数 $n \geqslant 2$ 为素数的充分必要条件是，对一切整数 $r, 1 \leqslant r \leqslant n-1$，$\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 均可被 n 整除.

由此观之，n 的素性的判断可以归结 $n-1$ 次除法，这不是很简单的事情吗?问题在于须作的除法次数太多，现代密码中，须判断其素性并加以分解的 n 常为位数达200以上的整数. 所以 $n-1 \sim 10^{20}$，即令每次除法耗时 1 秒，做完这么多除法须耗时 10^{20} 秒，这是多长时间?读者不妨做一个估计：按最新的数据，宇宙的"年龄"是137亿年，按每年365天每天 86 400 秒计算，宇宙的年龄也不过是

$$13.7 \times 10^9 \times 368 \times 86\ 400 \text{ 秒}$$

满打满算，也就不过是 10^{17} 秒而已!只能完成任务的千分之一!现代数学的发展使得我们能够处理这么大的数量，什么成亿成兆，什么恒河沙数，连小菜一碟的资格也没有. 这真是人类智慧的骄傲. 在密码学中，人们时常会说到某种密码是不可破译的，这里有一个数学界中的默契，正如 Granville 说的：不可破译就是使用从今日算起的100年中全世界所已有和可能造成的计算机(按最近二三十年速度的提高，预计其能力的提高) 仍然译不出来. 研究如何解决这类问题的数学分支，称为计算复杂性理论. AKS 的贡献就在于他们从数学出发，在素性判断上突破了"不可破译" 的障碍，而他们最关键的思想是 $\mathbf{Z}$ 变到 $\mathbf{Z}[x]$.

本文不能更多地介绍 AKS 了，更不能介绍密码学和计算复杂性理论. 但是，人们会越来越多地关注这些问题. 新"课标" 中鼓励有条件的高中开设这门或其他的选修课. 至于初等数论，更是许多中学师生所喜爱的. 不过希望能联系到这类问题，想要入门并不难，例如本文讲到的几个定理及其证明，高中生是可以懂得的.

编后语 2002 年的图灵奖授予 1977 年在 MIT 合作开发了一种高可靠性公钥密码算法的 3 名学者：利维斯(Ronald L. Rivest)、沙米尔(Adi Shamiv) 和阿德勒曼(Leonavd M. Adleman). 现在这种广为人知的算法以他们 3 人的名字的首字母命名，叫做 RSA 算法.

1976 年，迪菲(W. Diffie) 和海尔曼(M. E. Hellman) 发表了一篇题为《密码学中的新方向》(《New Directions in Cryptography》) 的论文，提出了一种崭新的密码系统，在这种系统中，加密密钥和加密算法都不需要保密，唯一需要保密的是解密密钥，这导致了公钥密码学(Public-key Cryptography) 的诞生，使密码学进入了一个新纪元.

科普名篇

世界最古的几何学①

曾昭安

人类生存于宇宙间，成为世界上的主人翁，主要原因是在于有方法去研究自然界，掌握它们的规律，使一切事物都好好地为人类服务.这就是科学之所已发生并应该被重视的道理.但自然界的现象有多方面，因而科学的内容有多种，其中以"数量"和"形象"为出发点的，叫做"数学".恩格斯说："数学的研究对象，是现实世界的空间形象及数量关系."又说："几何学是以空间形体为出发点，而算术代数则以数量为出发点".因此我们可以说，几何学是处理空间形体关系的科学.这里所说的形体，当然具有事物实在的内容，决不是自由想象的产品.如果抹杀人类历史实践对于几何学发展的意义，就会踏入观念论的领域了.

我国在古昔渔猎时代，有伏羲氏书八卦.周易系辞说："古者包犠氏（即伏羲氏）之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦."又说："作结绳而为网罟，以佃以渔."现在山东嘉祥县武梁祠里还保存有汉代所刻的一块石碑，碑上刻着一幅图画，左面是女娲，手里拿的十字架就是圆规，右面是伏羲，手里拿的三角板就是方矩.可见我国人对于数学的观念，萌芽是极古的.到后来耕稼时代，农产品的种植收获，必须注意季节寒暑的变迭，才好从事工作，因而想知道日月盈仄，星辰运行等道理，于是天文历算等学科也产生出来.史记引系本说："黄帝（公元前2650年顷）使羲和占日，常仪占月，大挠作甲子，隶首作算数."尧（公元前2330年顷）治历象，置闰法，这正是适应时代的需要，提供了对于数学的发展.鲧（公元前2240年顷）筑城垣，必须了解地形的高低.禹（禹元年是公元前2183年）治洪水，必须明白水流的方位，因是更产生了测地术水利学的知识.这里所说的天文历算测地水利等科，当然离不了数，尤其是脱不了形.这样看来，几何学的成长，在我国可说是已有几千年的悠久历史了.现在我国遗传下来的两部古数学书，一叫周髀算经，一叫九章算术.在周髀算经内，载有周公（公元前1120年顷）与商高谈用勾股术以测天的法则，正是表示几何学的实用.在九章算术内共分九章，包含有二百四十六个问题.九章是方田，粟米，衰分，少庚，商功，均输，盈不足，方程和勾股.其中谈论几何学问题的有四章.方田章载有计算田亩面积的各种几何问题，如矩形田、梯形田、斜方形田、圆形田、半圆形田、弧形田、环形田的面积计算.在计算圆田面积时，正确地得出圆面积等于半径乘半周的公式.少庚章解决了从田亩面积计

① 摘自《数学通讯》，1954年，元月号.

算周长或边长，从圆球体积计算直径等问题，使用了开平方和开立方的正确方法．商功章载有各种几何体积的计算方法．实际上处理了一些工程问题，如筑城、建堤、挖沟、修渠等，书中并载有当时土木工程施工经验的计算方法．例如说，等量的土壤原体积、碎土体积和建筑用坚土体积的比例约为四比五比三．又说道，冬季施工筑堤，每工可以修四百四十四立方尺；春季施工挖沟，每工可以挖七百六十六立方尺，相土的人工加百分之一；夏季每工挖七百八十一立方尺，如有沙砾地带人工应加倍．这些实际知识和核算方法，到现在看来，还是正确可靠的．勾股章解决了各种有关勾股形的问题，创设了勾股容方术和容圆术的公式．

几何学，按希腊文的字义，是说"测地"的意思．古代埃及因尼罗河的每年定期泛滥，田亩地界，发生变迁，为要求得正确的测地起见，几何学才应运而生．希腊史学家希罗多德说："希腊的几何学是由埃及人传给我们的．"事实上，希腊的大数学家，大都到埃及留学过，修过几何学之后，再回到本国．因此埃及的数学才传入希腊，后来又直接流入罗马，从罗马再分散到欧洲诸国．故我们可以说，欧洲人所学的几何学，是由希腊的几何学遗传下来，而希腊的几何学是从埃及得来的．

西方最古的数学书为阿默斯手册．阿氏是公元前1700年顷的埃及人．这本手册经英国博物院收藏家莱德搜集所得，现藏于伦敦博物馆中．西人得那书后，常夸示于众说，他们的数学，已有三千年以上的历史．那书所用的纸张是由尼罗河畔所产生的一种水草捻成，所用的文字是象形文字．书里载有若干算术和几何计算题．但只写出答案，并无演草算法，也没有什么定理和证明．可是我国古代，在很早以前，无论在石器时代的陶器上，和殷朝的钟鼎上，都已经有了精美的几何图案，表现数学知识的高超，不是更可证实文化的优良，无胜于西方古国吗？

古代希腊学者有退利斯(公元前640—前546年)，毕达哥拉斯(公元前582—前493年)，柏拉图(公元前427—前347年)，欧几里得(公元前330—前275年)诸人．这些学者都是数学家，也都是几何学家．退利斯能测量金字塔的高度，预言日食的日期．毕达哥拉斯说："数学是万能，一切数起于一，一是万事的根本．"柏拉图以学习几何学为研究哲学必要的阶梯，会在他的学校门口悬示一个标志说："不习几何学者不许入门．"欧几里得教授弟子学习几何学．在他的诸弟子中，有埃及王托勒密第一，埃及王因为学习几何学大感困难，有一天向欧氏问道："有没有更容易的法子去学习几何学呢？"欧氏答说："几何学中没有特别为王者而通融的道路．"这样看来，可见他们都是重视数学，并教人学习，必须痛下苦功夫，决无投机取巧的便宜办法哩！

欧几里得搜集从前人关于几何学的著述，编纂成了一部书，名叫《几何原本》，书成于公元前300年顷，分为十三卷，第一、二、三、四、六各卷，论平面几何．第五卷论比例定理，第七、八、九三卷论算术，第十卷论无理数，第十一、十二卷论立体几何，第十三卷论有规则的立体．因为书体编制适宜，在欧氏死后两千年，欧洲各国都把它当做几何学中的圣经，于是就拿"欧几里得"这个名词，竟作为"几何学"的替代名词．直到1829年俄人罗巴契斯基运用辩证法的观点，创立与"平行公理"无关系的几何学，才使几何学别开生面，更进入一个新的境地．

《几何原本》之所以被西方人所推崇，因为在欧几里得以前，欧洲没有别部书籍，说理明显，立论谨严，比得上《几何原本》的．反观我国，在欧氏之前一世纪多，确能找到有科学政治两方面俱臻上乘的杰出人物．这个人是谁?就是战国时代的墨翟（公元前480—前390年）．墨翟著有墨经十五卷，传于世者有七十一篇，今只存五十三篇，阙佚了十八篇．在所佚诸篇中，有八篇还存着目录，其他十篇目录亦亡掉了．墨经中所载科学文字，有几何学十九条，论时空概念十一条，力学十条，光学八条．各条标义立说，都极精微奥妙，颖异深刻．只就几何学诸条来说，随便取出其中一条，拿来和几何原本相对照，就可看到在原本中所说到的，墨子早在欧氏之前一百多年已经想到说出了．故墨经的几何学，应该称为世界最古的几何学，也就是论理缜密的世界最早几何学了！我国有此伟大的著作，实是科学史上的光荣．我们对此应该珍视它，阐发它，使往日的辉煌成就，继续发扬光大，这就是大家的责任，努力的方向了．今就墨经中几何学十九条解释如下：

(1) 经云："平，同高也．" 说云："谓台执者也，若弟兄．"

按："平" 是说距基线或基面有同样高度的意思．例如两人以手执持而抬举东西，就应该相平而等高，故曰"台执"．推广"平" 的意义，那么就弟兄来说是"同辈"．这里所谓"同"，当然不是说年龄相同，身体大小相等．例如说亚洲的珠穆朗玛峰高于北美洲的俄利萨巴峰，只是就地平来说．若论到它们距离太阳的远近，那么在白书间，俄利萨巴峰却比珠穆朗玛峰距离太阳更远．这是指示我们论"平" 时，必须联系实际，应该顾到所居处的环境和所根据的条件，才算正确呢．

(2) 经云："同长，以正相尽也．" 说云："同，捷兴狂之同长也．"

按："同长" 就是等长．"以正相尽"，是"恰到尽头" 的意思．"捷与狂" 是说取"捷径" 与"急路"，不能多走弯路的意思．但不一定是一条直线．例如测球面上两点间的长度，我们应该在球面上，取大圆的弧段，作为"捷径"，但不能取两点间的最短距离，穿入球体内，成为一条直线．又如以手抛物，物所走的路是抛物线，也就是它的"急路"，故在那时所求的"同长"，就应该沿着抛物线段去计量它的长度了．

(3) 经云："中，同长也．" 说云："中：心．自是往相若也．"

按："中" 是说从直线上，或从圆或球的直径上取一点，距前后两端有等长的意思．故那点就是这直线或圆与球的中心．

(4) 经云："圆，一中同长也．" 说云："圆，规写交也．"

按："圆" 是指圆周或圆球．因圆周与圆球，都有一个且只有一个中心．这个中心，距圆周或圆球上任何点，都是有同样的长度．在墨子以后一百多年，欧几里得所著《几何原本》中，对于圆所下的定义，与此说法全同．又圆周与圆球，都是用规所作的交迹，故曰："圆，规写交也．"

(5) 经云："厚，有所大也．" 说云："厚，惟无所大．"

按："厚" 即"积"，是体积面积的统称．若以"厚" 指体积来说，就有长、宽、高三者，故曰："厚，有所大也．" 但若以"厚" 指面积来说，故只有长宽而无高，故曰："厚，惟无所大．" 所谓"大" 是"高" 或"深" 的意思．

(6) 经云："方，柱隅四杂（原本作"讲"）也"，说云："方，矩写交也．"

按:"方"是指矩形或立方体.矩形或立方体的各面,都具有四个直角,也就是四隅."杂"就是"匝",可解释为"周界"的意思,无论矩形或立方体,都以四周为界,因此知"方"是用"四匝"去规定的,又矩形与立方体,都是用矩所作的交递,故曰:"方,矩写交也."

(7)经云:"倍,为二也."说云:"倍,二尺兴尺,但去一."

按:"倍"就是"二"的意思,有人说"某数的一倍",实际就是指"某数的二倍".又二尺与尺,相差的数值为一,故曰:"二尺与尺,但去一."这里的"去"字,就是"相差"的意思.

(8)经云:"一少于二而多于五,说在建位."说云:"一,五有一焉.一有五焉.十,二焉."

按:"一"可作为"一",也可作为"一十"或"一百",必须视它的位次规定后,才能决定.当"一"在单位时,它是"少于二",当"一"在十位时,它就"多于五"了.因此我们可以说,"五包含有一".但十位的"一"却包含有"五",也就是"十"含有两个"五"呢.

(9)经云:"体,分于兼也."说云:"体,若二之一,尺之端也."

按:形体是由部分集成."兼"就是部分的意思,故曰:"体,分于兼."例如"二"是由"一"所成,"线"是由"点"所成,故曰:"体,若二之一,尺之端也."

(10)经云:"穷,或有前,不容尺也."说云:"穷,或不容尺,有穷;莫不容尺,无穷也."

按:"或"是"域"的正字,表示"区域"."尺"是"直线","穷"是指"有穷"的处所.因"有穷"处的前方尽头,是有边界的.这样的区域内,自然不能容纳"无穷"长度的直线,若能容纳无穷长的直线,那么这样的区域间必是"无穷广"的.

(11)经云:"尽,莫不然也."说云:"尽,但止,动."

按:在有穷区域内,不能包括于内,所以小取篇说道:"或(即"域"字)也者不尽也."但在无穷区域内,却无所不包了.故曰,"尽,莫不然也."这里的尽字,就是数学中的"无穷大",写作"∞".在数学中的 ∞,实含有巧妙的意义.例如我们寻常说 1,2,3,4,…,这些数的最后一个,就是 ∞.这里的 ∞,表示一个绝大的数,可把它当做一个固定的"呆"数,故云"但止".但在高等数学内,知道 ∞ 不是一个呆数,它加以 1,加以 2,或加以任何数,仍是 ∞,它乘以 2,乘以 3,或乘以任何数,也仍是 ∞.因此可以说,它是一个"活动"的数,故又曰"动".

(12)经云:"端,体之无厚而最前者也."说云:"端,是无间也."

按:"端"是几何学中的点,因形体的尖端是没有长短广狭厚薄,并且在体的最前处.例如直线的两端就是点.又"端无间"是说点无内容,只有位置,不能分割的意思.

(13)经云:"有间,中也."说云:"有间,谓夹之者也."

按:"间"是指形体边界内所含或所夹的部分,也就是"中"的所在处.不过这里的"中",不必一定是指中心一点,凡界内所含的部分都得谓之"中".例如两点间的线段就是线"中".两线间的夹角就是角"中".

(14)经云:"间,不及旁也".说云:"间,谓夹者也.尺前于区穴而后于端,不夹于端与区内."

按:"间"是"中"的意思,那么,边界就不计算在内.例如说两点所含的线"间",那两个端点是不计算在内.又说两线所夹的角"间",那两条界线也不计算在内.故云"间不及

旁",也正是近代数学"集论"中"开集"的说法.但西人的集论,于十九世界后期,坎托方才发现,而我国人竟于两千多年前,已有那种思想,可见其严正缜密达到了怎样惊人的程度呢!再墨经中称点曰"端",线曰"尺",而曰"区"或"区穴".面的前方即区的边界是"线",而线的尽头是"点".故曰:"尺前于区穴而后于端".又线不夹于点与面间,故曰"不夹于端与区内".

(15) 经云:"纑,间虚也."说云:"纑虚也者,两木之间谓其无木者也."

按:"纑"是界内空无所有的意思,也就是近代数学"集论"中"空集"的说法."木"的意义表示"标准",故"两木"可指是两点或两线皆通.若两点或两线之间所含者是"空集",那么自然没有点,也没有线了.

(16) 经云:"盈,莫不有也."说云:"盈,无盈无厚,于尺无所往而不得."

按:上条的"纑"是指"间虚",本条的"盈"是指"间实".故"盈"也就是集论中"真集"或"非空集"的说法.拿直线来讲,无论是"纑"是"盈",都可以的.但线是没有体积,故曰"无厚".

(17) 经云:"撄,相得也".说云:"撄,尺与尺俱不尽;端与端俱尽;尺与端或尽或不尽.坚白之撄相尽,体撄不相尽."

按:"撄"是接触的意思.因线的长度是无穷的.使线与线合,须到无穷远处,故曰:"撄,尺与尺俱不尽."点与点合,是在有穷处所,故曰:"端与端俱尽".线与点可相合于有穷处,或远到无穷远,故曰:"尺与端或尽或不尽."物体,以手摸它,知道体质的坚柔,用眼看它,知道颜色的白黑.但质坚与色白两事,同是统一于一个物质,故曰:"坚白之撄相尽".又两个物体不能同时占据一空间,故曰:"体撄不相尽."

(18) 经云"仳,有以相撄,有不相撄也."说云:"仳,两有端而后可."

按:"仳"是两个形体,有两点以上相撄而不相尽的,即"部分接合"的意思.故两个物体,若端点相撄,当然可以互相接合.

(19) 经云:"次,无间而不相撄也."说云:"次,无厚而后可."

按:"次"是两个形体处处相合的,即"完全叠合"的意思.故两个物体,若处处叠合,自然无须顾到它的厚度.

再就墨经中论时空概念十一条解释如下:

(1) 经云:"日中,正南也."

按:"日中"就一天来说,太阳走到最高点,即是"午时",也是"正南方".就一年来说,夏至日影短,冬至日影长,即当冬至太阳走到最南方.

(2) 经云:"直,参也."

按:"参直"是古代立表以测日影的法子,就是使太阳、表尖和日影三者对准观测,即"参望相直"的意思.这样就可决定子午线,即南北的方向;也可以测知季节,即冬至日和夏至日.周髀算经中有"测望术",海岛算经中有"后表与前表参相值"的说话,都和"参直"的意义相同.

(3) 经云:"得,坚白不相外也."说云:"得,二坚异处不相撄,相非,是相外也."

按:"得"是我们对形体所得的概念.譬如我们以手摸物,得知它的体质是坚硬的,用

眼看物，得知它的颜色是雪白的．坚白两个概念，是互相渗透着，融合着，同固于一个物体中．以是知坚白两事，是彼此有联系，而不相外的．但若讨论两个占据不同空间的坚固物体时，它们是互不相撄的．那么两个物体遂各自独立以成系统，就是彼此相非而相外了．

(4) 经云："久，弥异时也．" 说云："久，合古今旦莫(即"暮" 的本字)．"

按："久" 是指时间，"弥" 是"偏及" 的意思．时间是偏古今早晚不同时刻的说法．

(5) 经云："宇，弥异所也．" 说云："宇，冡东西南北．"

按："宇" 是指空间．空间是偏集东西南北不同的方位．淮南子以往古来今为"宙"，上下四方为"宇"，与这里两条所说的正同．

(6) 经云："始，当时也．" 说云："始：时或有久或无久．始，当无久．"

按：墨经分"时" 为"有久" 与"无久" 两种，"有久" 的时是指经过的"时间"，"无久" 的时是指正在的"时刻"．"始" 是表示"无久" 的时刻，可解释为"正当某时"．例如说正当"正午十二时"，就是"无久" 的时．又如说做事"两小时"，那就是"有久" 的时了．

(7) 经云："止，以久也．" 说云："止，无久之不止，当牛非马，若矢过楹；有久之不止，当马非马，若人过梁．"

按："久" 是指时间．物的静止，必须依赖时间才可看出，故曰："止，以久也．""无久" 的时刻，可当做"瞬息" 的时间．当瞬息的时间有所移动，比方原来看见一匹马，转瞬间，马已不见，而看见一条牛了．好像飞矢过楹，矢忽飞过，却又呈现他物或仅留柱楹于眼前，故曰："无久之，不久，当牛非马，若矢过楹．" 但当"有久" 的时间有所移动，那么，我们原来看见一匹马，决不能同时同处又看见一条牛．除非马已走过，那处无马时，别物才来补充，好像人过桥梁，当人在桥上，他物不能同时占据人的空间，必待人过桥后，变成空桥时，他物再来补充，故曰："有久之不止，当马非马，若人过梁．" 再分别"无久" 与"有久" 的时，也可拿看"活动电影" 与看"幻灯影片" 来说明．看活动电影，在幕布上同一位置，可以看到人物的活动，这是因为人物的形影，入于我们眼帘内，可保留一秒的二十四分之一的时间，不即时消减．若在这个时间内，换上别个形影，那么前后的影子，就合而为一，看起来好像是人物的活动．但若是看幻灯影片，一张一张地换掉，那就只能看出呆板的映像罢了．

(8) 经云："宇，或(古"域" 字) 徙，说在长．" 说云："宇，长徙而有(读为"又") 处，宇．南北在旦有在莫("暮" 的本字)．"

按："或" 解释为区域．"域" 和"处" 都是宇的一部分，即空间的一部分．"长" 是久的一部分，即时间的一部分．因空间是变迁的，时间也是变迁的，两者互相联系着而并同进行，故经云："宇域徙，说在长．" 说云："长徙而又处宇．" 既然知道时空是有变迁的，那么所谓南北者早晚所指可就不相同了，故曰："南北在旦又在暮．"

(9) 经云："非半不靳，则不动，说在端．" 说云："非：靳半，进前取也．前则中无为半，犹端也，前后取则端中也．靳必半，无与非半，不可靳也．"

按："靳" 音灼，是分割的意思．当形体被分割时，若累次平分，截取它的一半，长此继续下去，达于极限时，已再无半可以分割，就进到体的固定端点，成为不动的一点，故曰："非半不靳，则不动，说在端．""进前取" 是累次截取．"前" 是继续前进的意思．依法取半，

被分体的长度逐渐减少，以至于无，故曰："非"．当累次平分，所取半体渐趋于零以成一点，故曰："中无为半，犹端也．"求极限所得的是"端点"，累次所余的是"体间"，故曰："前后取，则端中也．"平分形体，每次余下的半分，再行陆续分割．当形体陆续缩小以至于无时，那就无体可以分割取半了，故曰："新必半，无与非半，不可新也．"

(10) 经云："宇：进无近，说在敷．"说云："宇：伛不可偏举，宇也．进行者：先敷，近；后敷，远．久，有穷无穷．"

按："宇"是指空间．"敷"是"专"字每文，而"专"是古"布"字．所谓"敷"就是"分布步履"，也就是"行路多少"的说法．因空间是无限大的，到处都可作为中点，故进行于宇内，原无远近可说，只有就某人的行程多少去计算，才能分别出远近来，故曰："宇：进无近，说在敷．"又"伛"是"区"字繁文，即"区域"的意思．若只谈论一个区域，那么就不可能包括无限的空间，故曰："区，不可偏举宇也．"但在一个区域内要分别远近，就可以进行者先经过的地方叫做"近"，后经过的地方叫做"远"，故曰："进行者：先敷，近；后敷，远．"再者"久"是指时间．因时间也是无限长的，它没有起点，也没有终点，正和空间的"宇进无近"意义相同，都可说是无穷大．可是就做某件事的始末来说，那又变成有穷了．这又和在空间以行程先后去区别远近的意义相同，故曰："久：有穷无穷．"

(11) 经云："行修(与"修"通) 以久，说在先后．"说云："行，者("诸"字省文) 行者必先近而后远．远近，修也．先后，久也．民行修必以久也．"

按："修"解释为行程"长度"，"诸行者"就是"凡行者"的意思．我们行路必须依赖时间，凡行路的人，总是先近而后远．行路的远近，正代表行程的多少；行路的先后，是表示时间的久暂．故如经说内所云．

墨经中谈力学各条，也极精彩．墨子规定力的定义，比希腊的亚里士多德(公元前384— 前322年) 早过百年，说明杠杆原理比阿基米得(公元前287— 前212年) 早过两百年．今就力学十条解释如下：

(1) 经云："力，形之所以奋也．"说云："力，重之谓．下，举，重奋也．"

按："形"是形体，也就是物体．"奋"是运动．力的作用，是在使物体发生运动．如若看见物体有运动，也就知道力的存在了．故力的表现是在重量．物体能够下落或被举上，其原由都由于力，也就是重量运动的结果．

(2) 经云："动，或从也．"说云："动，偏祭从．若户枢免瑟．"

按："从"是"纵"字省文．"祭"是"际"字省文．"偏祭"是"边际"或"边侧"的意思．当物体静止时，要使它运动，必须以力纵之，也就是须有力作用于它然后可．故曰："动或纵也．"但加力于物体时，须注意于"着力点"．例如在地面上放置一物，若从正面向下施力，那物体仍然不生运动；必须从旁边用力推之，那物体自然移动了．故曰："偏际纵．"又如要打开门户，也须从门扇旁边启发，户枢的轴纽是不会动的．所谓"免瑟"解释为"免闭"，即使门"免于关闭"，也就是将门打开的意思．故曰："若户枢免瑟．"

(3) 经云："合与一，或复；否，说在拒．"

按：在力学中可合数力以成"合力"．故"合力"与"一力"是相当的，又力作用于物，必生有反作用．它们的量是相等的，但方向相反．所谓"拒"就是"反作用"的说法．反作用的

表现,有时至为明显,但有时因为摩擦力的消耗,以至于看不出来,故曰:"或复,否."

(4) 经云:"负而不挠,说在胜." 说云:"负,衡木,加重焉而不挠,极胜重也,右校交绳,无加焉而挠,极不胜重也."

按:"负" 是"背负","挠" 是"偏挠"."衡" 是"平衡","极" 是"重心".这条论重心的道理说,设有一根平衡的木,虽加重力而不偏挠,这是因为重心担任了重量.但若旁边有支柱,交相牵曳,那么重心失调,不能胜任重力,就会发生偏挠了.

(5) 经云:"衡而必正,说在得." 说云:"衡,加重于一旁,必捶.权,重相若也.相衡,则本短标长.两加焉,重相若,则标必下,标得权也."

按:"衡" 是用以称物轻重的器皿,如天平或秤之类."权" 是砝码或称锤.我们使用天平或秤,必须了解杠杆的原理.例如用天平时,以物体重量加于一边,那么另一边所放置的砝码必须等重,才能使天平得平.故曰:"衡,加重于一旁,必捶.权,重相若也." 又如用手提秤以秤物时,在挂物的这头杆本很短,在放锤的那头杆标较长,那么在秤钩上挂重物,秤锤必须移置于远离手提处,才能使锤下坠,因而秤出它相当的重量来,也就是由锤得以知道物重的意思.故曰:"相衡则本短标长.两加焉,重相若;则标必下,标得权也." 但若秤杆不正,秤锤下倾,那就表示物体的重量,不满于所得了,故曰:"衡而必正,说在得."

(6) 经云:"挈与收板.说在薄." 说云:"挈,有力也.引,无力也.不必所挈之止于施也;绳制之也,若以锥刺之.挈:长重者下;短轻者上.上者愈得,下者愈亡.下者绳直,权重相若则正矣.收:上者愈丧,下者愈得.上者权重尽则遂."

按:力可分为两种:一叫"挈",是向上的力,如悬挂、提起等;一叫"收",是向下的力,如陨降、坠落等.这两种力是相反的,且互相逼迫,故曰:"挈与收板,说在薄.""板" 是"反" 字繁文,"薄" 是逼迫的意思.挈物上起,常依赖于动作,可说是有形的力;引物下降,只是地心吸力的表现,可看做无形的力.故曰:"挈,有力也.引,无力也." 挈力所作的功,不只是单靠直接的施与,我们还可利用机械,使施力少而护功多.如利用"轮轴""滑车"等,就可藉绳索以作牵拉.又利用"尖劈",就可做成锥子以便刺入物体.再拿杠杆所作的秤来说,在向上力方面,长臂重而下垂,短臂轻而跷起,当跷起愈高时挈力愈增,下垂愈低时挈力愈降.必须将向下臂抬升,使它平直,那么秤锤和物重才两两相等而归平正.在向下力方面,当杆臂跷下时引力减弱,倾下时引力增多.若当上臂权重失调时,就会降落而下坠了.所谓"遂" 就是"坠" 的意思,故如经说所云.

(7) 经云:"挈……,说在……" 说云:"挈,两轮高两轮为辎车.梯为;重其前,弦其前.载:弦其前,载(即"再" 字) 弦其轱,而县(即"悬" 字) 重于其前.是梯,挈且挈则行.凡重,上弗挈,下弗收,旁弗劫,则下直.杝,或害之也.沶梯者不得汴直也.重不下,无跨也.若夫绳之引轱也,是犹自舟中引横也."

按:这条是说明使用拖推力的工具.例如后轮高而前轮低的四轮车叫做"辎车"."梯车" 重心居前,车的前木做成弓形."载车" 的前木也做成弓形,车下用以拉动的木条亦做成弓形,重物悬系在前面.梯车是因为前面拉,后面推,才能行动.一切重物若从上不拉,在下不扯,从旁不加以强力,那物体的放置必是平稳的.但若物体移动了,就必系有力以

变更它的位置.驾驶梯车没有经验的人,必不能使车安定而归平稳.若车的重心不在下面,登车的人就不能依靠着车以前进.我们用绳去挽车下的木条使车进行,也就像人拉着船上的横木使船行动,同是一样的道理.

(8) 经云:"倚者不可正.说在剃."说云:"倚:倍,拒,掔,射.倚焉则不正."

按:这条是论机械学中"斜面"的原理."倚"解释为"偏侧".当物体斜倚时,就是偏歪不正."剃"是"弟"字繁文,也含有"偏斜"的意思.故曰:"倚者不可正,说在弟."偏倚的情形有好几种:如背负,如抵拒,如牵曳,如投射,都是倾斜的表现.故曰:"倚:倍,拒,掔,射.倚焉则不正.""倍"是"背负".掔与"牵"字通.

(9) 说云:"均之绝,不.说在所均."说云:"均发,均县(即"悬"字).轻而发.绝不均也.均,其绝也,莫绝."

按:这条是说明悬物的道理.我们以细发悬物,发能够不中断,须看物体的轻重何如.若重力不集中于一点,受力处互相牵引,彼此均匀,那么,发虽微细也不至于断绝了.

(10) 经云:"正而不可担,说在抟."说云:"正,丸.无所处而不中,县抟也."

按:这里的"正"应解释为"丸",即"圆球"."抟"读若"转",即转动的意思.因圆球易转,不可施以外力.不然就会旋转自若.故曰:"正而不可担,说在抟."又圆球上到处的位置,都可作为中央.故曰:"无所处而不中."再者日月星辰,都像球体,悬挂于天空,运转不息.所谓"县抟"就是悬空运转的意思.

墨经中谈光学的有八条.解释光的性质,光的大小,光和影的关系,各种镜中物和像的关系.前后次序,井然有序,面面兼顾.纯然是一部优美完整的几何光学.西洋人称他们的最古光学,每以欧几里得的著作居首.而我国的墨经,在上面已经说过,更早了一百多年.故就几何学的应用方面说来,墨子实是创立几何光学的第一人,也应该正当地把他放置于欧几里得的前面!今就墨经中光学八条解释如下:

(1) 经云:"景徙,说在改为."说云:"景,光至.景亡,若在;尽,古息."

按:这条是规定影的定义和它的生成法则."景"是"影"正字,"改为"是"改动变化"的意思.因光的变迁必影响于影的移动,故曰:"景徙,说在改为."光所到的地方才能生影.故曰:"景,光至."光没有到的地方虽没有影,但因为"光的乱射"关系,就像宛然存在的.故曰:"景亡(同"无"),若在."又到处虽有光而无影,可看为"暂作休息"的境况,故曰:"尽,古息.""尽"是包含"到处","古息"是"姑且休息"的意思.

(2) 经云:"景二,说在重."说云:"景,二光夹一光,一光者景也."

按:这条是说明光和影的关系.光的照物,产生有"本影""副影"两种.两影相重处才是物体的真影.故曰:"景二,说在重."又副影由二光所生,本影由一光所生.副影常是包含着本影.故曰:"景,二光夹一光.一光者景也."

(3) 经云:"景倒,在午有端与景长.说在端."说云:"景:光之人,煦若射;下者之人也高,高者之人也下.足蔽下光,故成景于上;首蔽上光,故成景于下.在远近有端与于光,故景库内也."

按:这条是解释光底直线进行性质.要明白这种现象,可在室内的壁上穿一小孔,通至室外,从事观察.那么在室外的东西映入室内,就会形成倒影.经中所说的"午",就是

"小孔"."端"就是合成一点的意思.但在壁上所穿的孔必须相当地小,使光线在小孔处聚成一点成为"光束",然后这种现象才得显明.而影子的长短就看光线射出的远近而成.故曰:"景倒,在午有端与景长.说在端."又光对向于人,发出热光,仿佛像射箭一样.只要在小孔处的光线能聚成一点,那么在室外下面的物射到人目,若要看它,必须在室内的高处;反之,在室外高处的物射到人目,若要看它,必须在室内的下面.因为脚部遮住了下光,映影就在上头;头部遮住了上光,映影就在底下.再在远近适当的地方有聚成的光点和射出的光线,因此影子才能显映于内.所谓"库"就是"明显"的意思.故曰:"景.光之人,煦若射;下者之人也高,高者之人也下.足蔽下光,故成景于上;首蔽上光,故成景于下.在远近有端与于光,故景库内也."墨子这条文字,想必是由实验观察得来.因为墨子是实践家,故解释得十分透彻.西洋论光底直线进行道理,最早的要算欧几里得.欧氏的光学书说:"我们假定光是沿着直线在进行.光从物体达到人目,形成一个锥体,人目在锥顶,物体在锥底.某些物体碰着光线的,才被我们所看见,没有碰到的就看不见了."像这样去讨论光的性质,纯系揣度的口气,找不出他的实验根据.欧氏后出于墨子一世纪,所说的不过如此.因此我们可以说,光底直线进行性质,是墨子的一个伟大发现.

(4) 经云:"景迎日,说在转."说云:"景:日之光反烛了,则景在日与人之间."

按:这条说明光的"反射"性质.当日光射到镜面,它的"投射角"与"反射角"是相等的."转"就是"反射"的意思.故经云:"景迎日,说在转."说云:"日之光反烛人."又当日和人对镜面所成的角度相等时,人和日影就会形成一条直线.影在镜面上是居于日和人的中间.

(5) 经云:"景之小大.说在杝正,远近."说云:"景:木正,景短大;木杝,景长小.火小于木,则景大于木;非独小也.木远,景长小;木近,景短大."

按:本条是说明光和光源的关系.这里的"景"字,应该解释为"光"."景的小大",即"光的小大".在光学中,光的大小可分为两种情形:① 物体对光源射线的倾斜度不同,因而受光强弱不同的,叫做"光度";② 物体对光源距离的远近不同,因而受光浓淡不同的,叫做"照度".故云:"景之小大,说在杝正,远近."所谓"杝"就是"斜"的意思.要测验"光度"的强弱,可取一根木条作为受光的标准.当光线射出和木条垂直即"木正"的时候,就得受光的地位狭而光度强,若将木条倾斜即"木杝"的时候,就得受光的地位广而光度弱.如要精确计算它们的强弱,就可应用定律说:"光度的强弱是和木条所成倾斜角度的余弦成正比例."故曰:"景,木正,景短大;木杝,景长小."又光源发光的大小,是依据物质性质而不同,但不论它们形体的大小.比方说,火虽小于木,它的光却大得多.故曰:"火小于木,则景大于木."再者要测验"照度"的浓淡,当木置于远处时,就得受光的地位广而照度淡;若将木移于近处时,就得受光的地位狭而照度浓.如要精确计算它们的浓淡,就可应用定律说:"物体受光照度的浓淡是和光源距离的平方成反比例."故曰:"木远,景长小;木近,景短大."

(6) 经云:"临鉴而立,景倒,多而若少.说在寡区."说云:"临.正鉴,景寡.貌熊,白黑,远近,杝(即斜)正,异("冀"字省文)于光.鉴当,景俱.就去亦当,俱.俱用北("背"字省文).鉴者之臬于鉴,无所不鉴.景之臬无数,而必过正.故同处.其体俱,然鉴分."

按：这条是论平面镜中物和像的关系．这里“景”字解释为“像”．我们面对平面镜，见镜中的像．物近像亦近，物远像亦远，故镜中的像，就一个方向来说，是远近倒置的．“正鉴”是“平面镜”．“景寡”是“单像”．在平面镜中，貌態，白黑，远近，斜正等，異于光，就是说，这些情况都是望着光而生成的．当两镜相交成直角时，由一物可得三像；若相交成四十五度，由一物可得七像．但平面镜中却只有一像．所以交角愈大，得像愈少；交角愈小，得像愈多．这是因为交角的区间狭小，重复反射的次数多，所得的像亦就加多．故曰：“多而若少，说在寡区．”“鉴当”解释为“两镜相交”．“景俱”即“两像合聚”，也就是“聚像”．两镜相交小于直角叫就“就”，大于直角叫做“去”．两镜相交产生有“聚像”．交角小于及大于直角，都可产生“聚像”．但有时聚像隐于镜背后，那就不能看见了．故曰：“鉴当，景俱．就去亦当，俱．俱用背．”“臬”是“射的”．我们对镜中看出有像，好比射者有“的”的意思一样．所以在两镜间，无论在何处，都可作为见像的“准的”．故曰：“鉴者之臬于鉴，无所不鉴．”因像的“准的”是无数，所生的像亦应是无数．但要生像，两镜应该同在原来的旧处，使相交小于平角．所谓“过正”就是“小于平角”的意思．故曰：“景之臬无数；而必过正，故（旧的意思）同处．”又两镜相交，产生有些“分像”，是由镜中虚像分向反射所成的．其中有的“分像”是“聚像”．所谓“其体”就是各个“分像”的意思．故曰：“其体俱，然鉴分．”

（7）经云：“鑑洼，景一小而易，一大而正．说在中之外，内．”说云：“鉴，中之内．鉴者远中，则所鉴大，景亦大；近中，则所鉴小，景亦小，而必正．起于中缘正而长其直也．中之外．鉴者近中，则所鉴大，景亦大；远中，则所鉴小，景亦小，而必易．合于中缘正而长其直也．”

按：这条是论凹面镜中物与像的关系．“洼”与“窪”通．“鑑洼”就是“凹面镜”．我们以物体对着凹面镜观察镜中的像，若在远处，所看到的是一个小而倒的像．所谓“易”就是“颠倒”的意思；若在近处，所看到的是一个大而正的像．分别说来，当物体置于凹球面中心以外，所看到的是小而倒的像；但若置于凹面镜焦点以内，所看到的是大而正的像．所谓“中”就是“凹面中心”和“焦点”的统称．仔细观察，本应该分为“在中心以外”与“在焦点以内”两种情形．但置物在中心和焦点的中间从事考究时，虽产生有大而倒的像，却在物体的后面，不能看到，故只须说“在中之外内”，就已经分别清楚了．所谓“鉴者”是照镜的物体．我们置物体在焦点以内．当远于焦点时，所照出的光度明，像亦大；近于焦点时，光度淡，像亦小，都成正像．若恰置物体于焦点处，光线经反射后，沿着主轴平行，达于极远，就无像可成．所谓“缘正”是沿着主轴．“直”与“値”通，是“相遇”的意思．故曰：“起于中缘正而长其直．”但若置物体在中心以内，当近于中心时，所照出的光度明，像亦大；远于中心时，光度淡，像亦小，都成倒像．若恰置物体于中心处，光线经反射后，仍略向主轴平行，达于极远，但这时是物体和倒像相合．故曰：“合于中缘正而长其直．”

（8）经云：“鑑团，景一．说在形之大．”说云：“鉴：鉴者近，则所鉴大，景亦大；其远，所鉴小，景亦小，而必正．景过正，故招．”

按：这条是论凸面镜中物与像的关系．“鑑团”就是凸面镜．“形”是“形体”，就是照镜的物体．“招”是“招摇”，就是“摇动”的意思．我们以物对着凸面镜观察镜中的像．当靠近镜子时，所照出的光度明，像亦大；远离镜子时，光度淡，像亦小．物体的位置虽有变更，所

看到的像只有正的一种，这是与凹面镜不同的地方．又拿物体和像比较，总是物体较大．故曰："形之大．"但放置物体，不可离镜太远，不然像就会在主轴上摇摆不定了．故曰："景过正，故招．"

编后语　曾昭安先生是早期《数学通讯》主编，学识渊博，办刊有方，但在大跃进年代却因此受到猛烈批判，说他"引导青年脱离热火朝天的社会主义建设，钻故纸堆，凭兴趣出发，曾先生还提出研究墨经中的数学问题应为青年的钻研方向，想引导青年钻进故纸堆中．我们并不反对墨经：因为它的确是我国宝贵的文化遗产，但我们反对把它作为青年的研究方向．我们的研究方向应该是解决当前我国社会主义建设最迫切，最需要解决的问题，是理论联系实际的方向，是当前生产服务的方向．现在，我们祖国各方面都在大跃进，我们绝不能容许《数学通讯》的资产阶级方向继续保存下去，仍是作为曾家的独立王国，仍是阴暗的角落，太阳照不到的地方，我们一定要拔掉曾昭安先生这面'大白旗'．"

这就是曾经的历史，警惕啊，人们！

开立方程序是如何由几何分割产生的

刘钝　译

汉代开方术的发现和应用使几何、代数和算术紧密地结合在一起. 东汉末期，赵君卿和刘徽用几何图形证明了如下的代数表达式：$a^2+b^2=c^2$，$2ab+(b-a)^2=c^2$，$c^2-b^2=(c-b)(c+b)$，从而提供了这些数学分支之间密切关系的另一个实例. 另一方面在西方，演绎与论证几何学在欧几里得那里达到了顶峰.

代数与算术的关系在中国甚至更为密切. 牛顿把代数称为"广义算术". 霍纳在其1819年论文的一个脚注中写道："至此作者在这种方法中一直这样幸运地注视着，无须他自己来作决定，(近似方法的) 结果必然导致实际计算者希望的满足；但是他的信念是使算术和代数都得到某种程度的进展与更密切的结合(现在二者间的鲜明分野已经消除). 陡坡已成了平缓的小路." 这一见解一定会得到汉代数学家的赞许.

综上所述，霍纳方法来源于表示成一般代数形式的二项式定理；汉代数学家则来源于几何模型. 于是以十九世纪的观点来看，霍纳的方法是完全一般化了的. 而两千年前的汉代人把一种经验地得到的类似方法，简单地应用到开平方、开立方和解一类特殊的二次方程之中；换言之，应用到一个有限的领域之中. 正如大家所知道的，霍纳方法的广泛应用是十二三世纪宋代代数学家们的工作；本文新的贡献就是力图说明公元前一世纪的中国数学家是领会了这一方法的真谛的.

代数的发展需要符号. 汉代数学家不缺乏术语，像代表直角三角形三条边的"勾"、"股"、"弦"，或我们上文中看到的"法"、"定法"、"中"、"借算"、"下"、"实" 等. 如果原文写得面面俱到，并无在该用之处略去上述术语的话，他们也许能以某种适当简略的形式发展公式化的代数学；但是由于使用了描述性的方法，术语经常与评论中的一般用语混淆；而且我们也不要忘记有这样的可能：由于没有标点符号以及出于文体的需要而对某些字的省略，则很容易引起语法上的误解，这样人们对于代数符号法直到近代才被发展这一事实也就没有什么值得奇怪的了. 甚至可以这样说，中国人在解数字方程上的早期成就妨碍了他们对一般方程理论的发展.

汉代数学家和两千年后霍纳的方法对比，从更广泛的意义上来讲，是常常引人注目的中国和欧洲数学特点的对比；前者系近于经验主义的，后者则近于归纳－演绎的模式. 这并不等于说古代和中世纪中国科学中没有理论，也不是说文艺复兴时代的科学不包含相当强烈的经验成分. 如果说现代技术是建立在欧洲归纳－演绎模式的数学和科学理论基础之上的，那么中国古代和中世纪的文明在技术上的成就，则比任何国家都要高.

十三世纪的中国多项方程

蓝丽容[①]

1 导言

研究数学史的人，时常把13世纪和14世纪初期描绘成中国数学史上的黄金时代. 这是由于有四位杰出的数学家曾作出了精彩杂陈的巨大贡献. 他们是：李治（又名李冶，1192—1279），秦九韶（约1202—1261），杨辉（成就高峰时期是1261 ~ 1275年）和朱世杰（成就高峰时期是1280 ~ 1303年）.

李治的几种著作里有两种是数学著作——《测圆海镜》（1248）和《益古演段》（1259）；后者在内容与方法上都比前者要简单. 秦九韶虽然只有在1247年写出了一部《数术九章》，但是这部十八卷的巨著已经使他在数学史上享有盛名而绰绰有余了. 在这四位数学家之中，杨辉是最多产的作者. 他的著作包括有《详解九章算法》（1261）、《日用算法》（1262）和《杨辉算法》. 这《杨辉算法》又包含下列三种著述：《乘除通变算宝》（1274）、《田亩比类乘除捷法》（1275）和《续古摘奇算法》（1275）. 朱世杰写了两本专著——《算学启蒙》（1299）和《四元玉鉴》（1303）.

在这四位名家的贡献之中，有一个显著的共同特点：都涉及多项方程和多项方程的分析. 本文中所谓的"多项方程"，其意义则以下列表达式的概念为限，即

$$a_1x^n + a_2x^{n+1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = 0$$

式中，n是正整数，而$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$在数值上可以是整数，也可以是十进小数. 这四位13世纪的数学家对这个题目都感兴趣，并非偶然；因为他们全都继承了同一个传统. 当时这一传统在中国比在其他各国要先进. 多项方程的逐步发展及其解法，它的根源可以上溯到西汉的《九章算术》[②]；到了接近13世纪后半叶时，就已经进入了新阶段，直至14世纪初，更达到了高潮. 李、秦、杨、朱的多项方程论著，确是数学史上重大的贡献.

多项方程的缘起与解法，其资料除了在《九章》中有一些之外，大部分都在四家的著作之中；它们不仅写下了自己这一时代中的新成就，还纪录了前辈数学家的那些目前已失传了的著作. 杨辉认真负责地分析了《九章》中的开方术并纪录了刘益和贾宪的学术

---

① 蓝丽容博士：新加坡共和国国立新加坡大学数学系副教授.

② 这本著作在本文中简称为《九章》.

贡献，要不然史学家写起数学史来就会遇到更大的空白．李冶用"天元术"的代数方式建立了二次方程，并把它和古老的图解表示法作了对比，以此说明新方法的便捷；这样，图解表示法也就赖以保存了下来．朱世杰的第一本著作《算学启蒙》由于是启蒙读物，也包含了初级的开方术．任何成就和发现，一旦获知了最终的结果，那取得结果的过程就看来异常浅显，而中间阶段内的困难与斗争却往往被人们所忽视和遗忘．弄清楚中国多项方程的概念方法是很重要的，我们可以从李、秦、杨、朱的著作中，由初级到中级以至最终阶段，逐步摸清其来龙去脉．

搜罗13世纪和14世纪初中国数学著作中有关多项方程的知识，这并非是本文的主要宗旨．这方面已经有了大量的著作，特别在研究每一位数学家的著述方面，文献就更多了[①]．本文打算把这一时期中四位杰出数学家对多项方程的突出贡献作一比较，并且探讨一下当时的发展过程．在研究中，发觉他们的著作不仅相得益彰，在数学史上有所建树，而且在历史发展过程中还曾经相互补充．他们的不同贡献，恰好在多项方程的演化与拓展中形成了一种年表的记载方式．

2　开平方和开立方

在研究不同国家的古代数学史中，可以把在数的开平方上做出的努力，看成是算术发展的自然成果．中国人对寻求开方术的尝试之所以值得特别一提，是因为他们使用了一种被证明是有很大潜力的方法．这种方法在《九章》中已经有了记载(卷四，第十六与十七题之间)．方法的灵活性在这里立即就显示了出来，因为就在这同一本书中(卷四，第二十二、二十三题之间)，这个方法就推广到数字开立方．本节的稍后处即将表明二次方程的解法可以由开平方术推导出来．事实上，《九章》末卷第二十题已经涉及二次方程，虽然没有阐明方法，却暗示了结果已经得知．《九章》所述的开方步骤已形成了一个基础．汉代以来，中国数学家一直是在这种基础上进行研究的．随着时间的推移，他们对这个步骤进行简化、分析并发展到开高次方根和解高次数字方程．

三上义夫[②]、李俨和钱宝琮[③]指出，古老的中国开方术和霍纳(Horner)解数字方程方法有相似之处．王铃和李约瑟在对这两种方法进行详细缜密的比较研究中，钻研了《九章》原文的难解之处，说明原文极为精炼．这本书有如此多的注家是毫不奇怪的，杨辉就是其中的一位．

杨辉在《详解九章算法》中对《九章》中的开方步骤曾作了分析，这些都保存在《永乐

① 任何一本关于13、14世纪中国数学史的作品都会涉及这个题目．参考书目中钱宝琮的著作[1]及他的其他著作和许莼舫的著作[1]是较全面的论述．对各著作的详细分析见谢元作[1]、蓝丽容[3]，第251-279页；李杰[2]，卷四，第65-236页；李倍始[1]，第177-211页．

② 三上义夫[1]，第25页．

③ 李约瑟[1]，第346页．

大典》[1]中.现存的其他版本里就找不到《大典》中的这段文字了,因为那些版本都有残缺.下面是杨辉求 71 824 平方根方法的意译.

> 在算盘上布置已给数字〈71 824〉[2],这叫做"实"(被除数).另取一算筹放在实数的个位之下,叫做"下法"(直译就是最低的除数)〈原除数〉.从最右边起,把这个算筹向左移,每一步移过两位,一直移到与实数首位相齐.〈如果上面的实数首位是百位,它就决定平方根的十位数;如果上面的实数首位是万位,它就决定平方根的百位数.〉从实数议得初"商"的数(本题中是议得的平方根的百位数)〈200〉.在下法上面置(下法与)初商〈200〉之积,把它叫做"方法"〈200〉.从实数减去初商与方法之积〈积为 40 000,余实为 31 824〉.把方法加一倍〈得 400〉,把它向右移一位,叫它作"廉"〈400〉.把下法亦移回一步两位〈使它停在实的百位数之下,这样它就能决定根的十位数字〉.议得次商(根的十位数)〈为 60,这时的根数已经是 260〉.在廉旁置(下法与)次商之积,把它叫做"隅"〈60〉.把两个除数廉和隅同次商相乘,再从实减去此积〈积为 27 600,余数为 4 224〉.把隅加一倍,和廉相加〈得 520〉.把〈520〉向右移一位.把下法也移一步两位至最后一位〈以使决定平方根的个位数〉.再议得三商(平方根的个位数).在商 260 旁置 8 为三商.在下法上置 8〈即下法与三商之积〉为隅.(这样下去)使实无余数.这就是答数.

杨辉用几何图形说明开平方的步骤(图 1),这是表示开方步骤的现存最早的几何图形了.他还用图和对算筹摆法的解释进一步说明了上面对开平方的论述[3].杨辉的贡献有一个重要的特点,那就是他对古老算题所作的透彻分析和解释.这一题就是很好的例子.然而对《九章》开方术原文所作的基本简化和解释可以上溯到杨辉之前约一千年.孙子在《孙子算经》(中卷第十九问)就解释了开平方的方法,使用的术语和杨辉纪录中的也相似.

中国古代开平方的基本概念可以借用代数记法简述如下:设 $x^2 = b$,根 $x = 100p + 10q + r$,p,q,r 都是表示 x 时的十进制数字.设 $h = 100p$,$h' = 10q$,$h'' = r$,则 $x = h + h' + h''$.用 R_1,R_2 和 R_3 来代表第一、第二和第三行.

R_3	b	$b-h^2$	$b-h^2$	$b-h^2-2hh'-h'^2$
R_2	0	h	$2h$	$2h+h'$
R_1	1	1	1	1
	(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)	(ⅳ)

R_3　$b-h^2-2hh'-h'^2$　　$b-h^2-2hh'-h'^2-2hh''-2h'h''-h''^2$

---

① 《永乐大典》卷一六三四四第 7-9 页.

② 〈 〉内原为小号汉字原文,一般为注解.

③ 见钱宝琮[1],第 95-97 页.

R_2	$2h + 2h'$	$2h + 2h' + h''$
R_1	1	1
	(ⅴ)	(ⅵ)

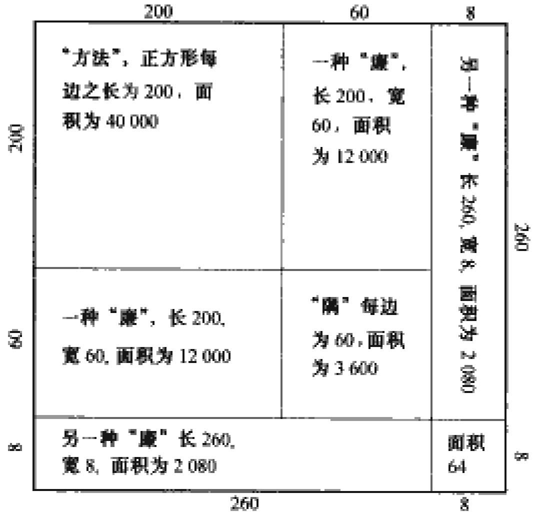


图 1

第一步　置 x^2 的系数 1 于 R_1 行中；置 b 于 R_3 行中. 见(ⅰ).

第二步　以 h 乘 R_1 行中之数，以其积加 R_2 行中之数. 以 h 乘 R_2 行中之数，将其积自 R_3 行之数中减去. 见(ⅱ).

第三步　以 2 乘 R_2 行中之数(如《九章》、《孙子算经》及杨辉方法所述)或以 R_1 行中之数及 h 之积加 R_2 行中之数(如杨辉对本法的例解中所述①). (两法结果相同，但后法符合算法的认识或开方的梯法系统.) 见(ⅲ).

第四步　按第二步的方法用 h' 替换 h. 见(ⅳ).

第五步　把 R_2 行中的 h' 项乘以 2，以求得 R_2 行中的 $2h + 2h'$；或把 h' 与 R_1 行中之数的积加上 R_2 行中之数. (第二种选择是算法的一部分或开方的梯法系统.) 见(ⅴ).

第六步　按第二步的方法用 h'' 替换 h. 见(ⅵ).

本开平方过程中也包括了二次方程的解法. 当 $x = h + y$ 时，变换后的方程式为

$$y^2 + 2hy = b - h^2, \cdots \quad ①$$

见(ⅲ). 又当 $x = h + h' + y'$ 时，变换后的方程式为

$$y'^2 + 2(h + h')y' = b - h^2 - 2hh' - h'^2, \cdots \quad ②$$

见(ⅴ). 方程式 ① 的一个根是 $y = h' + h''$，方程式 ② 的一个根是 $y' = h''$.

---

① 见蓝丽蓉[1]，第 95-97 页.

可以认为，在 13 世纪的数学著作中，开平方和开立方术已经为人熟知，不需要再作解释了. 然而由于《算学启蒙》还是启蒙的基本读物①，下卷的最后一门里仍交代了开平方和开立方的方法. 虽然，这一门是致力于二次以至高到五次的多项方程解法的研究，但并没有给出别的方法. 当时一般都以为只要掌握开平方及开立方的方法，就可以把这方法应用于解任何幂的数字方程式了.

杨辉对某些古老问题的分析，几乎仍是在原来的古老水平上进行的. 但朱世杰所提出的却是当时（13 世纪）正在使用的方法. 试就杨、朱二位的写作风格及所用的术语作一比照，那是颇有趣味的. 下面是朱世杰对 17 576 开立方的方法②：

> 列筹一万七千五百七十六尺为实. 借一筹于六尺之下名曰隅法. 常超二位约实至千尺下止. 乃上商二十以隅法. 因上商二十得二千于隅法之上，方法之下. 名曰廉法. 又廉法因上商二十得四千于廉法之上. 实数之下. 名曰方法. 乃命上商除实八千. 实余九千五百七十六. 以隅法因上商二十加入廉法. 又廉法因上商二十加入方法. 又隅法因上商二十加入廉法. 方法得一万二千. 廉法得六千. 方法一退，廉法再退，隅法三退. 续又上商六尺. 以隅法因上商六尺加入廉法. 又廉法因上商六尺加入方法. 得一千五百九十六. 乃命上商除实恰尽. 合问.

以上是逐字译成的. 乘积数不规则，例如廉法二千、方法四千. 这是由于这些数字在算盘上所占的位置相当于某些位置所致. 以下是用算筹在算盘上演示这一方法的不同阶段.

商			2
实	17 576	17 576	17 576
方法			400
廉法			20
隅法	1	1	1
	(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)

商	2	2	2	26
实	9 576	9 576	9 576	9 576
方法	1 200	1 200	1 200	1 596
廉法	40	60	60	66
隅法	1	1	1	1
	(ⅳ)	(ⅴ)	(ⅵ)	(ⅶ)

注意：在方程式 $x^3 = 17\ 567$ 中，如 $x = 20 + y$ 为根，则上列（ⅵ）中所给出的变换了的方程式具有下列形式

① 见蓝丽蓉[4].

② 《算学启蒙》下卷第五门第二问.

$$y^3 + 60y^2 + 1\,200y = 9\,576$$

为了要达成这样的变换，在把商和某一行（从最下一行开始）之数的积加入上一行之数时，使用了梯法或算法系统（见（ⅳ）和（ⅴ））.

3　二次方程及几何图解

上一节已经提到，有了开方术之后，由此而推导出二次方程的解法是合乎逻辑的. 杨辉对这一点是很清楚的. 他在讨论解二次方程的"带从开方法"时，要读者参考《九章》①中"少广"章内关于开方的详细方法.《九章》里就有一题是关于求二次方程

$$x^2 + (20 + 14)x - 2 \times 20 \times 1\,775 = 0$$

的正根. 公元五世纪《张丘建算经》②中有两题涉及二次方程（中卷第二十二问，下卷第九问）. 前一题的"带从开方"求二次方程正根方法可能在公元6世纪中曾由刘孝孙作过介绍，不幸现存版本中有关各页业已失去. 顾观光③曾试行恢复，并曾由何丙郁作了修订.

要想从现存的典籍中重新恢复古代详细方法的实质内容比较困难，但是中国古代数学家能够解二次方程是无疑的. 刘益（成就高峰时期是1080～1113年）在《议古根源》中就写下了解各种二次方程式的最全面的方法. 这些方法由杨辉在《田亩比类乘除捷法》④中记录了下来并作了分析. 目前这本书非常重要，因为刘益的原著已经找不到了.

杨辉的这一本书已经译成了英文，并且对它作了注解⑤. 杨辉介绍了求各种形式二次方程正根的六种不同的方法，还用几何图形作了说明. 它所提供的例题都是关于长方形的. 下面用简略方式介绍其中两种方法的各个步骤，并转载和译出了原书中所附的几何图形.

带从开方法

直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二步，问阔几步？（下卷第六问.）

本题所列二次方程是

$$x^2 + 12x - 864 = 0$$

商		2
实	864	864
方法		20

① 《田亩比类乘除捷法》下卷第六问. 按照前面提到的钱宝琮著作[1]第四十五页内所述，杨辉提到的《九章》并非《九章算术》，而是贾宪的《黄帝九章算法细草》，但这似乎不对，因为杨辉书中，前面并没有提到过贾宪的这本书，没有理由骤然就用简称. 他在别处凡是用这个简称的全都是指的《九章算术》. 他在《续古摘奇算法》"方圆论"中把贾宪的著作称为《皇帝九章》，这才是恰当的简称.

② 洪天锡[1]已经把这本书译成了英文.

③ 见何丙郁[1]第38页.

④ 下卷，第六至十六问.

⑤ 蓝丽蓉[3]，第113-126页及第251-274页.

从方	12	12
隅算	1	1
	(ⅰ)	(ⅱ)

商	2		24
实	224		224
廉	40	廉隅	44
从方	12		12
隅算	1		1
	(ⅲ)		(ⅳ)

(ⅰ)中,置 x^2 的系数入隅算行,x 的系数入从方行,常数项入实行.

(ⅱ)中,方法 = 隅算 × 初商 = 1 × 20.

(ⅲ)中,实 = 864 -(方法 + 从方)× 初商 = 864 -(20 + 12)× 20.把方法 × 2,称之为廉.

(ⅳ)中,隅算 × 次商 = 1 × 4 = 隅.

最后,实 -(廉隅 + 从方)× 次商 = 224 -(44 + 12)× 4 = 0.

所需之根为 $x = 24$.

图 2 为二次方程 $x^2 + 12x = 24^2 + 12 \times 24 = 864$ 的构成.图 3 表明了开方的过程.注意:图中的各项名称均相当于带从开方法中的名称.

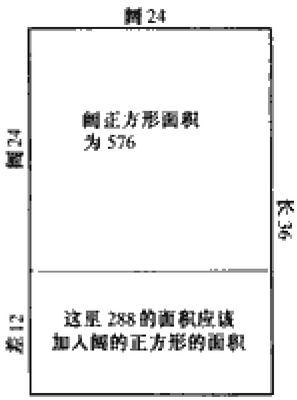


图 2

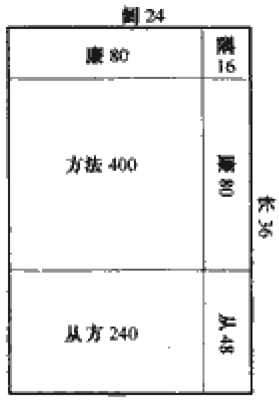


图 3

益积开方法

直田积八百六十四步,只云阔少长十二步,问长步几何(下卷第七问).

本题所列二次方程是

$$x^2 - 12x - 864 = 0$$

商	3	3	3
实	864	1 224	324

方法	30	30	30
负从	12	12	12
隅算	1	1	1
	(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)
商	3	36	36
实	324	324	396
廉	60	廉隅 66	66
负从	12	12	12
隅算	1	1	1
	(ⅳ)	(ⅴ)	(ⅵ)

(ⅰ)中,方法 = 隅算 × 初商 = 1 × 300.

(ⅱ)中,实 = 864 + 负从 × 初商 = 864 + (12 × 30).

(ⅲ)中,实 = 1 224 − 方法 × 初商 = 1 224 − (30 × 30).

(ⅳ)中,方法乘 2,称之为廉.

(ⅴ)中,隅算 × 次商 = 1 × 6 = 隅.

(ⅵ)中,实 = 324 + 负从 × 次商 = 324 + 12 × 6.

最后,实一廉隅 × 次商 = 396 − 66 × 6 = 0.

所需之根为 $x = 36$.

图 4 为二次方程的构成,图 5 表明了开方的过程.

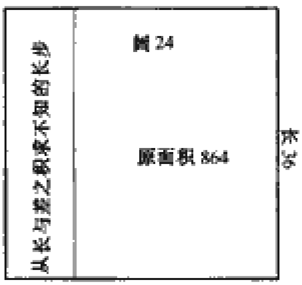


图 4

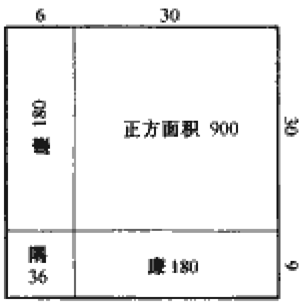


图 5

下面是杨辉这本著作中卷第十问的意译,可以看出他是怎样介绍典型的问题以及方法的.

直田积八百六十四步,只云长阔共六十步,欲先求长步,问得几何?

答曰:三十六步.

(翻积术)曰:置(第二行中的)积为实,和步(第三行中长和阔的和)为从方,以(第四行中的)一为负隅,开平方除之.

(演段)曰:原面积为长阔形成.因之必须自长与长阔之和形成的面积中减

去每边为长之正方形. 因此以一为负隅, 自从方中减去后即得原来的面积, 即 $-x^2+60x=864$.(原文:本积只有长二阔一, 正少长自之一段, 所以用为负隅,减去从方以应积数.)

(草) 曰:置(第一行中的) 积为实,以(第三行中的) 六十步为从方. 置(第四行中的) 一筹为负隅. 于实上商置长三十步. 以负隅乘商得之数三十, 自从方中减去此积. 以从方所余乘商得积九百;此为须自原面积中减去之数. 但原面积小于此数,因此使用翻积法. 于商下积八百六十四步之上置积九百, 反以八百六十四自九百中减去以得负积三十六. 以负隅乘商, 自此积中减去所余之从方三十无余数. 把负隅向右移动二位. 下一阶段中, 置六于商行为长. 以议得之六乘负隅,置此积六于"负"面积之下. 以此乘(次) 商, 自实中减去此积(即"负"面积三十六) 无余数. 得长三十六,即为答数.(原文:(草) 曰:置积为实,以六十步为从方,置一筹为负隅. 于实上商置长三十步. 命负隅,减从三十. 以上商命余从合除积九百,而积不及,乃命翻法. 于商数之下积数之上置合除积九百,反减原积八百六十四步,余正积三十六. 以上商命负隅,减从三十画. 负隅二退. 又上商长六步命负隅. 置六于负积以上. 复命上商除实尽,得长三十六步. 合同.)

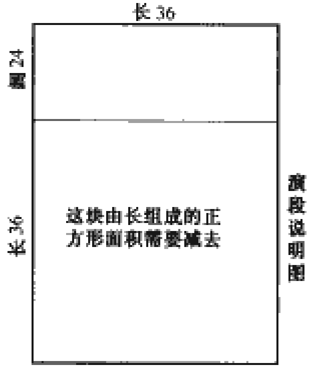
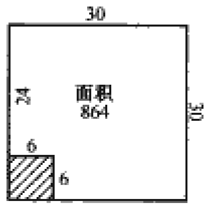


图 6



翻积术说明图负面积为 6×6 减去36

图 7

如上所述,杨辉的介绍方式是首先提出问题,给出答数;接着列出三个段落:术、演段和草."术" 中说出二次方程的系数. 在二次方程 $ax^2+bx=c$ 中, c 是正数,称"实"; a 和 b 如果是正数,就分别称做"隅算" 和"从方";如果是负数,就分别称做"负隅" 和"负从". 第二段是"演段",用具体的几何名称解释"术" 中二次方程的系数是怎么得到的,并伴之以几何图解. 第三段则在"草" 的标题下详细说明解二次方程求根的方法;还有一张图阐明这些步骤.

上面说明了由 $x^2=b$ 求 $x=h+h'+h''$ 的过程. 在这一过程中,推导出两个二次方程式,即 $y^2+2hy=b-h^2$ 和 $y'^2+2(h+h')y'=b-h^2-2hh'-h'^2$. 注意系数和常数项都是正的. 比较一下就知道求这两个方程式的正根的方法与上面提到的"带从开方

法”并无二致. 这一类方程式的正根并不很难求得，古代中国数学家自然可以进而求 $ax^2+bx=c$ 的正根了，a,b,c 可以是正的，也可以是负的. 中国数学家只对正根有兴趣，这是因为他们命题的性质是实际的. 刘益讨论了 a 和 b 不同符号的各种方法，有些保存在杨辉的著作中. 对于绝对(常数)项 c，杨辉只考虑它是正数，虽则他说明了“翻积”术，表明负数项并不太难对付.

一般认为最初开平方各步骤的概念是以几何图形为基础的①(见本文第二节“开平方和开立方”中的图形). 原文对此仅有模糊的提示，但从所使用的专门名称上可以看出这一点，求二次方程根的不同方法继承了以几何图形作表示的同一传统.

杨辉著作中用以显示六种不同开方法的六个几何图形是很不相同的. 然而分析一下六种方法中所介绍的步骤，就知道它们在代数上是一致的. 这一层直到后来才有认识. 刘益在介绍以不同方法解各种二次方程时，叙述了以算术和几何概念来实验负数的过程.

杨辉著作中的图解分为两种不同的类型. 一种表明开方的步骤，另一种解释如何立出二次方程. 对二次方程中每一项的导出，都作了相当具体的几何解释.

李治《益古演段》中全部六十四个题目都是求解二次方程的. 杨辉著作中侧重于不同形式二次方程开方的详细过程. 与此相较，李治所关心的则主要是对每一个题目如何立出二次方程；至于二次方程本身的解决，则认为是已经知道的了. 李治介绍的题目比杨辉著作中的题目要复杂一些. 它们都是几何方面的，并且限于正方形、圆形和长方形(只有一个题目是关于不规则四边形的).

在推导二次方程时，李治分为两种方法. 在第一种里，他用‘天元’来代表未知数，使用的是代数法. 他把第二法称做“条段”.“条段”的技巧与杨辉的很相似：说出二次方程的各项，再用几何术语讨论各项是如何导出的，并用几何图形加以说明. 至于二次方程各项的名称，则用“实”来表示常数项，用“从法”来表示一次项系数，用“常法”或“隅”来表示二次项系数.

《益古演段》全书六十四个题目中，二十一题附有第三法，称为“旧术”. 这“旧术”可能是指《益古集》中使用的方法. 这部《益古集》是一位名为蒋周的人在1078至1224年之间写成的，原作已经亡佚；《益古演段》就被认为是这部著作的后身了. 李治在《益古演段》中有一篇自序，是曾谈到《益古集》的“必匿而不尽发”. 李治的“条段”法是早先已经知道的方法，他也许只是继承和阐明了《益古集》的传统. 李治在写作《益古演段》时，事先已经在他的第一部著作《测圆海镜》中介绍了解高次方程的“天元术”. 他必然认识到天元术比条段高明. 一般认为李治是在发现读者不易理解他的第一本著作的时候才利用写《益古演段》的机会在初等水平上来解释天元术的②. 一般也认为天元术是在13世纪左右才产生的③. 朱世杰在他的两部著作里也使用了天元术. 杨辉则没有提到过天元术，而

① 蓝丽蓉[1].

② 何丙郁[2]，“李治”，第八卷，第319页.

③ 钱宝琮[1]，第121页.

秦九韶却在完全不同的数学含义上使用了"天元"这个名称①.

下面是《益古演段》中第九题的译文，借此可以说明全书中李冶对二次方程的论述：

第九问

今有方田一段，内有圆池水占之，外计地三千一百六十八步，只云内外周与实径(从圆周到方一边中点之垂直距离)相和得三百三十步，问三事各多少？

答曰：外方周二百四十步，实径一十八步，圆周七十二步.

法曰：立天元一为池径. 以五乘之，自和步三百三十步之倍数中减去此数(李冶原文："以五之减倍之相和步")得

660 太

－5　　(ⅰ)

为一个方形的九条边(李冶原文："为九个方面"). 以此数自乘(李冶原文："以自增乘")，得

435 600

－6 600　　(ⅱ)

25

为八十一个方田的面积(李冶原文："为八十一段方田积"). 把这个放在最上面的位置.(给定的相和数加一倍即等于方形的八条边、六条圆(直)径和两条实径. 现在两条实径和一条圆径等于方形的一条边(那样长). 因之，上面的数量也就等于九条边、五条圆径，却再也没有实径了.)(李冶原文："…… 于头位. 二之相和步别得是八方面、六圆径、二实径. 今将二实径与一圆径就成一方面，其数计九方面、五圆径，更无实径也.")再用天元代表池径，把它自乘，又乘以六十步七分半(60.75)(李冶原文："再立天元池径，以自之，又以六十步七分半乘之")得

0 元

60　75　　(ⅲ)

为八十一个圆面积(李冶原文："为八十一个圆池.")(乘以60.75的原因是共有八十一份. 每个圆面积是每一份的0.75倍，81乘0.75得60.75). 把此数自最上面位置的数中减去，则得余数.(李冶原文："所以用六十步七分半乘之者，却齐其八十一分也. 每个圆池七分半，以八十一通之，遂得六十步七分半也. 以此减头位，余，得")

435 600

－6 600　　(ⅳ)

－3 575

即给定面积的八十一倍(李冶原文："为八十一段如积"). 把这个数放在左面(李

① 何丙郁[2]，"秦九韶"，第三卷，第254页；李倍始[1]，第21页.

治原文:"寄左").最后,把给定面积三千一百六十八步乘以八十一(李治原文:"然后列真积三千一百六十八步,以八十一通之."),得 256 608,与左数相消,得

$$\begin{array}{r} 178\ 992 \\ -6\ 600 \\ -3\ 575 \end{array} \qquad (\text{V})$$

步.平方开之,得二十四,为池径.乘以五,自给定和的两倍中减去,余数以九除之,即为方形的一条边(李治原文:"平方开之,得二十四步,为池径也.五因池径,减倍相和,余,九而一,得方田面.").用方形的一条边减去圆径,把余数除二,就是实径之长了(李治原文:"以池径减方,余折半,为实径.").

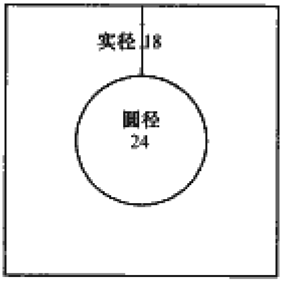


图 8

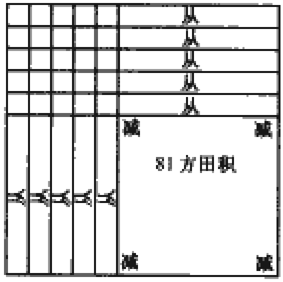


图 9

用条段方法来求解:把给定的和乘以二,再自乘,把得数放在最上面的位置上.自此数中减去八十一乘给定的面积,以余数为"实".以二十乘给定的和,作为"从",以 35.75 为"常法".(李治原文:"依条段求之.倍其步,自乘于头.以八十一之田积减头位.余为实.二十其步为从.三十步七分半为常法.")

讨论:81 个方田内有 81 个圆池.每个圆池的面积是 0.75(乘直径的平方).由于一共有 81 个,总面积是 60.75(乘直径的平方).从 60.75 中减去 25,必须这样才能形成"从".因此余数 35.75 就称做"常法".(李治原文:"又曰:八十一个方田带起八十一个圆池.每个圆池七分半.此八十一个计该六十步七分半.其从步合除去二十五步外,犹剩三十五步七分半.故以之为常法.")

旧术:把给定的和数乘以二再自乘,放在最上面的位置上.把给定的面乘八十一,自最上面的数中减去此数.把余数向右边移动一步,把它当做"实".把给定和乘以二作为"从法".置 3.575 为"廉常".(李治原文:"旧术曰倍相和步,自乘为头位.又以八十一乘田积,减头位,余,退一位为实.倍相和步为从法.廉常置三步五分七厘半.")

上面第一法中以直行数字排列来代表演算的各个阶段.二次方程也正是靠直行中各层的数字排列出来的.演算时以算筹在算盘上进行.常数占上行,未知数(天元)的系数占常数下一行,未知数的平方系数占常数下第二行.对数字的表示法有疑问时,则或是在数字旁写上"太"字来表示它是常数项,或者写上"元"字来指出它是未知数一次项的系

数.遇到负数时,则在右端最末一位非零数字上斜加一道以作表示.

用 x 来代表未知数或"天元",则上文(ⅰ)至(ⅴ)的各个阶段可以翻译成下列形式:

(ⅰ)$660-5x$.

(ⅱ)$435\,600-6\,600x+25x^2$.

(ⅲ)$60.75x^2$.注意在"元"行中"0"也表示列中个位数字的位置.

(ⅳ)$435\,600-6\,600x-35.75x^2$.

(ⅴ)$178\,992-6\,600x-35.75x^2=0$.

条段法用几何图形来解释.从正方形 $ABCD$(图 10)中减去 81 倍所给定的圆池以外的面积就得到常数项"实"的值.正方形 $CGEF$ 给出 81 个方田的面积.如果从中减去圆池以外方田面积的 81 倍,剩下的就是 81 个圆池的面积了."讨论(议)"里解释过,81 个圆池的面积等于 $60.75x^2$.因此,从几何上说,代表"实"的是 $ABFEGD$ 和 $60.75x^2$.如果 $ABFEGD$ 加上 $25x^2$,则面等于 10 条狭长的长方形面积,每条等于 $660x$.这些长方形就是"从",剩下相当于 $35.75x^2$ 的一块则是"常法".

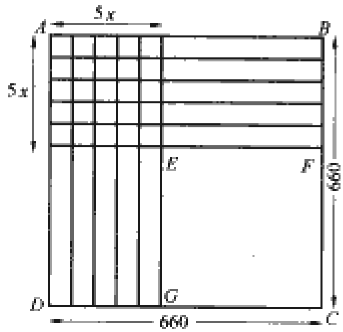


图 10

"旧法"所说的与此相等的二次方程,其形式则为

$$17\,899.2-660x-3.575x^2=0$$

李冶把"天元术"和"条段法"放在一起进行比较,不但说明了两种方法相同,也说明了两者互相补充.天元术是代数法,比较抽象;条段法是几何法,可用图形说明.前法可用后法进行解释.反之,早期的方法概念复杂,有时难以理解;后来的方法使用记号,从不同的概念入手,使它变得简单了.然而两种方法之间毕竟存在着尖锐的对比.天元术中采用的是一种带普遍性的演示程序,适用于任何题目,可以推而广之.用以解决许多涉及高次方程的问题.条段法中的几何方法具有逐个不同的特性;不同的题目有不同的图形.要想推广条段法来列出高次方程式,肯定会陷入越来越大的困难中.

4　巴斯噶三角形的影响

上一节中,我们看到了在建立二次方程表示式中,中国古代数学家已经由几何的观点过渡到了一般的代数方法上去了.在解多项方程方面,也出现了同样的变化.最初的开方术是以几何观念为依据的.刘益把这种观念推广到解不同的二次方程方面去,在这里他对含有负项的方程进行了试验.大约就在同时,开平方和立方的方法中也似乎出现了一般的标准方法.在这阶段,11 世纪的贾宪开方法,其特色是一种(二项式)数字的算术排表;它在西方被称为"巴斯噶三角形".

从现有的典籍中看，这类三角形最早出现在杨辉的《详解九章算法》中，但是公元11、12世纪中，中国的数学家就可能在开方过程中熟悉了巴斯噶三角形的使用.杨辉这部书中的巴斯噶三角形达到六次幂.杨辉还提到贾宪已经知道这种三角形的排列法①.按照钱宝琮的说法②，在杨辉以前，就可能有一些数学著作讨论过利用巴斯噶三角形来解多项方程.看来目前已经失传的贾宪《黄帝九章算法细草》似乎是这方面最早的文献了.

杨辉书中展示的巴斯噶三角形所用的术语名称表明(图11)，这种三角形与开方术有密切的关系.



图11

下面是三角形的译文.

常数　1

一次幂　1　1

二次幂　1　2　1

① 见《永乐大典》第一六三四四卷，第5，6页.

② 钱宝琮[1]，第111页.

三次幂　1　3　3　1

四次幂　1　4　6　4　1

五次幂　1　5　10　10　5　1

六次幂　1　6　15　20　15　6　1

三角形下面的述文是：

> 常数项的系数1(积数)在左端斜线上.
> 最高次幂项的系数1(隅算)在右端斜线上.
> 中间藏着的都是其他次幂项的系数(廉).
> 用"商得的根"(商)乘以各系数后，其积自常数项(实)中减去.

杨辉提到贾宪区分了两种开平方和开立方的方法①.两种方法之中，"立成释锁开方法"(利用图表解各项系数)是旧法.钱宝琮对"立成"这个名称作了解释②，说它是古代天文学家在制订算表时所使用的名称.巴斯噶三角形和开方结合起来以后，也就类比着使用了这个名称.这种方法是在认清了巴斯噶三角形二项式系数和开方程序之间的密切关系，并感到它的便利之后才产生的.有了这第一种方法，加上在巴斯噶三角形中可以看到的那种一般开方模式，这就为第二种方法铺平了道路.第二种方法称做"增乘开方法"(连续加和乘来开方的方法)，或称开方的"梯法".两种方法的主要不同的是：增乘开方法在把商乘一行中的数并把积加入上一行时有一个梯法系统或算法系统，而立成释锁法则利用巴斯噶三角形中二项式展开的系数得到变换方程.

举一个例子来说明第一种方法：巴斯噶三角的第三行给出1,2,1三个数字，相当于本文开始杨辉对71 824开平方中解 $x^2 = b$ 令 $x = h + y$ 过程中所求得的变换方程：$y^2 + 2hy = b - h^2$ 的各项系数.注意这里的二次方程相当于前面算盘上的(ⅲ)式；而这又是通过把(ⅱ)式中 R_2 行中的 h 项乘以2才得来的.在开立方时，巴斯噶三角第四行中的数字是1,3,3,1.这些相当于解 $x^3 = b$ 时用 $x = h + y$ 代入后得到的变换方程 $y^3 + 3hy^2 + 3h^2y = b - h^3$ 中的各项系数.其间的步骤可以演示如下：

R_4	b	$b - h^3$	$b - h^3$
R_3	0	h^2	$3h^2$
R_2	0	h	$3h$
R_1	1	1	1
	(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)

(ⅲ)式中 R_2 和 R_3 行中两项系数是通过用3来乘(ⅱ)式中相当的两项系数得来的.

① 《永乐大典》第一六三四四卷，第6,16,23页.

② 钱宝琮[1]，第113页.

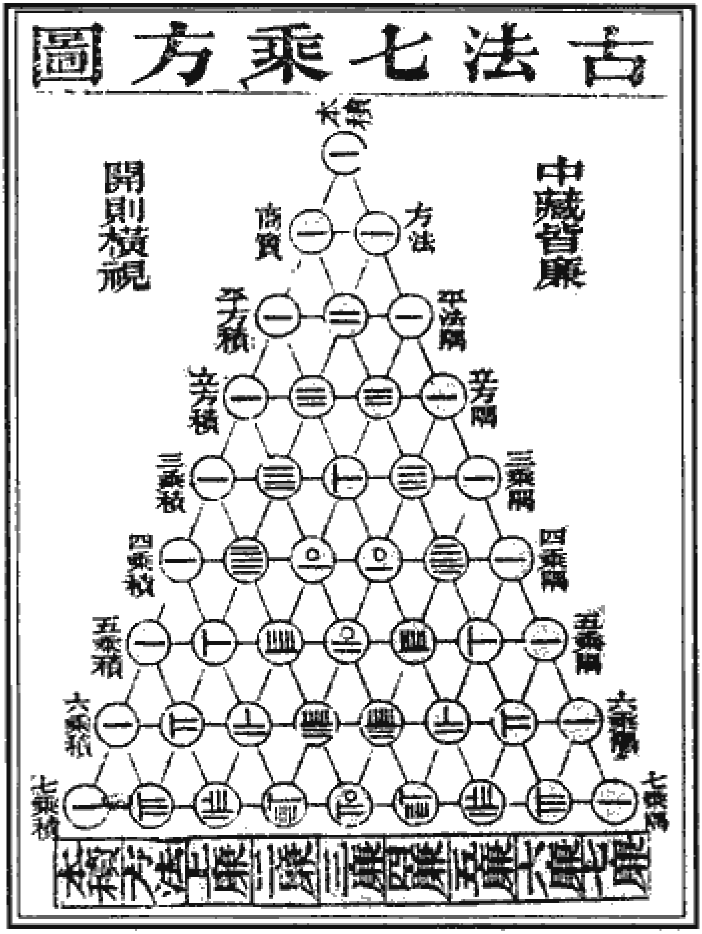


图 12

杨辉在谈起贾宪的"立成释锁"开立方法时,谈了这个方法①.《九章》和《张丘建算经》②中都使用了这个方法.

在现存的中国古代数学典籍中,巴斯噶三角的再次出现是在朱世杰《四元玉鉴》的开端.它和《四元玉鉴》前一页中的图表合称"今古开方会要之图".卷首的图表叙述了新法,而三角形数字排列(图12)的上方写的是"古法七乘方(八次幂)图".同杨辉的三角··

① 《永乐大典》第一六三四四卷,第16页.

② 下卷,第三十问,见洪大镒[1].

样，常数项的系数1在左端斜线上，最高次幂项的系数1则在右端斜线上．朱世杰著作中三角形的右方写道"中藏皆廉"，而左方则写道"开(方)则横视"．注意这张三角中有线条把数字连接起来．三角形底部的汉字给出多项式(译者：原文为"多项方程")各项系数的名称，即x的系数叫做"方法"，$x^2,x^3,x^4,\cdots$的系数则分别叫做"上廉"、"二廉"、"三廉"…等．

把朱世杰著作中这张三角图表仔细看一下，就会发现算筹数字是倒转排列的，因此可以推测知道三角形最底层的这一行数字最初是在左边直排着的．这可能意味着二项展开式的各项系数原来是直向逐行排列的，以此符合算盘中开方时实际布筹的情况①．

由于运用了巴斯噶三角，中国古代数学家就能在两个主要方面坚定了信心：一是有了一种通用的程序，可以用来进行开n次方；二是发现在开n次方和解n次多项方程之间有着密切的关系．虽然"立成释锁"当初主要用于开平方和开立方，然而它已经提供了思路和愿望，从而进一步发明了解任意次多项方程的通用方法．这就是贾宪称为"增乘开方法"的梯法或算法．霍纳(1819)使用了相同的技巧．两者之间相似处，已经由三上义夫、李俨和钱宝琮作了阐述②．

5 解高次多项方程的算法

到了公元13世纪，中国数学家已经惯熟于使用"增乘开方法"或求任意次多项方程正根的算法．四位数学家之中，李冶对于这种方法不加解释，理所当然地认为这种方法已是众所周知的了．他更热衷于从他的几何问题来立出多项方程．杨辉则借"积一百三十三万六千三百三十六尺，问为三乘方几何？"的问题详细地说明这种方法．这是《永乐大典》中残存的《详解九章算法》片断之一的内容③．朱世杰在求17 576的立方根时(本文第二节中)叙述了这种方法．杨辉和朱世杰的这两道题目，还只限于数字开方或数字求根，到了秦九韶，才在解高次多项方程时详尽地对这个方法作了介绍．

除了涉及二次方程和开方高达四次的一些问题之外，秦九韶还举出了三道解四次多项方程的问题和另外一道涉及十次方程的问题④．这些方程的形式是这样的：

$$-x^4+763\,200x^2-40\,642\,560\,000=0 \quad ①$$

(卷五，第一问)

$$-x^4+15\,245x^2-6\,262\,506.25=0 \quad ②$$

(卷六，第二问)

$$-x^4+1\,534\,464x^2-526\,727\,577\,600=0 \quad ③$$

① 蓝丽蓉[5]．

② 三上义夫[1]，第77页；李俨[2]，卷一，第251页；钱宝琮[2]，第144页．亦见李约瑟[1]，第126页；蓝丽蓉[2]，第87页；李倍始[1]，第191页．

③ 《永乐大典》卷一六三四四，第26,27页．亦见李俨[2]卷二，第71,72页．蓝丽蓉[2]，第85-86页．

④ 见李倍始[1]，第209-211页．

（卷八，第三问）

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11\,664x^2-34\,992=0 \quad ④$$

（卷八，第二问）

秦九韶在《数书九章》中非常详细地讲述了这些高次多项方程的立法，以及求各方程正根的步骤．每一题在提出问题和给出答数之后，下文分为三节：第一节叫做“术”（方法），以一般术语简短地叙述一下方程的立法而不涉及具体数字．下一节接着就是“草”（演算），是用文字详尽备至地描述了立方程式和解方程式的步骤．这一切步骤又都在第三节中用图表来说明，由一些筹式来显示立方程式和解方程式时算筹数字的不同位置．秦九韶在解释问题时所使用的详尽而系统化的方法，毫无疑问地证实了中国数学家是有能力解数字高次方程的．在发展一种通用的方法来解决高次多项方程的最后阶段中，秦九韶的著作是重要的贡献．

下面我们将说明秦九韶用算筹数字对于方程 ① 求正根的过程．我们选择这一道题，是因为它的解释最为清楚，特别在区分正负项方面更是如此．秦九韶的方法不同于李冶的方法．李冶是在最右端的非零数字上斜加一划来表示它是负数的，秦九韶则用“正”字来指出正数，用“负”或“益”字来指出负数．在算盘上，则也许是以红色算筹来表示正数，而以黑色算筹来表示负数的．

为了求方程式 $-x^4+763\,200x^2-40\,642\,560\,000=0$[①]的根 $x=840$，秦九韶排出了二十一个筹式来表示不同演算过程中算筹数字的位置．他把这种算盘上的排列方式称做“正负开三乘方图”（图 13）．我们把译文简化如下：

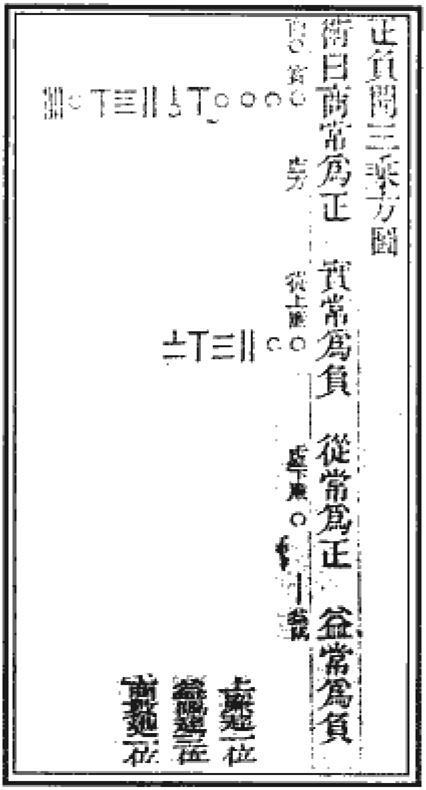


图 13

商		800
实	－40 642 560 000	－40 642 560 000
方	0	0
上廉	763 200	763 200

① 李俨［1］，第 150 页；三上义夫［1］，第 74 页；李倍始［1］，第 180 页；钱宝琮［1］，第 49，117 页；［2］，第 159 页．

下廉	0	0
隅	-1	-1
	(i)	(ii)
商	800	800
实	38 205 440 000	38 205 440 000
方	98 560 000	-826 880 000
上廉	123 200	-1 156 800
下廉	-800	-1 600
隅	-1	-1
	(iii)	(iv)
商	800	800
实	38 205 440 000	38 205 440 000
方	-826 880 000	-826 880 000
上廉	-3 076 800	-3 076 800
下廉	-2 400	-3 200
隅	-1	-1
	(v)	(vi)
商	840	840
实	38 205 440 000	00 000 000 000
方	-826 880 000	-955 136 000
上廉	-3 076 800	-3 206 400
下廉	-3 200	-3 240
隅	-1	1
	(vii)	(viii)

在(i)式中，x^4 项系数放在隅行，x^2 项系数放在上廉行，常数项则在实行.

在(ii)式中，隅向左移动四位一步共两步．上廉向左移动两位一步共两步．把根的第一组成部分 800 放在商行.

在(iii)式中

$$下廉 = 隅 \times 初商 = -800$$

$$上廉 = 763\ 200 + (下廉 \times 初商) = 763\ 200 + (-800 \times 800) = 123\ 200$$

$$方 = 0 + 上廉 \times 初商 = 123\ 200 \times 800 = 98\ 560\ 000$$

$$实 = -40\ 642\ 560\ 000 + 方 \times 初商 = -40\ 642\ 560\ 000 + 98\ 560\ 000 \times 800 = 38\ 205\ 440\ 000$$

秦九韶把筹式(ⅲ)称为“一变”.

在(ⅳ)式中

$$下廉 = -800 + (隅 \times 初商) = -800 + (-1 \times 800) = -1\ 600$$

$$上廉 = 123\ 200 + (下廉 \times 初商) = 123\ 200 + (-1\ 600 \times 800) = -1\ 156\ 800$$

$$方 = 98\ 560\ 000 + (上廉 \times 初商) = 98\ 560\ 000 + (-1\ 156\ 800 \times 800) = -826\ 880\ 000$$

筹式(ⅳ)称为“二变”.

在(ⅴ)式中

$$下廉 = -1\ 600 + (隅 \times 初商) = -1\ 600 + (-1 \times 800) = 2\ 400$$

$$上廉 = -1\ 156\ 800 + (下廉 \times 初商) = -1\ 156\ 800 + (-2\ 400 \times 800) = -3\ 076\ 800$$

筹式(ⅴ)称为“三变”.

在(ⅵ)式中

$$下廉 = -2\ 400 + (隅 \times 初商) = -2\ 400 + (-1 \times 800) = -3\ 200$$

筹式(ⅵ)称为“四变”.

在(ⅶ)式中,方向右移回一位,上廉移回二位,下廉三位,隅四位.把根的第二组成部分40放在商行.

在(ⅷ)式中

$$下廉 = -3\ 200 + (隅 \times 次商) = -3\ 200 + (-1 \times 40) = -3\ 240$$

$$上廉 = -3\ 076\ 800 + (下廉 \times 次商) = -3\ 206\ 400$$

$$方 = -826\ 880\ 000 + (上廉 \times 次商) = -826\ 880\ 000 + (-3\ 206\ 400 \times 40) = -955\ 136\ 000$$

$$实 = 38\ 205\ 440\ 000 + (方 \times 次商) = 38\ 205\ 440\ 000 + (-955\ 136\ 000 \times 40) = 0$$

由于实为0,根即为840.0作为零的符号在印刷出来的书中出现,肇端于《数书九章》①.秦九韶与杨辉不同的是,他把方程右方的正常数项实看做负量[见(ⅰ)式],以便将整个求根的过程可以用代数的方法来进行.如果我们不考虑算筹的位置,则秦九韶所介绍的算法系统可以用一般的形式概括如下:令多项方程为 $a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0$,和 $x = h + y$, h 为根的初商,相当于十进位值制的最高位数.虽然我们在这里挑选了五次幂的例子,相同的方法可以应用于解任意次的多项方程.

R_6	a_6	$a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$
R_5	a_5	$a_5 + a_4h + a_3h^2 + a_2h^3 + a_1h^4$
R_4	a_4	$a_4 + a_3h + a_2h^2 + a_1h^3$
R_3	a_3	$a_3 + a_2h + a_1h^2$
R_2	a_2	$a_2 + a_1h$
R_1	a_1	a_1

① 李约瑟[1],第10页.

	(ⅰ)	(ⅱ)
R_6	$a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$	$a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$
R_5	$a_5 + 2a_4h + 3a_3h^2 + 4a_2h^3 + 5a_1h^4$	$a_5 + 2a_4h + 3a_3h^2 + 4a_2h^3 + 5a_1h^4$
R_4	$a_4 + 2a_3h + 3a_2h^2 + 4a_1h^3$	$a_4 + 3a_3h + 6a_2h^2 + 10a_1h^3$
R_3	$a_3 + 2a_2h + 3a_1h^2$	$a_3 + 3a_2h + 6a_1h^2$
R_2	$a_2 + 2a_1h$	$a_2 + 3a_1h$
R_1	a_1	a_1

	(ⅲ)	(ⅳ)
R_6	$a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$	
R_5	$a_5 + 2a_4h + 3a_3h^2 + 4a_2h^3 + 5a_1h^4$	
R_4	$a_4 + 3a_3h + 6a_2h^2 + 10a_1h^3$	
R_3	$a_3 + 4a_2h + 10a_1h^2$	
R_2	$a_2 + a_1h$	
R_1	a_1	

	(ⅴ)	
R_6	$a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$	A_6
R_5	$a_5 + 2a_4h + 3a_3h^2 + 4a_2h^3 + 5a_1h^4$	A_5
R_4	$a_4 + 3a_3h + 6a_2h^2 + 10a_1h^3$	A_4
R_3	$a_3 + 4a_2h + 10a_1h^2$	A_3
R_2	$a_2 + 4a_1h$	A_2
R_1	a_1	A_1

(ⅵ)

第一步　把系数 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 置入 $R_1, R_2, \cdots, R_6$ 六行中如(ⅰ)式.

第二步　以 h 乘 R_1 中之数,以其积加入 R_2 中之数.以 R_2 中的和数乘以 h,以其积加入 R_3 中之数.以同样方式处理 R_4 及 R_5 中之数,直至取得 R_6 中之和 $a_6 + a_5h + a_4h^2 + a_3h^3 + a_2h^4 + a_1h^5$[见(ⅱ)式].如果此式为零,则 h 为多项式之根;否则进入第三步.

第三步　如第二步中的程序进行,至取得 R_5 中之数[见(ⅲ)式].

第四步　如第二步中的程序进行,至取得 R_4 中之数[见(ⅳ)式].

第五步　如第二步中的程序进行,至取得 R_3 中之数[见(ⅴ)式].

第六步　如第二步中的程序进行,至取得 R_2 中之数[见(ⅵ)式].

(ⅵ)式中六行中之数,我们称之为 $A_1, A_2, \cdots, A_6$,为变换了的方程式 $A_1y^5 + A_2y^4 + A_3y^3 + A_4y^2 + A_5y + A_6 = 0$ 中的各项系数.这一调整为第二次估计根的下一位十进数字

做好准备.我们使 $x = h + h' + y'$ 或 $y = h' + y'$,重复进行第一步至第六步的程序.这样就可以求得根的确解至任何位数.

有一些例题中,根值一直求到小数点以下的位数.例如《算学启蒙》下卷第五门第十九问的方程式相当于 $x^2 - 4.25x + 1 = 0$,其根即为 $x = 0.25$.朱世杰的另一部著作《四元玉鉴》中有下列方程式

$6x^2 + 49x - 1\ 176 = 0, x = 10\frac{1}{2}$　　(下卷,第二门第十四问)

$135x^2 + 4\ 608x - 138\ 240 = 0, x = 19.2$　　(下卷,第二门第十七问)

$x^2 - 10x - 1.96 = 0, x = 0.2$　　(下卷,第四门第一问)

《益古演段》中有下列二例

$-0.96x^2 + 91x - 306.74 = 0, x = 3\frac{1}{2}$　　(第二十二问)

$5x^2 + 233x - 876.75 = 0, x = 3\frac{1}{2}$　　(第三十七问)

秦九韶使用这种算法为两个二次方程式(卷十二,第一问)的根求得了近似值.方程式 $16x^2 + 192x - 1\ 863.2 = 0$,其根的近似值为 $x = 6.35$,而 $x = 14.7$ 则为方程式 $36x^2 + 36x - 13\ 068.8 = 0$ 的根的近似值.

除了这种求至任何位数近似值的根以外,秦九韶还采用了两类别的形式.

第一类是凑到整数.例如

$\sqrt{8\ 000} = 89 + \text{分数} \approx 89 + 1 = 90$　　(卷十五,第一问)

第二类近似根,其办法可以一直上溯到《孙子算经》和《张丘建算经》.它的根是由一个整数加上一个分数组成.根的分数部分在整数部分已经求得之后以变换方程式的系数求得.在 $x^2 = b$ 的例中,如果 k 为根的整数部分,变换方程式就成为 $y^2 + 2ky = b - k^2$(见本文第二节中的例题).根的分数部分由 $(b - k^2)/(2k + 1)$ 给出.或者,如果 $r = b - k^2$,则

$$\sqrt{b} = \sqrt{k^2 + r} \approx k + \frac{r}{2k + 1}$$

在《数书九章》(卷六,第二问)中,有这样的例子

$$\sqrt{640} \approx 25 + \frac{15}{2 \times 25 + 1} = 25\frac{5}{17}$$

$$\sqrt{1\ 000} \approx 31 + \frac{39}{2 \times 31 + 1} = 31\frac{13}{21}$$

在《四元玉鉴》(中卷,第三门,第十一问)中,有一例

$$\sqrt{265} \approx 16 + \frac{9}{2 \times 16 + 1} = 16\frac{3}{11}$$

对一般方程 $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = 0$,秦九韶和朱世杰使用了下列近似公式:如果 k 是正根的整数部分,即 $x = k + y$,变换方程的形式即为 $A_1y^n + A_2y^{n-1} + \cdots + A_ny + A_{n+1} = 0$.如果近似根为 $k + \frac{p}{q}$,则

$$\frac{p}{q}=\frac{-A_{n+1}}{A_1+A_2+\cdots+A_n}$$

下面是秦九韶和朱世杰著作中的例子.

在《数书九章》(卷六,第二问),所立的方程式为

$$-x^4+1\,524x^2-6\,262\,506.25=0$$

当 $x=20+y$ 时,这个方程变换为

$$-y^4-80y^3+12\,845y^2+577\,800y-324\,506.25=0$$

对近似根给出的形式为

$$x\approx 20+\frac{324\,506.25}{-1-80+12\,845+577\,800}=20\frac{324\,506.25}{590\,564}=20\frac{1\,289\,025}{2\,362\,256}$$

另外一个例题(卷四,第五问)中

$$\sqrt[4]{7\,325}\approx 9+\frac{7\,325-6\,561}{1+4\times 9+6\times 9^2+4\times 9^3}=9\frac{764}{3\,439}$$

在《四元玉鉴》中,有

$$\sqrt[3]{574}\approx 8+\frac{574-512}{1+3\times 8+3\times 8^2}=8\frac{2}{7}$$ (中卷,第三门,第十三问)

$$x^2+252x-5\,292=0,x\approx 19+\frac{143}{1+290}=19\frac{143}{291}$$ (下卷,第二门,第十九问)

有时建立了多项方程之后,在运用算法求根之前,先用代人法加以简化.例如《益古演段》(第四十问)中立出的方程式为

$$-22.5x^2-648x+23\,002=0$$

变换为

$$-y^2-648y+517\,545=0$$

显然是用 $y=22.5x$ 代人过的.变换方程的解为 $y=465$,因之

$$x=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}$$

《四元玉鉴》中还有一个情况比较复杂的替代例子(上卷,第六门,第十三问).立出的方程式为

$$576x^4-2\,640x^3+1\,729x^2+3\,960x-1\,695\,252=0$$

并指出它的解为非整数.

接着给定的方程式为

$$x^4+15\,792x^3+91\,902\,528x^2+233\,700\,360\,192x-104\,208\,452\,812\,800=0$$

其解为 $x=384$.这个方程式是怎样由第一个方程式得来的,却没有说明.然而,第一个方程式的解的整数部分为8,用 $x=8+y$ 代人,则方程变换为

$$576y^4+15\,792y^3+159\,553y^2+704\,392y-545\,300=0$$

用 $x=576y$ 代人这个方程,即得第二个方程式.因此,第一个方程式的解也就是

$$x=8+\frac{384}{576}=8\frac{2}{3}$$

《四元玉鉴》并没有说明多项方程求解的方法,然而上文我们已经指出,在这部著作里有一帧图表(图14)说明着开方的"今法"可以与描绘巴斯噶三角的"古法"对比.这图

表的顶行标题是“梯法七乘方图”；下一行写道：“正者为从负者为益”．再下面一共有四个直列，从左面开始第一列给出每一方程式最高次幂项系数的名称．从第一行中的常数项定实位开始，依次是第二行中的线性方程除实法，一直到末一行中的八次方程七乘隅．第二直列指明算盘上各行的位置，即第（同图中“弟”）一等，第二等，…，第九等．第三直列说明每一等中放下的算筹，必须相对常数项的位置而移动的十进位数．末一直列写明多项方程中除了最高次幂项以外各项系数的名称；例如，x 的系数称作“方（位）法”，x^2，x^3，x^4，… 的系数依次称作第一廉，第二廉，第三廉等．

古今開方會要之圖 圖一

梯法七乘方圖

正者爲從負者爲益

定實位	弟一等	直置數	不動數
除實法	弟二等	進退一	方位法
平方隅	弟三等	進退二	第一廉
立方隅	弟四等	進退三	第二廉
三乘隅	弟五等	進退四	第三廉
四乘隅	弟六等	進退五	第四廉
五乘隅	弟七等	進退六	第五廉
六乘隅	弟八等	進退七	第六廉
七乘隅	弟九等	進退八	第七廉

图 14

6 高次多项方程的立法

公元13世纪中叶以后，中国数学家已经显示出在立出任意次幂多项方程并求解方面达到了精熟的程度．本文已经指出，在数字方程的一般解法方面，已经由算术－几何阶段过渡到了算术－代数阶段．与此同时，在多项方程的立法方面也产生了相同的变化．杨辉在分析刘益对二次方程的贡献时，李治在《益古演段》中记下早期的方法时，都叙述了多项方程立法的最初发展；而这种立法的最高峰，则出现在秦九韶、李治和朱世杰等人的著作中．

秦九韶在显示解题的方法时，非常可贵的一点是介绍得很详细，很系统化．每一个步骤通常都伴有图形，以表明算盘中演算的过程．除了介绍解题方法之外，也介绍方程式的立法，然而他主要目的是讲清楚高次方程的解法．因此在一个较为简单的地方他立出一个复杂的代数方程．

这一点可以从求解如下方程式

$$-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000=0$$

题中看得很清楚．本题的解法，上文已经作过介绍．本题还涉及求"尖田"（图15）的面积．图中 $a=39, b=25, c=30$．秦九韶用较长的文字说明了此项方程的立法，而后用下列筹式表明算盘中各项数字的位置．（本文用代数解释其中的某些项）

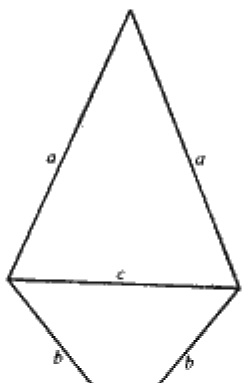


图15

c	30	$\left(\frac{1}{2}c\right)^2$	225
以半之		从 b^2 中减去此数	

$\frac{1}{2}c$	15	b^2	625
	15	乘以	
以自乘为半幂		$\left(\frac{1}{2}c\right)^2$	225
$\left(\frac{1}{2}c\right)^2$	225	余	400
b	25	A	90 000
	25	a	39
自乘(小斗 25 步)			39
b^2	625	自乘	
(i)		(ii)	

a^2	1 521	乘	
减		余	201 600
		自乘	
$\left(\frac{1}{2}c\right)^2$	225	实	40 642 560 000
余	1 296	B	291 600
相乘		加	
$\left(\frac{1}{2}c\right)^2$	225	A	90 000
B	291 600	得	
B	291 600		381 600
减		倍之(乘以 =)	
A	90 000		2
余	201 600	为从上廉	763 200
		益隅	1
(iii)		(iv)	

以上的演算(草)可以概括如下:设面为 x,则 x 为 $-x^4+2(A+B)x^2-(B-A)^2=0$ 之解(开玲珑翻法三乘方),式中

$$A=\left[b^2-\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]\left(\frac{1}{2}c\right)^2$$

$$B=\left[a^2-\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]\left(\frac{1}{2}c\right)^2$$

秦九韶著作中其他涉及四次与十次方程的问题,也是以几何为基础的①.他立出的各个方程的常数项都是负数(实常为负).

《测圆海镜》一百七十题都是从一个主要的几何图形推导出来的.这幅图形(图 16)是由一个直角三角形内切圆(容圆)组成,图中一共画出十五个直角三角形(勾股形).每一个三角形的一条边都具有特定的名称.一切问题所询问的都相同,即求圆的直径,答数

① 这些方程式的立法,见李倍始[1],第 105、134 及 140 页.

亦相同.这些问题中涉及的多项方程可达六次幂.李治只关心如何立出方程,并不提及到解题的步骤.他所作出的重要贡献是引进了"天元术",然而却不以发明者自居.李治用天元术把多项方程的立法上升为一种代数过程.

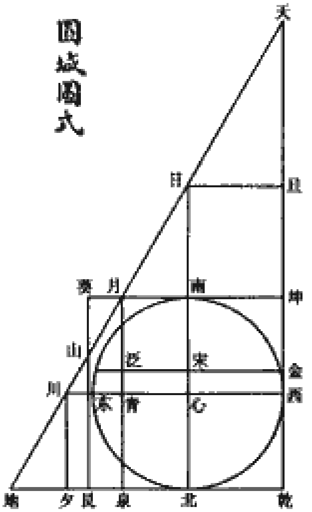


图 16

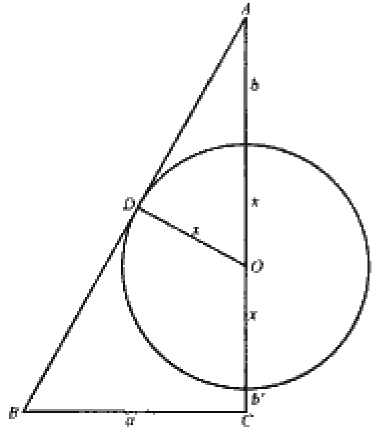


图 17

《测圆海镜》中的一个问题(卷十一,第十七问)可说明李治的风格.原题[1]如下:

或问出南[2]门行一百三十五步有树,出北门行一十五步折东而行二百八十步望见树,(问圆城直径)答(二百四十步)问前.

如图 17 设 x 为圆的半径,$a = 208$, $b = 135$, $b' = 15$.下文中方括号内为代数解释.

法曰:以东行步乘南行步,得数自乘$[a^2b^2]$为实.以东行步自乘,乘南行步,又倍之$[2a^2b]$为从.东行步自乘于上(放在最上面的位置上),并南北二行步,以减于东行步,馀数自之为幂,以减上$\{a^2-[a-(b+b')]^2\}$再寄位(把得数放在第二位).又并南北二行步,以东行步乘而倍之.内减再寄位$\{2a(b+b')-a^2+[a-(b+b')]^2\}$为第一益廉.四之东行步于上(放在最上面的位置上).又并南北二行步,减于东行步.(余数)又四之,减上位$\{4a-4[a-(b+b')]\}$,为第二益廉.四步虚隅.开三乘方,得半径.

① 见何丙郁[2],《李治》,第八卷,第 317-318 页.

② 中国图中所示的四大方向,上端为南,下端为北,右方为东,左方为西.

在以上这一段"法"中,"益"和"虚"说的都是负数.四次方程为 $-4x^4-\{4a-4[a-(b+b')]\}x^3-\{2a(b+b')-a^2+[a-(b+b')]^2\}x^2+2a^2bx+a^2b^2=0$.李治的"法"后面接着就是"草",表明算盘上的具体运算过程.

草曰:立天元一为半径,即高勾[1]也.置南行加天元,得

1 元 $[x+135]$

135

为高弦也.置大勾,208,以高弦乘之,得

208 元 $[208x+28\ 080]$

28 080

复以高勾除之,得下式

208 太 $[208+28\ 080x^{-1}]$

28 080

为大弦也.令之自乘,得

43 264 太 $[43264+11\ 681\ 280x^{-1}+788\ 486\ 400x^{-2}]$

11 681 280

788 486 400

寄位.又置二之天元,加南北行,并得

2 元 $[2x+150]$

150

为大股.复用大勾二百八减之,得

2 元 $[2x-58]$

−58

为较也.以自乘,得

4 $[4x^2-232x+3\ 364]$

−232 元

3 364

为较幂,以减寄位,得

−4 $[-4x^2+232x+39\ 900+11\ 681\ 280x^{-1}+788\ 486\ 400x^{-2}]$

232

39 900 太

11 681 280

788 486 400

为 = 直积[AC 和 BC 构成的长方形面积].寄左.再置大股,以大勾乘之,得

416 元 $[416x+31\ 200]$

① "高勾""大勾""大弦"…… 为涉及图 16 的专门名词.

31 200

为直积，又倍之，得

832 元 $[832x+62\ 400]$

62 400

为同数，与左相消，得

−4 $[-4x^4-600x^3-22\ 500x^2+$

−600 $11\ 681\ 280x+788\ 486\ 400=0]$

−22 500

11 681 280

788 486 400

翻法开三乘方，得一百二十步，即城径之半也，合问.

上面这道题目的解法，利用了相似三角形的性质. 图 17 中，直角三角形 ADO 与 ACB 相似，则

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AO}{OD}$$

也即
$$AB=\frac{(x+135)\times 208}{x}$$

又
$$(AB)^2-(AC-BC)^2=2AC\cdot BC$$

是由于
$$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$$

因之 $-4x^2+232x+39\ 900+11\ 681\ 280x^{-1}+788\ 486\ 400x^{-2}=832x+62\ 400$

李治在本题以及《测圆海镜》的其他各题中，表明怎样把算盘的长处充分加以利用. 通常是把多项方程的逐项系数在算盘上排成直列，把"太"字放在常数项的旁边，或把"元"字放在一次项 x 的系数旁边. 李治灵巧地把直列向相反的方向延长，以安排 x 的负指数幂及其各高次负指数幂的系数. 见下所示：

$$x^n$$
$$\vdots$$
$$x^2$$
$$x$$
太
$$\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x^2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{x^n}$$

这样，他就毫无困难地引进了 x 的负指数幂及其各高次负指数幂的概念，并按照处理 x

及其各正指数幂系数的办法来处理它们的系数. 在解负 n 次代数方程时，李治也同样是灵巧的. 他把代表常数项的"太"字挪到 $1/x$ 最高次幂系数的旁边. 这样，负 n 次代数方程就变成了已知解法的一般多项方程了. 例如在上文刚说到的这道题目中，就把"太"字向下一直移到最后一行，方程式也就变为

$$-4x^4-600x^3-22\,500x^2+11\,681\,280x+788\,486\,400=0$$

下面是《测圆海镜》中涉及负数次幂方程的例子：

$$-512x+7\,372\,800\frac{1}{x}=0$$

变为 $$-512x^2+7\,372\,800=0$$ （卷三，第七问）

$$-x^3-1\,406x^2-511\,907x-4\,730\,640+10\,576\,065\,600\frac{1}{x}=0$$

变为 $$-x^4-1\,406x^3-511\,907x^2-4\,730\,640x+10\,576\,065\,600=0$$

（卷十一，第十八问）

用同样而向相反方向移动"太"的办法，可以处理常数项为零的多项方程，例如

$$-2x^3+28\,800x=0$$

变为 $$-2x^2+28\,800=0$$ （卷三，第九问）

又 $$-4x^5+3\,600x^4-1\,256\,400x^3+105\,840\,000x^2=0$$

变为 $$-4x^3+3\,600x^2-1\,256\,400x+105\,840\,000=0$$ （卷五，第十四问）

《测圆海镜》中，多项式方程的排列法是以 x 最高次幂的系数居首行，其下依次为幂次由高至低各项的系数.《益古演段》中则相反，以常数项居第一行，以下依次是 x 项，x^2 项，…，x^n 项的系数.

约在半个世纪之后，朱世杰也把天元术应用于他的两部著作之中. 在《算学启蒙》里，他只在下卷"开方释锁门"中使用了天元术. 在《四元玉鉴》里，他所排列出来的一个方程式或一组方程式竟达到了非常高级复杂的水平. 在该书的全部二百八十八道问题中，所求数或未知数都称做"天元". 如果未知数不止一个，则第二、第三和第四个分别称做"地元"、"人元"和"物元". 这些要用多项方程来解决的问题，题材及解题方法的范围都很广泛；大致可以分为下列几个方面：三角形和长方形，面积和体积，级数和插值，一次方程组以及测高与测距①.

朱世杰所举内容涉及一个未知数多项方程的例题是为数不少的，他建立方程的风格比李治、秦九韶的更加简捷. 下面介绍的是《四元玉鉴》下卷第一门第六问的全部解题过程，这是一个很典型的例子.

> 今有三角撒星更落一形果子积九百二十四个，问底子几何？
>
> 答曰：七个.
>
> 术曰：立天元一为三角撒星更落一底子如积，求之得六十六万五千二百八

① 谢元作[1]，第25页.

十为益实，一百二十为从方，二百七十四为从上廉，二百二十五为从二廉，八十五为从三廉，一十五为从四廉，一为正隅，五乘方开之，合问．

这些数字是怎样推导出来的，朱世杰并没有加以解释．所谓“三角撒星更落一形”垛，乃是一种用圆球堆砌起来的“三角形”垛；各层球数符合下列级数

$$S_n = 1 + 6 + 21 + 56 + 126 + \cdots + u_r + \cdots + u_n$$

这可以写成下列形式

$$S_n = 1 + [1 + (1 + 4)] + [1 + (1 + 4) + (1 + 4 + 10)] + \cdots + \{1 + (1 + 4) + (1 + 4 + 10) + \cdots + [1 + 4 + 10 + \cdots + \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)]\}$$

式中的 $$u_r = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{5!}$$

而 $$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6!}$$

令 $S_n = 924$，则得朱世杰得出的方程式为

$$x^6 + 15x^5 + 85x^4 + 225x^3 + 274x^2 + 120x - 665\ 280 = 0$$

《四元玉鉴》中，除了显著地放在书首的四道题目之外，对其他各题的解释，正如上例中所见，仅限于宣布一下一元多项方程或二至四元联立方程的组成；后者还进一步通过消元从而简化成为一元高次方程，并不附带其间的消元过程．全书起首的四道题目是经过特意选择的，第一题是一元方程的典型，第二、三、四题则分别为二元、三元、四元方程组的典型．就是这四道题目的行文风格，也和书中其余部分一样地惜墨如金．即便有了算草，也极其简短．以下是第一题“一气混元”的译文：

今有黄方乘直积得二十四步，只云股弦和九步，问勾几何？

答曰：三步．

草曰：立天元一为勾，如积求之，得一百六十二个黄方乘直积，式

0 太
0
729
−81
−9
1

以一百六十二乘元积，相消，得开方式

−3 888
0
729
−81
−9

1

四乘方开之(即求五次幂式之根),得勾三步.合问.

在直角三角形中,令 x = 底(勾),b = 高(股),c = 斜边(弦),则黄方为 $x+b-c$,三角形面积为 xb.三项有关的方程式为

$$(x+b-c)xb=24 \quad ①$$

$$b+c=9 \quad ②$$

$$x^2+b^2=c^2 \quad ③$$

以②式中之 $c=9-b$ 代入①式和③式.再以③式中之 $b=\frac{1}{18}(81-x^2)$ 代入①式,则得朱世杰给出之方程式,即

$$x^5-9x^4-81x^3+729x^2=3\ 888$$

在朱世杰显示算筹排列法的"草"中,负数的表示方法是在最右端的非零十进数字上加上一斜划.李治也采用了同样的记号.

《四元玉鉴》中有关一元多项方程的例题还可以举出下面几道:

$$16x^{10}-64x^9+160x^8-384x^7+512x^6-544x^5+465x^4+126x^3+3x^2-4x-177\ 162=0$$

(上卷,第一门,第十八问)

$$-4x^8+78x^6-741x^4+3\ 610x^2-6\ 552=0$$

(上卷,第五门,第七问)

$$x^4+360x^3-270\ 000x^2+20\ 736\ 000x+1\ 866\ 240\ 000=0$$

(中卷,第五门,第一问)

$$2x^6+3x^5+x^4-1\ 272x^3+48x^2+3\ 456x+55\ 296=0$$

(下卷,第一门,第十六问)

多项方程 $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_{n+1}=0$ 各项系数的名称是由李治规定的.虽然他列出的方程式最高只达到六次,但是要推断出更高次方程式系数的名称是容易的.李治对六次方程系数给定的名称是

a_7	实
a_6	方
a_5	第一廉
a_4	第二廉
a_3	第三廉
a_2	第四廉
a_1	隅

朱世杰采用了相同的名称,只是将"第一廉"改成了"上廉".以上这些名称在图 14 中都能见到.在《四元玉鉴》开头的"古法七乘方图"(图 12)中也能见到.有时李治对最高项系数的名称不用"隅"而用"常法".

秦九韶对他给出的十次方程各项名称是

a_{11}	实
a_{10}	方
a_9	上廉
a_8	次廉
a_7	才廉
a_6	维廉
a_5	行廉
a_4	爻廉
a_3	星廉
a_2	下廉
a_1	隅

对于四次方程，则秦九韶、杨辉、朱世杰使用了下列名称，即

a_5	实
a_4	方
a_3	上廉
a_2	下廉
a_1	隅

各人表示负数的方式是：李治在有关项名称之前加上"益"字或"虚"字．秦九韶称正数项为"正"或"从"，称负数项为"负"或"益"．与李治不同，当系数是零时，朱世杰使用了"虚"字．朱还称正数项为"正"或"从"，称负数项为"益"．杨辉把负数项和正数项区别的办法也是对负项使用"负"或"益"的名称．

7　多元联立方程

中国古代数学家是在算盘上立方程式并且进行演算的，这种机械方法大大促进了多项方程的发展，他们充分利用算盘的优越性，是理所当然的事．李治引入了 x 的高次负指数幂，从而向相反方向拓展了多项方程的境域．半个世纪以后，朱世杰利用算盘上每一个方向与空间，把方程的范围扩大到了前所未有的高峰（见下文）．在《四元玉鉴》中，他先是介绍了二元联立方程，然后介绍三元联立方程，最后介绍四元联立方程．他在算盘上施行消元法，使上述联立方程化为一元高次方程．

朱世杰在《四元玉鉴》中起首所给出四类题目各一个例题的演算程序，叙述得都极简略①．下面分别介绍第二题及另外两题的解题方法．

《四元玉鉴》开首第二问（"两仪化元"）：

① 原文详细解释见三上义夫[1]，第93-97页；李俨和杜石然[1]，第162-171页；许莼舫[1]，第130-162页；钱宝琮[2]，第79-186页；钱宝琮[1]，第177-183页；谢元作[1]，第114-247页．

今有股幂减弦较较与股乘勾等，只云勾幂加弦较和与勾乘弦同，问股几何?

答曰：四步.

草曰：立天元一为股，地元一为勾弦和.天地配合求之，得今式(从第一数据中)

$$\begin{array}{ccc} -2 & 0 & \text{太} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad ①$$

及云式(从第二数据中)

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & \text{太} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad ②$$

消之，得内直列式为

$$\begin{array}{c} \text{太} \\ 8 \\ 4 \end{array}$$

外直列式为

$$\begin{array}{c} \text{太} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

两位相消，得开方式

$$\begin{array}{c} -8 \\ -2 \\ 1 \end{array} \qquad ③$$

平方开之，得股四步.合问.

算盘中二元联立方程的表示方法见下式

$$\begin{array}{ccc} & & \frac{1}{x^3} \\ \frac{y^2}{x^2} & \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{y^2}{x} & \frac{y}{x} & \frac{1}{x} \end{array}$$

y^4	y^3	y^2	y	太	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{1}{y^3}$
	y^3x	y^2x	yx	x	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y^2}$	
	y^3x^2	y^2x^2	yx^2	x^2	$\frac{x^2}{y}$	$\frac{x^2}{y^2}$	
	y^3x^3	y^2x^3	yx^3	x^3			
				x^4			

直角三角形中，设 a = 底(勾)，b = 高(股)，c = 斜边(弦). 由题中所给定的数据中可推导出两个方程式

$$b^2 - [c - (b - a)] = ba$$
$$a^2 + c + b - a = ac$$

如 $x = b$(天元)，$y = a + c$(地元)，则由方程式 $a^2 + b^2 = c^2$ 知以上两个方程式分别相当于

$$x^3 + 2yx^2 + 2yx - xy^2 - 2y^2 = 0$$

及

$$x^3 + 2yx - xy^2 + 2y^2 = 0$$

上两式相当于前述的 ① 和 ② 两种中国数学家的表示法. 这两个方程式消元后，得出如 ③ 所示的 x 的二次方程式

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

朱世杰的第三问("三才运元")：

今有股弦较除弦和和与直积等，只云勾弦较除弦较和与勾同，问弦几何？
答曰：五步.

用前一题中所用的记号，则两个给定的方程式为

$$\frac{a + b + c}{c - b} = ab$$

及

$$\frac{c + b - a}{c - a} = a$$

这可以和直角三角形方程式

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

一起求解.

算盘中三元联立方程系数的表示方法见下式：注意像 x, y, z 的系数必须另外添上.

y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3
	y^2x	yx	x	xz	xz^2	

XYZ

yx^2　　x^2　　x^2z　　x^2z^2

x^3

在本题的"草"中，朱世杰用天元来代表勾，用地元来代表股，用人元来代表弦.他先在算盘上用上面的方式列出三个方程式，再经过消元，得到最后的一元方程式.令 $x = a, y = b, z = c$，则其代数解释可以书写在右边.

0	-1		太	-1	第一个方程式 $xyz - xy^2 - x - y - z = 0$
-1	0	1	-1	0	

-1	太	-1	
0	1	1	第二个方程式 $xz - x^2 + x - y - z = 0$
0	-1	0	

1	0	太	0	-1	
0	0	0	0	0	从直角三角形知 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
0	0	1	0	0	

1	1	-2	太	用消元法将上式简化为以下两式，以 x 取代 z 的位置，y 取代 x 的位置后得 $x^2y - xy^2 - 2x^2 + xy + y^2 - x + y - 2 = 0$
-1	1	-1		
0	1	-2[①]		

1	-2	2	太	
0	-2	4	-2	$y^2 - 2xy^2 + x^2y - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 2y = 0$
0	0	1	-2	

7	-6	太	
3	-7		再消元，将"矩阵"化为两直列的"矩阵"$(-x^2 + 3x + 7)y + x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = 0$
-1	-3		
0	1		

13	-14	太	
11	-13		
5	-15		$(-2x^3 + 5x^2 + 11x + 13)y + 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 13x - 14 = 0$
-2	-5		
0	2		

① 原文中此处误为"2".

−78
−157
−146
−43
10
11
−2

交叉相乘，得内直列为 $-2x^6+11x^5+10x^4-43x^3-146x^2-157x-78$

−98[①]
−133
−130
−67
14
11
2

及外直列 $-2x^6+11x^5+14x^4-67x^3-130x^2-133x-98$

−5
6
4
−6
1

从而得到四次方程式 $x^4-6x^3+4x^2+6x-5=0$

朱世杰的第四问（"四象会元"（图 17））：

> 今有股乘五较，与弦幂加勾乘弦等，只云勾除五和与股幂减勾弦较同，问黄方带勾股弦共几何？
>
> 答曰：一十四步.

五"较"是 $b-a, c-a, c-b, c-(b-a)$ 和 $(a+b)-c$. 五"和"是 $a+b, b+c, c+a, c+(a-b)$ 和 $(a+b)+c$. 黄方为 $a+b-c$. 这样，已知数据给出的两个方程为

$$b\{b-a+c-a+c-b+c-(b-a)+a+b-c\}=c^2+ac$$

$$(a+b+b+c+c+a+c+a-b+a+b+c)/a=b^2-(c-a)$$

求
$$a+b-c+a+b+c$$

下列图解显示算盘上四元联立方程系数的表示方法：

① 原文中此处误为"−99".

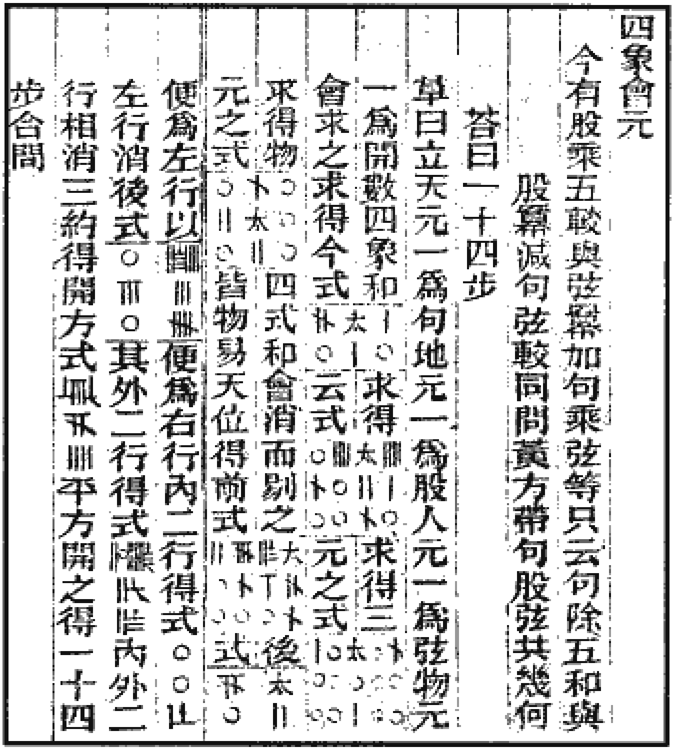

四象會元
今有股乘五較與弦冪加句乘弦等只云句除五和與
股冪減句弦較同問黃方帶句股弦共幾何
荅曰一十四步
草曰立天元一爲句地元一爲股人元一爲弦物元
一爲開數四象和求得求得三
會求之求得今式云式元之式
求得物四式和會消而剔之後
元之式皆物易天位得前式式
便爲左行以便爲右行內二行得式
左行消後式其外二行得式內外二
行相消三約得開方式平方開之得一十四
步合問

图 17

y^3u^3	y^2u^3	yu^3	u^3	u^3z	u^3z^2	u^3z^3
y^3u^2	y^2u^2	yu^2	u^2	u^2z	u^2z^2	u^2z^3
y^3u	y^2u	yu	u	uz	uz^2	uz^3
				(YZ)		
y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3
			(XU)			
y^3x	y^2x	yx	x	xz	xz^2	xz^3
y^3x^2	y^2x^2	yx^2	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3

y^3x^3	y^2x^3	yx^3	x^3	x^3z	x^3z^2	x^3z^3

本题“草”中，以天元代表底边(勾)，以地元代表高(股)，以人元代表斜边(弦)，最后以物元代表所求之数. 朱世杰以下列图形表示算盘中的筹式. 令 $x=a, y=b, z=c, u=2a+2b$，则其代数解释写在右边.

-2	太	1
0	1	0

第一个方程式 $x-2y+z=0$

0	4	太	4
-1	0	2	1
0	0	-1	0

第二个方程式 $-xy^2+xz-x^2+2x+4y+4z=0$

1	0	太	0	-1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0

从直角三角形知 $x^2+y^2-z^2=0$

0	-1	0
2	太	0
0	2	0

求 $u=2x+2y$

2	-8	28	太
0	-1	6	-2
0	0	0	-1

以消元法将上三式简化为两个方程式，x 和 u 互换位置后得 $2y^3-xy^2-x^2+6xy-8y^2-2x+28y=0$

-7	太
0	2

$2x-7y=0$

0	294
8	3
0	-4

下一步是将“矩阵”化为两个直列式的矩阵 $8xy-4x^2+3x+294=0$

0
0
16

交叉相乘产生内直列式 $16x^2$

-2 058
-21
28

及外直列式 $28x^2-21x-2\ 058$

-686

-7 从此得出二次方程 $4x^2-7x-686=0$

4

《四元玉鉴》全部二百八十八问中，计有二元高次联立方程三十六问，三元高次联立方程十三问，四元高次联立方程七问．除了起首三道问题对联立方程的消元过程与方程组的简化作了扼要介绍外，其他各题只是给出一个方程式，而不介绍演算的过程．“术”中介绍了未知元的表示法，所给出的唯一方程式就是从高次联立方程简化而来的最后一个一元高次方程式，其中高次联立方程是从问题给定的已知数据含蓄地建立起来的．例如在下卷，第七门，第十一问中，由给定数据建立的三元联立方程就是

$$\sqrt{(y-z)(x+2y-z)+(x+y)}-y=1$$

$$z^2-\sqrt{(x-z)(2y-z)-(x+y-z)}=3$$

$$x^2+y^2=(x+y-z)^2$$

这些方程式经简化后就成为“术”中唯一提到的那道方程式了，即

$$4z^{12}-2z^{11}-82z^{10}+36z^9+670z^8-233z^7-2\,829z^6+720z^5+$$
$$6\,522z^4-1\,134z^3-7\,698z^2+760z+3\,560=0$$

另外一个涉及四元联立方程组的例子（下卷，第八门，第六问）为

$$(y-x)^2+(z-x)^2+(z-y)^2+(z-\overline{y-x})^2+(x+y-z)^2-3u+u^2+u^3-2u^4=0$$

$$(x+y)^2-2xy+x+y+z=u^4+z^2-y$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)+x+y-z=u^3$$

$$x^2+y^2=z^2$$

以上联立方程组化为一元高次方程式

$$2\,006u^{14}-11\,112u^{18}+22\,292u^{12}-19\,168u^{11}+2\,030u^{10}+12\,637u^9-8\,795u^8-8\,799u^7+$$
$$19\,112u^6-9\,008u^5-384u^4+1\,792u^3-640u^2-768u+1\,152=0$$

8　结　论

立方程式和解方程式的过程，形成了中国多项方程式发展史上两条齐头并进的涓涓之流．这两股泉流的渊源则是《九章算术》中展示的开方法和开立方法．解二次方程的概念则是由开平方法推导出来的．刘益对不同形式的二次方程提出了不同的解法，并且力图用几何名词来解释这些方法．与此同时，二次方程的立法，也是利用几何概念进行的．

贾宪建立了二项展开式数字的三角形排列（在西方称为巴斯噶三角）与开平方、开立方的演算程序之间的关系．从而导出对二次和三次方程一般解法的认识．这些成就的顶峰就是引进了一种改进的算法，这种算法可以使任意次数字方程求得的根准确到任意小数位．秦九韶的功迹就是对这类方程的解法作出极为详尽的说明．

在解释两个数量之间的相等关系时，中国数学家引进了立“天元”来表示未知数的

办法，把几何图形的概念推进到了代数概念．李治和朱世杰把这种方法改进到了完美的程度，它显然是杨辉和秦九韶的著作中都还没有达到过的．既然能在算盘上把 x 各次幂的系数安排成一直列，也就演变为可以向相反的方向继续排下去，来表示 x 的各负指数幂的系数．朱世杰终于想到利用算盘来解四元高次联立方程，使中国代数学达到了顶峰．朱世杰在这方面毫无疑问是比西方同行超前了四百五十多年．在西方，消去二次以上的两个方程式 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$ 之间一个未知数的方法，直到1764年才首先由别朱(Etienne Bezout)在一篇论文中大致作了介绍，1779年他才正式把这种方法提了出来．

中世纪的中国算盘，在多项方程的发展上起了重要的作用．中国数学家充分利用了算盘的优点．然而算盘上能够表示的方向和可能发挥的作用毕竟是有限的，只要离不开算盘，就只能局限于解数字方程式，不能把数学发展到更高度概括和抽象的水平．算盘上只能表示四种方向，朱世杰的联立方程也就限于四元，这就是最好的说明．假如当年朱世杰能够进一步甩开算盘，那么中国代数学究竟能取得多大成就，就很难讲了，只能见仁见智，由人们去揣测了．

中国数学家没有讨论多项方程的根的数目和性质．由于提出的都是一些实际的具体问题，通常只要求求得正根的解就行了．由于同样的原因，也就没有能够在方程式概论方面有所探讨．在欧洲，三次方程一直到公元15世纪末还是无法解决的问题；但是进入了16世纪之后，对于解三次方程就有兴趣了．占支配地位的数学家是斯基皮翁·达·费罗(Scipione dal Ferro)、以笔名为塔式格利亚(Tartaglia)闻名的尼哥罗·方坦那(Niccolo Fontana)和杰罗姆·卡尔丹(Jerome Cardan)，接着就能解四次方程了．解方程式方法的普遍性质引发了一系列有关的定理和意见，导致了方程理论的研究．对于中国多项方程的发展，必须要有正确的看法，要考虑到中国当时正处于中世纪，其社会和文化背景都和西方的情况有所不同．我们只能认为，在当时的社会情况下，中国所作出的贡献是土生土长的，而且确实是杰出的．

（本文承里格伯(John F. Rigby)博士提出宝贵意见，特此致谢．）

刘祖慰　译　梅荣照　校

文中注释相关的文献

Ang Tian Se(洪天锡)：

[1]. A study of the Mathematical Manual of Chang Ch'iu-chien. M. A. thesis. University of Malaya, Kuala Lumpur, 1969.

Ho peng-Yoke(何丙郁)：

[1]. "The lost problems of the Chang Ch'iu-chien suan ching, a fifth-century Chinese mathematical manual". Oriens Extremus, 1965, 12, 37-53.

[2]. "Ch'in Chin – shao"(vol. 3, 249-256). "Li Chih"(vol 8, pp. 313-320). Dictionary of Scientific Biography. 14 vols. New York: Scribner's 1970-1976.

Hoe, John(谢元作)：

[1]. Les Systèmes D'Equations polynomes Dans Le Siyuan yujian (1303). Paris: College de France, 1977.

Kline, Morris:

[1]. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972.

Lam Lay Yong(蓝丽容):

[1]. "The geometrical basis of the ancient Chinese square-root method". Isis, 1969, 61, 92-102.

[2]. "On the existing fragments of Yang Hui's Hsiang Chich Suan Fa". Archive for History of Exact Sciences. 1969, 6, no. 1, 82-88.

[3]. A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa. A Thirteenth-century Chinese Mathematical Treatise. Singapore: Singapore University Press, 1977.

[4]. "Chu Shih-chieh's Suan-hsueh ch'i-meng (Introduction to Mathematical Studies)". Archive for History of Exact Sciences, 1979, 21, no. 1, 1-31.

[5]. "The Chinese connection between Pascal triangle and the solution of numberical equations of any degree". Historia Mathematica(to appear).

Li Yan(李俨):

[1]. Zhongguo shuxue dagang 中国数学大纲(Outline of Chinese Mathematics). 2 vols Shanghai, 1931. Reprinted, Peking, 1958.

[2]. Zhong suan shi luncong 中算史论丛(Collected Essays on the History of Chinese Mathematics). 5 vols. Peking, 1954 ~ 1955(second series).

Li Yan & Du Shiran(杜石然):

[1]. Zhongguo gudai shuxue jianshi 中国古代数学简史(A Short History of Ancient Chinese Mathematics). 2 vols. Peking, 1963-1964. Reprinted, Hong Kong: Commercial Press, 1979.

Libbrecht, Ulrich(李倍始):

[1]. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Mikami. Y.

(三上义夫):

[1]. The Development of Mathematics in China and Japan. New York: Chelsea Publishing CO., 1974(2nd edition).

Needham, J.(李约瑟):

[1]. Science and Civilisation in China. Vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

Qian Baocong(钱宝琮):

[1]. Zhongguo shuxue shihua 中国数学史话(On the History of Chinese Mathematics). Peking, 1957.

[2]. Zhongguo shuxue shi 中国数学史(History of Chinese Mathematics) Peking, 1964.

编后语 十三世纪是中国历史上的黄金岁月.据说GDP占全球1/4,相当于今天美国的地位.数学更是如日中天,但为什么后来近代数学没有产生,这是个大问题,被称为"李约瑟猜想".这篇长文或许你能读出点滋味,感谢蓝丽容女士.

从勾股比率论到重差术

李继闵

刘徽“辄造重差”，“缀于勾股之下”，唐初以后另本单行，便是流传至今的《海岛算经》.可惜刘徽自注及《九章重差图》在宋代已经失传，而后世以迄近代虽有不少中外人士曾为之补作证明[①]，但均未必能符合著者原意.关于这个问题，吴文俊曾有专文论述[②].他说：“以《海岛算经》诸题公式之复杂，以及测量方式之奥妙，如果没有一个深邃的思想作指导，很难得出这些公式来.”他探本溯源，论证了我国古代测望之学是建立在“出入相补”的普遍原理之上，由此可见我国古代几何学理论基础之深远.本文则是索流发微，考察我国古代勾股测量理论及其与重差术之关系，从而说明我国古代几何学理论的丰富多彩.

1　古代的勾股测量与刘徽的勾股比率论

我国的勾股测量肇源甚古，从商高“论矩”到刘徽“辄造重差”，其间千余年，它得到不断发展，名称也几经易改.据郑众《九数注》说，东汉的重差、勾股是由更古老的旁要术而来.旁要，“从旁要取”，即含有现今“布点测量”之意.据钱宝琮[③]说：《九章·勾股》最后八问（第十七至第廿四）大概是属于“旁要”的.

关于古代勾股测量的理论基础，钱宝琮认为是“相似勾股形相应边成比例的原理”.吴文俊亦指出“相似勾股形的命题：股率乘见勾，等于勾率乘见股.这一命题在《周髀》求日径术中即须用到，而见于《九章·勾股》第十五题以下刘徽注的每一题中”.

考察我国古代几何学，它不仅没有欧几里得的平行线和一般相似形理论，而且从未

---

① ［宋］杨辉.续古摘奇算法；［清］李潢.海岛算经细草图说；李俨.重差术源流及其新注.《学艺》，第7卷，第8期，1-15页，1926年；李俨.中国古代数学史料.第26章“海岛算经新注”，中国科学图书公司，1954年；钱宝琮主编.中国数学史.科学出版社，1964年；钱宝琮.中国数学史话.中国青年出版社，1957年；许莼舫.中算家的几何学研究.第二章，“三角术的嚆矢”，1952年；李俨，杜石然.中国古代数学简史.中华书局，1963年；Y. Mikami, The development of mathematics in China and Japan, 1913.

② 吴文俊.我国古代测望之学重差理论评介，兼评数学史研究中的某些方法问题.科技史文集.第8辑，数学史专辑.上海科技出版社，1982年.

③ 钱宝琮.中国数学史.科学出版社，1964年.

考虑关于角的性质.那么,我国古代是否建立了关于相似勾股形的理论?

从《九章·勾股》刘徽注中,我们可以看到具有我国几何独特风格的相似勾股形理论,这便是刘徽的勾股比率论.

首先,在《九章·勾股》第十五题"勾股容方术"注中,刘徽提出了"不失本率"原理:"幂图方在勾中,则方之两廉各自成小勾股,而其相与之势不失本率也."

这个命题是说,在勾股容方图(图1)中,"方"之两面所成的两个小勾股形,其对应勾、股、弦三边之比率与原勾股形相同("不失本率"),即

$$OE : DE : DO = BH : OH : OB = BA : DA : DB$$

勾股章自第十七题以下求邑方与量木高井深诸术,在方法上显然都从勾股容方问题演化而来.只不过将"勾股容方"演化为"勾中容横(图2)"或"股中容直(图3)"的情形,即是说,刘徽的"不失本率"原理实际上是对"容方"、"容横"、"容直"普遍而言的.

据比例性质容易推知,不失本率原理等价于下述命题:"凡勾中容横,股中容直,二积相同."即在图4中有

$$面积甲 = 面积乙$$

这个由"出入相补"原理容易证明的命题,杨辉称之为"源",即勾股测量的理论基础.吴文俊曾对照赵爽日高图说,论证这个"源"便是古代日高公式证明的基础和关键.

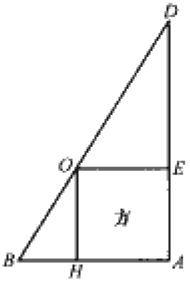


图1　勾股容方图

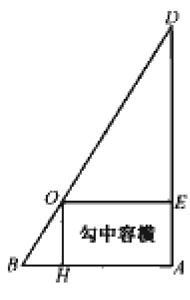


图2　勾中容横图

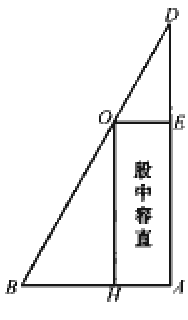


图3　股中容直图

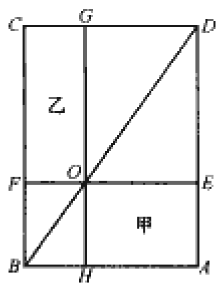


图4　"源"图

这个"源"乃是沟通相似勾股形理论与"出入相补"原理的桥梁.正如吴文俊所说,在这里"出入相补原理与相似勾股形命题自然是等价的","而出入相补原理是一个更高更普遍的概括".由此,大概可以说"不失本率"原理是建立在"出入相补"原理基础之上的.

不失本率原理虽就"勾股容方"之类的图形而言的,它却实际上概括了相似勾股形的判定与性质定理,这里用"容方"、"容横"之类的构图代替了西方的平行线理论,收到了异曲同工之效.

刘徽在《九章》勾股章的注中,更把不失本率原理与比例算法结合起来论证各种各样的勾股测量原理.

比例算法素为我国古代所见长.《九章》粟米、衰分、均输等章专门讨论各种复杂的比例问题.刘徽把它们总结为"今有"、"衰分"之术,并说"此都术也",即认为它是处理此

类问题的普遍方法.他概括出“今有”术的一般公式,即

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}$$

而应用今有术的关键在于确定所有率与所求率.衰分术则是今有术的发展,刘徽说:“列衰各为所求率,副并为所有率,所分为所有数.”即,若 $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$;$a_1:a_2:\cdots:a_n=b_1:b_2:\cdots:b_n$,则有

$$a_k=\frac{A\times b_k}{\sum_{i=1}^{n}b_i},k=1,2,\cdots,n$$

这里指出衰分(按比例分配)问题中,所求率等于 b_k,所有率等于$\sum_{i=1}^{n}b_i$,它已包含着现代所谓的合比定理、更比定理等比例性质的应用.《九章》刘徽注中还广泛运用关于比例的各种基本性质来说明一些问题的解法.例如衰分第十七题使用了若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$则$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$及$\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}$的法则.由此可见,比例算法在刘徽时代已完全成熟和受到特别的重视.

刘徽运用今有术将勾股不失本率原理概括为一般的勾股测望公式(即“旁要术”)

$$\text{见勾}=\frac{\text{见股}\times\text{勾率}}{\text{股率}}$$

或

$$\text{见股}=\frac{\text{见勾}\times\text{股率}}{\text{勾率}}$$

在勾股第十五、十六诸题中,更用比例性质演化成诸如

$$\text{见勾}=\frac{(\text{见勾}+\text{见股})\times\text{勾率}}{\text{勾率}+\text{股率}}$$

及

$$\text{勾}=\frac{(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})\times\text{勾率}}{\text{勾率}+\text{股率}+\text{弦率}}$$

之类的公式.

综上所述,刘徽将勾股形的不失本率原理与比例算法的今有衰分之术相结合,推演变化,构成丰富多彩的相似勾股形理论,这便是我国古代独特的勾股比率论,从而建立了古代勾股测望的理论基础.

2　景差原理与重差术

我国西汉时期主张盖天说的天文学派提出“地隔千里,影长差一寸”的“景差原理”作为测量日影计算的依据.《周髀》卷上法曰:“周髀长八尺,勾之损益寸千里.”《尚书考灵曜》云:“日永影尺五寸,日短一十三尺,日正南千里而减一寸.”张衡《灵宪》云:“悬天

之晷，薄地之仪，皆移千里而差一寸.”郑玄注《周礼》云：“凡日影於地，千里而差一寸.”可见景差原理在汉代十分流行.这种“景差”与“地隔”两者之比率固定不变的说法是以大地为平面的假设为依据的，它被以后南北朝时期的何承天和唐代的僧一行等人的实际测量所否定.

景差原理并非实际观测经验的总结，也不是单纯假设，那么，它从何而来?刘徽《九章注序》回答了这个问题.

序云：“周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中.说云，南戴日下万五千里.夫云尔者，以术推之…… 徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也.”这里“景尺有五寸 …… 南戴日下万五千里.”显然是由景差原理推算得来的，即

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{景长}\times\text{千里}}{1\text{寸}}$$

而刘徽认为上述结论是“以术推之”；这个“术”就是所谓的“重差术”，即按刘徽之意景差原理实际上便属于重差术.

何谓重差?古今中外数学史家有过种种解释.诸如，“重测取差”，“两个差数之比”，“二重差分法”，“重用勾股”等，而刘徽原序其实已对重差术的来历和涵义作了全面的说明.序云：“凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差，勾股则必以重差为率，故日重差也.”是说重差术产生于测量(太阳的高、远之类的)“无远之高”、“无高之远”.其所以称为“重差”，是因为在计算中要用“两个差数”来代替勾股测量公式中的勾率和股率.考察景差原理，其“千里”正是(南戴日下与北戴日下之)“地差率”；“一寸”为(南、北两表景长之)“景差率”，南戴日下公式即

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{景长}\times\text{地差率}}{\text{景差率}}$$

与勾股测量的一般公式

$$\text{见勾}=\frac{\text{见股}\times\text{勾率}}{\text{股率}}$$

相对照，正符刘徽“勾股必以重差为率”的解释.

按刘徽之意，重差术有两个特点：

其一是“重测”，即在测量方式上它是勾股测量的重复进行，也就是张衡《灵宪》所说的“重用勾股”；

其二是“以重差为率”，即在计算方法上它是取两次测量中的两对数据的差数作为固定不变的比率，从而用今有术立算.

刘徽原序中列举日高术的两个基本公式为

$$\text{日去地}=\frac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{景差}}+\text{表高}$$

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{南表景}\times\text{表间}}{\text{景差}}$$

便是典型的重差公式.

3　重差术的理论根据

从重差术发展的历史渊源来看，它无疑是由勾股测量发展演化而来．刘徽既将重差作为勾股之续篇而缀于其下，重差理论自当是勾股比率论之延伸．徽云："勾股则必以重差为率，故日重差也．" 这正指出重差和旁要的联系与区别．对比重差公式与勾股测量（旁要）公式，二者皆以今有术立算，而所不同者在于重差以两对数据之差作为公式中的比率．这更证实刘徽重差术的理论依据是我国古代独特的相似勾股形理论与比例算法．

事实上，重差图（日高图（图 6））是股中容横图（图 5）的发展．从图形结构来看，它是两个"股中容横" 的复合．于是便可重复使用勾股"不失本率" 原理（"重用勾股"），得到

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE}{FC},\quad \frac{AG}{E'F'}=\frac{GE'}{F'C'}$$

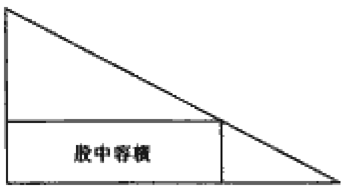


图 5　股中容横图

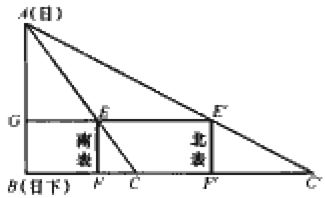


图 6　日高图

于是由 $E'F'=EF$，有

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE'}{F'C'}=\frac{GE}{FC}$$

再由比例性质（"以重差为率"）得

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE'-GE}{F'C'-FC}=\frac{GE}{FC}$$

故有

$$AG=\frac{EF\times(GE'-GE)}{F'C'-FC}\quad\left(日至表=\frac{表高\times表间}{景差}\right)$$

及

$$GE=\frac{FC\times(GE'-GE)}{F'C'-FC}\quad\left(南戴日下=\frac{南表景\times表间}{景差}\right)$$

这便十分自然地得到重差公式．

导出重差公式的关键在于应用比例性质：若"$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 则 $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$"．这一性质虽在《九章》中未有应用，但它不难由衰分术中已有的比例性质："若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 则 $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$" 推衍而得．

关于刘徽重差术之证明，还可从宋代秦九韶的《数书九章》中得到印证．白尚恕曾有专文[1]研究秦氏测望诸术，认为其《九问》多以相似勾股形对应边成比例为立术之根据．

按秦氏测望第三、四、七诸问术文中俱有"以勾股重差求之"、"以勾股求之，重差入之"等语．兹举"望敌远近"为例以究其意．

题云："(图 7) 问敌军处北山下(C)，原不知相去远近．乃于平地立一表(EF)，高四尺，人退表九百步(至 B)，步法五尺，遥望山原(C)适与表端(E)参合，人目高(AB)四尺八寸，欲知敌军相去(FC)几何．"

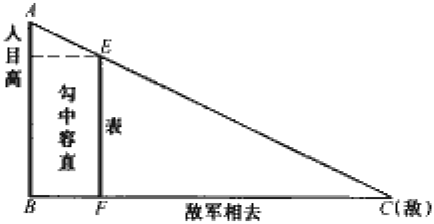


图 7　望敌图

"术曰"有云："以勾股求之，重差入之．"其所谓"以勾股求之"，即据相似勾股形命题有

$$\frac{FC}{EF}=\frac{BC}{AB}$$

而所谓"重差入之"，即由比例性质得

$$\frac{FC}{EF}=\frac{BC-FC}{AB-EF}=\frac{BF}{AB-EF}$$

由此解得

$$FC=\frac{EF\times BF}{AB-EF}$$

由此可见，秦氏所谓"以勾股求之，重差入之"，即是先以勾股不失本率原理立式，然后依据比例性质："若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$则$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$"入算．这正与刘徽"勾股则必以重差为率"之意相符．可以说秦九韶对于"重差"的理解更近于刘徽的原意．

4　《海岛》九问造术之探讨

《海岛》九问是刘徽对重差理论的重大发展．《九章注序》说："度高者重表，测深者累矩，孤立者三望，离而又旁求者四望．触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入．"所谓"触类而长"乃是"类推衍化"之意，即《海岛》九问是由日高术推衍变化而得的．

考察《海岛》诸术的测量方法，基本上是重表、累矩、连索三种．

---

① 白尚恕．秦九韶测望九问造术之探讨．宋元数学史论文集，附录四．科学出版社，1966，290-303．

《海岛》第四问（“累矩望谷”）是典型的累矩法. 它所得的谷深公式其推证方法与日高公式相仿. 据不失本率原理得（图 8）

$$AB \times E'F' = E'B \times C'F'$$

和 $$AB \times EF = EB \times CF$$

由 $E'F' = EF$ 便得

$$\frac{E'B}{CF} = \frac{EB}{C'F'}$$

据比例性质（以重差为率）得

$$\frac{EF}{C'F'} = \frac{E'B - EF}{CF - C'F'} = \frac{E'F'}{CF - C'F'}$$

于是

$$EB = \frac{F'F \times C'F'}{CF - C'F'}$$

故

$$BF = EB - EF = \frac{F'F \times C'F'}{CF - C'F'} - EF$$

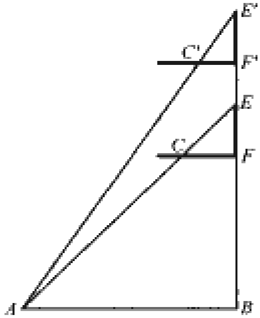


图 8　累矩图

此即谷深公式.

连索法在刘徽原序中并未作为一种单独的方法提出.《海岛》第［三］问（南望方邑）属连索法. 其术文有云：“以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差.” 按“景差”为“日高术”之术语，可见此法由测日高、远的“重表法”演变而来. 在“望邑”图中，将连索 EF 视为日高图中之南表，作 $E'F'$ 视为北表，则与日高图相合. 二者所不同之处仅在于重表之法用以测高，其图形在竖直面内；连索之法用于测广，其图在水平面内. 所以连索法在原理上与重表无异.

传本《海岛》第三问术文，其中“景差”之义与日高术不符，今依［清］李锪校改术文为：“以人索乘后去表，以两表相去除之，所得以前去表减之不尽为景差，以为法. 置后去表，以前去表减之，余以乘人索为实，实如法而一，得邑方.”①

按术文之意，计算分两步进行. 先求“景差”，即由勾股不失本率原理得（图 9）

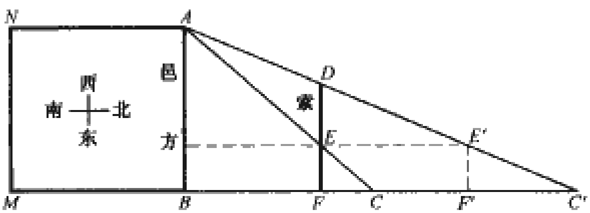


图 9　望邑图

① 李锪. 海岛算经纬笔.

$$F'C' = \frac{E'F' \times FC'}{DF}\left(\frac{\text{人索} \times \text{后去表}}{\text{两表相去}}\right)$$

故得

$$\text{“景差”} = F'C' - FC = \frac{E'F' \times FC'}{DF} - FC$$

再由日高公式得

$$\text{邑方} = AB = \frac{EF \times FF'}{F'C' - FC} + EF$$

术文的分步计算恰好显露出从日高术到望邑术的演变过程.

从《海岛》九题的测量方式来看,随着问题的愈加复杂,便由重表、累矩的“两望”,推衍为“三望”、“四望”.兹各举一例可见一斑.

第二问(松生山上)是用重表法三望的一例.它是“重表两望”的发展.在松高图(图10)中,根据勾股不失本率原理,在 $\triangle ABC$ 中有

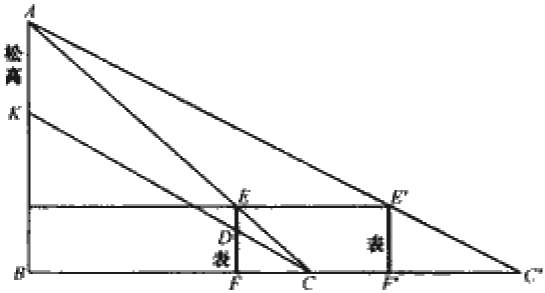


图 10　松高图

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FC}$$

在 $\triangle KBC$ 中有

$$\frac{KB}{DF} = \frac{BC}{FC}$$

由比例性质(以重差为率),得

$$\frac{AB}{EF} = \frac{KB}{DF} = \frac{AB - KB}{EF - DF} = \frac{AK}{ED}$$

故

$$AK = \frac{ED}{EF} \times AB$$

应用岛高公式,即得松高公式为

$$AK = \frac{ED}{EF} \times \left(\frac{EF \times FF'}{F'C' - FC} + EF\right) = \frac{ED \times FF'}{F'C' - FC} + ED$$

第七问(岸望清渊),是用累矩法四望的一例,它是“累矩两望”的发展.在清渊图(图11)中,两次使用谷深公式,有

$$BF = \frac{F'F \times C'F'}{CF - C'F'} - EF$$

和

$$B_1F = \frac{F'F \times C'_1F'}{C_1F - C'_1F'} - EF$$

于是,代入下式得

$$BB_1 = FB_1 - FB = \frac{F'F \times C'_1F'}{C_1F - C'_1F'} - \frac{F'F \times C'F'}{CF - C'F'} =$$

$$\frac{[(CF - C'F') \times C'_1F' - (C_1F - C'_1F') \times C'F'] \times F'F}{(C_1F - C'_1F') \times (CF - C'F')}$$

此即水深公式.

按《海岛》"登山望楼"、"望津" 诸术,虽更为"幽遐诡伏",但仍可如此类推衍化而得,本文不再一一赘述,兹列附表,以示诸术之推衍关系.

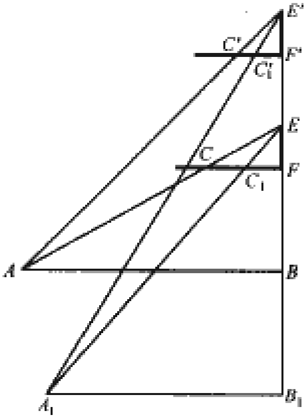


图 11　清渊图

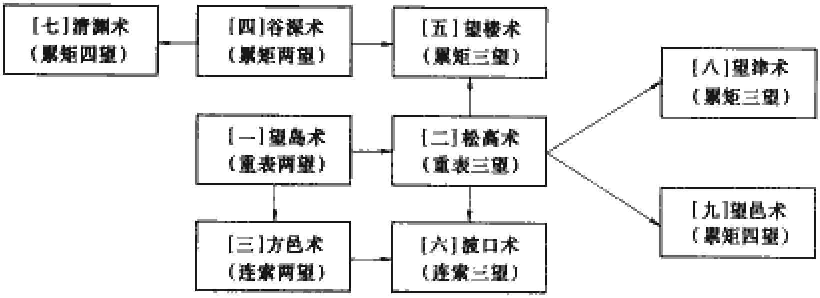
纵观我国古代测望之学,从勾股比率论到重差术,其发展线索极为分明,且与西方欧几里得体系迥然不同.勾股比率论建立在极其简单明白的出入相补原和比例算法之上,完全避免了平行线理论的麻烦.而从勾股不失本率原理出发,凭借比例性质的应用,推衍变化,创造出精深奥妙的重差诸术.这正表现了我国古代数学"原理简明与应用广泛相互辉映" 之独特风格.我国古代测望理论不仅绕过了一般相似形的繁琐理论,而且根本无需涉及角的度量与性质.这种以多次简易的长度测量代替较难的角度测量的原理,对于提高测量之精度无疑具有重要的实际意义.

吴文俊曾以广博的征引,论证重差公式的原证是基于"出入相补" 原理.从残存的赵爽《日高图说》来看,无疑"日高公式" 的原始证明是用"出入相补" 的.赵爽的证法或为刘徽所知.杨辉据"海岛小图" 对海岛公式所作的分析,实为赵爽对日高公式的证明,似与刘徽原序"勾股则必以重差为率" 之说不合,也与刘徽关于《九章》勾股测量的注释均用"勾股比率论" 的论证方法不相一致.此外,刘徽《重差图说》宋代早已失传,所谓"海岛小图" 又与刘徽原著"重差图" 之名有异,或为后人所补绘,似不能完全肯定为刘徽原图.

正如吴先生所指出,"出入相补" 与相似勾股形命题在此是自然等价的;"出入相补" 是一个更高更普遍的概括.从勾股测量原理的论证来看,"出入相补" 更为根本;而从勾股测量术的发展来看,用勾股比率论推衍新术更为方便有用.这大概也正是刘徽能超越赵爽而完成重差理论在数学方法上的重要原因.

相似勾股形命题早在秦汉以前的测日径术中已有应用.而在刘徽时代建立了相似勾股形的一般理论,从而完成了重差理论,可以说这标志着我国古代几何学发展到了一个新的阶段.

附表:《海岛》九问之推衍关系



编后语　勾股术是我们老祖宗做以示人的宝贝,重差术又是老树开新花,连吴文俊这样的大家都很重视并亲自研究.目前的中学课改,要求教师对数学史有较多的了解,早有名家建议,要向大师学习,而不是向他的学生学习.李继闵先生是中国古代数学史研究中大师级人物,且本文与中学几何联系甚密所以重发此文,一则为中学教师提供点进修资料,二则为振兴中国古代数学史研究尽点力,虽然是个冷僻分支,但也不能像现在这样冷.

刘徽的方程理论[①]

梅荣照

我国古代的方程相当于现代的线性方程组，古代的开方除了指数字开方外，还包含数字高次方程求正根．刘徽的方程理论，主要是关于线性方程组的建立方法和求解方法方面的理论，关于开方理论，文章最后亦将涉及．

方程最早见于公元1世纪成书的《九章算术》第八章．这是非常重要的一章，其中提到的正负数概念与线性方程组的解法，在世界数学史上是有划时代意义的．它的意义不仅表现在与外国同类成就比较时遥遥领先，更重要的是这些成就在数学的抽象性、一般性与严谨性方面已达到了相当高的水平．这一章，经过3世纪伟大数学家刘徽的注释，在理论上更臻完备，有如锦上添花，大放异彩．

在介绍刘徽的理论成就以前，首先要提出的问题是：《九章算术》方程章究竟产生于何时？能不能比《九章算术》最后成书的年代早？之所以提出这个问题，是因为东汉郑玄（127—200年）引郑众注解《周礼》"九数"时（约83年），十分肯定方程是属于战国时期"九数"的内容，以后的学者也没有提出异议．郑众在注解"九数"时还特别指出："今有重差、夕桀、勾股．"[②]与郑众大概同时的马融（79—166年）也提到："今有重差、夕桀．"[③]因此可以认为，重差、夕桀、勾股均为汉以后的数学科目．根据清代钱大昕的考证，夕桀是互椉的误文，而椉是乘的古字[④]．因此夕桀就是解线性方程组的互乘相消去，与当时新出现的重差、勾股并重．从数学发展的情况来看，这种推测比较合乎情理．既然肯定重差、互椉、勾股是汉以后的数学新科目，那么方程章的内容当然就可以出现于汉以前的时代了．1976年上半年在徐州东郊子房山出土的西汉初年的骨制算筹，有两段尚余黄豆般大小红漆斑迹三处，证明正负数在西汉初年已经存在．关于夕桀的解释及其产生的年代这个问题，同时还涉及互乘相消法是不是刘徽所创，这一点，将在正文中作进一步的讨论．

---

① 本文1980年10月在全国科学技术史学术会议数学史组宣读过．这次发表又作了修改．

② 李俨．中算史论丛．第二集，中国科学院，1954，13．

③ 同上．第14页．

④ 钱大昕．十驾斋养新录．卷十七．

1　方程的定义

《九章算术》方程章共收入 18 个线性方程组的问题,包括一个五元不定方程组在内.和其他章一样,编者对于名词和概念,均抱约定俗成态度,从不给予任何解释或定义.刘徽与《九章算术》的编者不同,对于一般人都了解的名词,他不作解释,但对于比较重要的数学概念,他都作出十分详细的定义.关于方程的定义,就是一个比较典型的例子.

刘徽在方程章第 1 题对方程注解说:“程,课程也.群物总杂,各列有数,总言其实.令每行为率.二物者再程,三物者三程,皆如物数程之.并列为行,故谓之方程.行之左右无所同存,且为有所据而言耳.”对这一定义,从宋代以后,一些学者与数学家都曾作过解释.

宋代李籍在《九章算术音义》说:“方者,左右也.程者,课率也.左右课率,总统群物,故曰方程.”①

南宋杨辉在《详解九章算法》(1261 年)说:“方者,数之形也;程者,量度之总名,亦权衡丈、尺、斛、斗之平法也.尤课分明多寡之义.”②明代程大位《算法统宗》(1592 年)说:“方,正也.程,数也.”③清代梅文鼎在《方程论》(1672 年)中说:“方者,比方也.程者,法程也,程课也.数有难知者,据现在之数以比方而程课之,则不可知而知.”④钱宝琮在《中国数学史》(1964 年)的解释是:“这里所谓‘如物数程之’是说,有几个未知量须列出几个等式.联立一次方程组各项未知量的系数用算筹表示时有如方阵,所以叫做‘方程’.”⑤

除梅文鼎外,对“方”字的解释基本上是一致的,是指数之形而言,也就是用算筹表示方程组各项未知量系数时的形状.至于“程”字,解释似乎就不一致了.“课率”、“法程”、“程课”等与刘徽原来的课程差不多,这等于没有进行解释;至于说“程”是“数”,是“度量之总名”也没有说清“方程”的含义.我们认为,“程”字在刘徽的定义中,一作“课程”,一作“程之”,前者是名词,后者是动词.作为名词的“课程”就是章程、法式的意思;作动词时,“课”与“程”的意思稍有不同,根据一定的章程进行试验稽核谓之“课”,刘徽在后面注释中提到的“不害余数之课”的“课”字,就是这个意思.而“程之”就是立出这种章程或法式.这只是一般字面的解释.根据刘徽的定义,在数学中还有更为具体的含义.若干不同事物掺杂在一起,它们之间存在着一定的数量关系.当知道这些事物总的数值而不知每一事物的具体数值时,可以列出若干个含有不同未知量的方程式,根据这些方程式,就能推算每一事物的具体数值.因此“课程”在这里可以解释为按照群物的数量关系而得到的方程式,“程之”就是列出这种方程式.

---

① 李籍.九章算术音义.

② 杨辉.详解九章算法,卷一,21 页,宜稼堂丛书,1261.

③ 程大位.算法统宗.卷十一,方程第八章,1592.

④ 梅文鼎.方程论.卷一“方程论发凡”,1672.

⑤ 钱宝琮.中国数学史,52 页,科学出版社,1964.

定义中"令每行为率.二物者再程,三物者三程,皆如物数程之.并列为行,故谓之方程.行之左右无所同存,且为有所据而言耳".这一段话是十分重要的,它指出:

(1) 这样的方程组是"每行为率";

(2) 方程组的个数须与未知量个数相同;

(3) 方程组中不允许存在同解的方程式(左右无所同存);

(4) 每个方程式不能是虚构的无解方程式,而是来自实际的有解方程式(有所据).

这四点,历来学者很少解释或解释欠妥.1921年钱宝琮先生在《方程算法源流考》一文中曾对"令每行为率"作如下的解释:"古算一次联立式演算,未知量不以符号表示.但用筹策布共数(系数)于某行某率,列各率之数于上,实数于下,即成一行.率谓不同之未知量,实则一行(式)内数率和较之值也."[①]把"每行为率"的率说成为每行的未知量,这是不符合刘徽原意的.

我们首先看看刘徽对率的定义.刘徽在《九章算术》粟米章经分术注中说:"凡数相与者谓之率.率者,自相与通.有分则可散,分重叠则可约也."在衰分章第17题术注对这一定义又作了更加通俗的解释:"凡所谓率者,细则俱细,粗则俱粗,两数相推而已."很清楚,刘徽所说的率就是两个数或几个数的比率.例如圆周率是圆周长与直径的比率;相似勾股形"其势不失本率"就是相似勾股形的对应边成比例.成比率的两个数或几个数是可以同时扩大若干倍(即"可散"或"粗则同粗")或同时缩小若干倍(即"可约"或"细则俱细").分数可以看成是比率,因此也可以同时"散"或同时"约",这就是刘徽注解通分术的理论根据.他在方田章合分术注说:"凡母互乘子谓之齐,群母相乘谓之同.同者,相与通同共一母也.齐者,子与母齐,势不可失本数也."又说:"乘以散之,约以聚之,齐同以通之,此其算之纲纪乎."

刘徽就是把这种率的概念应用到方程的理论中."令每行为率"就是方程式的两边成比率关系,也就是说,方程式的两边可以同时扩大若干倍或同时缩小若干倍.在这里刘徽又把率的概念推广到等式中,这实际上相当于等量的乘、除法公量.以后我们将会看到,这是刘徽注解线性方程组的造法与解法的重要理论根据.

2至4的规定也非常必要,非常全面.有了这些规定,才能保证线性方程组有解和有有限个解.而这一点,《九章算术》的编者未必完全理解.例如方程章第13题,本来是一个不定方程组,有无限个解,而《九章算术》的编者却把它和一般线性方程组同样处理,并给出确定的解.刘徽在注解中就指出:"是故七百二十一为井深,七十六为戊绠之长,举率以言之."说明刘徽充分认识到这是不定方程组,有无限个解,这里的解不过是"举率以言之"而已.

2 方程术

方程术出现在《九章算术》方程章第一题:"今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实

① 钱宝琮.方程算法源流考",《学艺》,1921,6.

三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗，问上、中、下禾实一秉各几何？”“术曰，置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方.中、左禾列如右方.以右行上禾偏乘中行而以直除.又乘其次，亦以直除.然以中行中禾不尽者偏乘左行而以直除.左方下禾不尽者，上为法，下为实.实即下禾之实.求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实.余如中禾秉数而一，即中禾之实.求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实.余如上禾秉数而一，即上禾之实.实皆如法，各得一斗.”

术文分两段.第一段从“置上禾三秉”到“中、左禾列如右方”，谈的是方程组的建立方法.设 x 为上禾一秉之实，y 为中禾一秉之实，z 为下禾一秉之实，依术文得

$$\begin{cases}3x+2y+z=39 & ①\\ 2x+3y+z=34 & ②\\ x+2y+3z=26 & ③\end{cases}$$

第二段从“以右行上禾偏乘中行而以直除”到“实皆如法，各得一斗”，谈的是方程组的解法.根据术文，可分为下列几个步骤：

(1) 用式 ①x 的系数偏乘 ② 式并直除(连续减去)式 ①，直至消去 x，又用 x 的系数偏乘式 ③ 并直除式 ①，直至消去 x，得

$$\begin{cases}5y+z=24 & ④\\ 4y+8z=39 & ⑤\end{cases}$$

(2) 用式 ④y 的系数偏乘 ⑤ 式并直除 ④ 式，直至消去 y，得

$$4z=11 \quad ⑥$$

(3) 用 ⑥ 式 z 的系数偏乘 ④ 式并直除 ⑥ 式，得

$$4y=17 \quad ⑦$$

(4) 用 ⑥ 式 z 的系数偏乘 ① 式并直除 ⑥ 式和 ⑦ 式，得

$$4x=37 \quad ⑧$$

(5) 从 ⑥、⑦、⑧ 得

$$x=9\frac{1}{4}$$

$$y=4\frac{1}{4}$$

$$z=2\frac{3}{4}$$

方程术是指各项均为正数并且在消元过程中得到的同解方程也不会出现负数项的方程组的造法和解法，其中造法仅限于按题意就可以直接列出方程式，如第1、第7题；解法仅限于直除法(多次相减进行消元)，如第1、第2、第7、第9、第10、第11等题.从历史发展的顺序来看，最先出现的是系数为正并且在消元过程中也不会出现负数项的方程组，其立法与解法就是方程术；含有负数项的方程组和正负术是在上述方程组的基础上发展起来的.这一点，《九章算术》的编者是明确加以区分的，他不仅把方程术放在方程章之首，把正负术放在方程术之后，而且对有负数项或系数虽全为正但在消元过程中出现负

数项的题目，其术文必注明"以正负术入之". 刘徽在方程术注中也指出："用算繁而不省，所以别为法，约也. 然犹不如自用其旧，广异法也." 这里的旧法就是指方程术. 前面已经提到，郑玄注解《周礼》"九数" 引用郑众的话，十分肯定方程是属于"九数" 之一，因此我们认为方程术可能在春秋战国时代就出现了.

对于方程术，刘徽作了两项十分重要的注解：

(1) 对两个方程式进行直除. 刘徽注解说："为术之意，令少行减多行，反复相减，则头位必先尽. 上无一位则此行亦阙一物矣. 然而举率以相减，不害余数之课." 刘徽在定义中已提出"令每行为率"，所以"举率以相减" 是指行与行相减，也就是两个方程式相减. 反复相减的目的是达到消元，反复相减的理论根据是承认加减法的等量公理. 以"每行为率" 的两个方程式相减，所得到的新方程式必然是原来两个方程式的同解方程式，因此"不害余数之课".

(2) 对用某方程式某一未知量的系数偏乘另一方程式. 刘徽注解说："先令右行上禾乘中行，为齐同之意. 为齐同者谓中行直减右行也. 从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣." 前面已经提到，刘徽曾用齐同的理论注解方田章的合分术(分数加法). 在方程章第 7 题中，刘徽又提出用齐同理论注解互乘相消法. 原题是："今有牛五、羊二，直金十两. 牛二、羊五直金八两. 问牛羊各直金几何?" 设 x 为一牛直金，y 为一羊直金，依题意得

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10 & ⑨ \\ 2x + 5y = 8 & ⑩ \end{cases}$$

刘徽注解说："假令为同齐，头位为牛，当相乘左右行定. 更置右行牛十、羊四，直金二十两；左行，牛十、羊二十五，直金四十两. 牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也. 以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也. 以选推大，虽四、五行不异也." 也就是说，用 ⑨ 式 x 的系数偏乘 ⑩ 式，用 ⑩ 式 x 的系数偏乘 ⑨ 式，得

$$\begin{cases} 10x + 4y = 20 & ⑪ \\ 10x + 25y = 40 & ⑫ \end{cases}$$

⑫ 式减 ⑪ 式，即得

$$21y = 20$$

系数互乘称为同，同是为了相减时消去未知量；系数偏乘称为齐，齐是为了使方程式不失本率. 刘徽正是用这种齐同理论来注解直除法的偏乘的. 仅用某一方程式某一未知量的系数偏乘另一方程式，虽然只做到齐而没有做到同，但在直除时反复相减的次数恰为被乘方程式中同一未知量的系数. 因此反复相减，实际上与用该系数偏乘与之相减的方程式然后相减是一样的. 所以刘徽说："从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣."

显然，偏乘的理论依据是"每行为率" 中所承认的乘除法的等量公理.

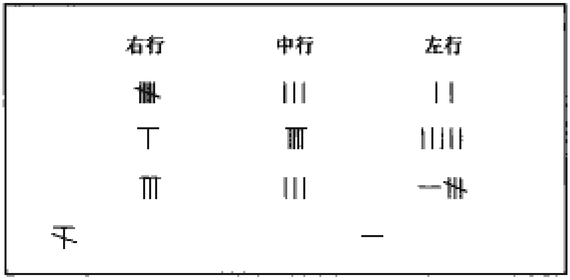
3　损益术

损益术是指建立方程式的方法. 在汉代，既没有表示未知量的符号，也没有把各项联

系起来的加减号与等号. 方程组中不同的未知量依靠该未知量系数的位置来表示,放在每一行的上面,常数项放在每一行的下面. 例如第 8 题的方程组

$$\begin{cases}2x+5y-13z=1\ 000 & ①\\ 3x-9y+3z=0 & ②\\ -5x+6y+8z=-600 & ③\end{cases}$$

《九章算术》表示为



其中正数用红色算筹或正筹表示,负数用黑色算筹或斜筹表示(上图采用宋元数学家用斜画表示负数). 在建立方程式的过程中,一般说来,用方程术不可能直接得到上面的形式,往往要经过损益术或其他方法才能完成. 例如第 2 题:“今有上禾七秉,损实一斗,益之下禾二秉,而实一十斗. 下禾八秉,益实一斗,与上禾二秉,而实一十斗. 问上、下禾实一秉各几何?”“术曰:如方程. 损之曰益,益之曰损. 损实一斗者,其实过一十斗也. 益实一斗者,其实不满一十斗也.” 刘徽注说:“‘损之曰益’,言损一斗余当一十斗,今欲全其实,当加所损也. ‘益之曰损’,言益实一斗乃满一十斗,今欲知本实,当减所加即得.” 设 x 为上禾一秉之实,y 为下禾一秉之实. “如方程” 得

$$\begin{cases}(7x-1)+2y=10 & ④\\ 2x+(8y+1)=10 & ⑤\end{cases}$$

④ 式“左损右益”,⑤ 式“左益右损” 后得

$$\begin{cases}7x+2y=11 & ⑥\\ 2x+8y=9 & ⑦\end{cases}$$

这种损益术不仅适用于常数项,同时也适用于未知量项. 例如第 11 题:“今有二马、一牛价过一万,如半马之价. 一马、二牛价不满一万,如半牛之价. 问牛、马价各几何?” 设 x 为马价,y 为牛价. “如方程” 得

$$\begin{cases}(2x+y)-10\ 000=\dfrac{x}{2} & ⑧\\ 10\ 000-(x+2y)=\dfrac{y}{2} & ⑨\end{cases}$$

“损益之” 得

$$\begin{cases}\frac{3}{2}x + y = 10\,000 & ⑩\\ x + \frac{5}{2}y = 10\,000 & ⑪\end{cases}$$

"通分内子"得

$$\begin{cases}3x + 2y = 20\,000 & ⑫\\ 2x + 5y = 20\,000 & ⑬\end{cases}$$

对系数为分数的方程组化为整系数的方程组,《九章算术》亦称为"损益之".例如第10题:"今有甲、乙二人持钱不知其数.甲得乙半而钱五十,乙得甲大半而亦钱五十.问甲、乙持钱各几何?"设 x 为甲持钱数,y 为乙持钱数."如方程"得

$$\begin{cases}x + \frac{y}{2} = 50 & ⑭\\ \frac{2}{3}x + y = 50 & ⑮\end{cases}$$

"损益之"得

$$\begin{cases}2x + y = 100 & ⑯\\ 2x + 3y = 150 & ⑰\end{cases}$$

损益术的理论依据是加减法的等量公理,化分数系数方程组为整系数方程组的理论依据是乘除法的等量公理.如果把等式两边同时扩大若干倍看成方程式两边自身相加若干次,当然也是相通的.

由此可见,损益术主要是解决建立方程式时的移项问题.刘徽在第4题注解中针对损益术指出:"故互其算,令相折除.""互其算"就是加法与减法互换,具体地说,等式左边的负项可以用右式的正项"令相拆除".这就包含有直接移项的意思了.

4　正负术

正负术出现在《九章算术》方程章第3题:"今有上禾二秉,中禾三秉,下禾四秉,实皆不满斗.上取中,中取下,下取上各一秉而实满斗.问上、中、下禾实一秉各几何?"

"术曰:如方程,各置所取,以正负术人之."

"正负术曰:同名相除,异名相益,正无人负之,负无人正之.其异名相除,同名相益,正无人正之,负无人负之."

设 x 为上禾一秉之实,y 为中禾一秉之实,z 为下禾一秉之实."如方程,各置所取"得

$$\begin{cases}2x + y = 1 & ①\\ 3y + z = 1 & ②\\ x + 4z = 1 & ③\end{cases}$$

系数虽全为正,但在消元过程中必然出现负数项,故言"以正负术人之".在《九章算术》方程章中,凡是方程组出现负数项或方程组虽没有负数项但在消元过程中得到的同解方程式出现负数项时,术文就一定写明"以正负术人之",毫不例外.前者如第4、第5、第6、

第 8、第 15 等题，后者如第 3、第 12、第 13、第 14、第 16、第 17、第 18 等题. 迄今为止，一般数学史论文和著作，都是把正负术看做是正负数的加减运算法则，含有负数项的方程组是用方程术加上正负数加减运算法则解决的. 这种看法值得商榷.

我认为：方程术与正负术同为线性方程组的解法. 方程术是旧术，它只能解各项系数均为正并在消元过程中也不会出现负项的方程组；正负术是在方程术的基础上发展起来的求解含有负项或虽不含负项但在消元过程中出现负项的方程组的新方法，它包括了方程术，同时也与正负数的加减运算法则相吻合. 理由如下：

(1)《九章算术》的术文都是针对解题而作. 方程章第 3 题有两条术文，这两条术文都是为解有负项的方程组，这是毫无疑问的. 问题的关键是对"如方程"三字如何解释. 过去一般数学史家都认为"如方程"是指整个方程术，由于方程术不能解含有负项的方程组，需要加上正负术，因此正负术就成了正负数加减运算法则. 我认为，"如方程"不是指整个方程术，而是指方程术中建立方程组的方法，具体地说，就是指按照方程术建立方程组的方法得到的方程组. 用这种方法得到的方程组，有的可以完全定型，如第 1、第 7、第 13、第 16、第 17、第 18 等题，但一般来说是不能定型的，需要用损益术或别的方法加以处理，才能得到定型的方程组. 上述各题外的其他题目都是属于这种情况，因此在"如方程"以后，往往要讲述建立定型方程组的方法. 在得到定型的方程组以后，如纯属正数项的方程组，就不宜若照，理所当然地用方程术中的直除法求解；如属有负数项或虽全为正数项但在消元过程中出现负数项的方程组，就必须用正负术解.

(2) 从正负术的术文来看，理解为方程组的解法比理解为正负数加减运算法则更自然、更合理一些. 古代解方程组时，一般要消去的未知量都是放在方程式的首位. 因此首位系数同为正，或同为负时采用减法消元，这就是术文的第一段"同名相除，异名相益，正无人负之，负无人正之". 首位系数一正一负时采用加法消元，这就是术文的第二段"异名相除，同名相益，正无人正之，负无人负之". 刘徽在第一段术文注解指出："此为以赤除赤，以黑除黑，行求相减者，为去头位也. 然则头位同名者当用此条，头位异名者当用下条." 两个方程式相减或相加时，是同类项相减或相加，如果其中一方程式缺少一项或数项，便出现没有与之相减或相加的对应项，这便称为"无人"，刘徽把"无人"解作"无对"，就是无对应项的意思. "正无人负之，负无人正之"是被减方程式缺项时的减法法则，即 $0-(+a)=-a, 0-(-a)=+a$；"正无人正之，负无人负之"是两相加方程式中任一方程式缺项时的加法法则，即 $0+(\pm a)=\pm a, (\pm a)+0=\pm a$. 这样解释是非常自然的. 如果把这两段术文看做纯数字的加减法运算，解释就比较勉强.

(3) 方程术中的直除法只有减法消元，没有加法消元. 因此，用方程术加上正负数加减运算法则，在不了解方程式各项可以同时变号以前，只能解首位系数同时为正或同时为负的方程组，不能解首位系数一正一负的方程组.《九章算术》方程章第 5、第 6、第 8、第 15 等题，就是首位系数一正一负的方程组，术文都明确指出"以正负术入之"，用的显然是正负术中加法消元的法则. 例如第 15 题："今有甲禾二秉、乙禾三秉、丙禾四秉，重皆过于石. 甲二重如乙一，乙三重如丙一，丙四重如甲一. 问甲、乙、丙禾一秉各重几何?""术曰：如方程，置重过于石之物为负. 以正负术入之." 设 x 为甲禾一秉重，y 为乙禾一秉重，z 为

丙禾一秉重,按术文得

$$\begin{cases}2x-y=1 & ④\\ 3y-z=1 & ⑤\\ -x+4z=1 & ⑥\end{cases}$$

对"以正负入之",刘徽注释说:"此入头位异名相除者,正无入正之,负无入负之也."

(4) 从正负术的文字安排来看,第一段把"同名相除"放在前面,第二段把"异名相除"放在前面,目的十分清楚,都是为了达到消元,也就是说,两个方程式的首项系数"同名"时,就用减法消元,其首项系数"异名"时,就用加法消元.强调的是相除,因为只有相除,才能达到消元的目的.如纯是正负数加减运算,那么强调的应是符号,即第一段首句为"同名相除"时,第二段首句应为"同名相益",才是顺理成章.刘洪在《乾象历》(206年)提出的加减运算法则,可以作为旁证(见下面正负数的定义).这虽属枝节问题,但也在一定程度上反映出《九章算术》编者的思想.

刘徽对正负术的注解,除上述提及的以外,主要有下列三点:

(1) 正负数的定义.刘徽在方程章第3题正负术注说:"今两算得失相反,要令正负以名之."这是一个比较科学的定义.

《九章算术》方程章虽有正负数运算法则,但从未对正负数下过定义.与《九章算术》大约同时的后汉《四分历》(85年)在计算太阳视位置的度数中规定强为正,弱为负.刘洪《乾象历》(206年)也沿袭了这一规定,即弱:$0-\frac{1}{12}$,少弱:$\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$,半弱:$\frac{2}{4}-\frac{1}{12}$,太弱:$\frac{3}{4}-\frac{1}{12}$;强:$0+\frac{1}{12}$,少强:$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$,半强:$\frac{2}{4}+\frac{1}{12}$,太强:$\frac{3}{4}+\frac{1}{12}$.其加减运算法则是:"强弱相并,同名相从,异名相消;其相减也,同名相消,异名从之.无对互之."[1]与《九章算术》的正负术基本一致.但十分明显,《乾象历》与印度的正负概念一样,是以一般的增加与减少,强与弱,放债与负债等作为正与负的内涵.刘徽完全摆脱了这种对正负概念的一般性认识,他把正与负看成是"得失相反"的"两算",这就是说,如果把增加、强、放债等看做正,那么与之相反的减少、弱、负债等便是负;反过来说,如果把增加、强、放债等看做负,那么与之相反的减少、弱、负债便是正.

628年,印度婆罗门笈多(Brahmagupta, 598—?)承认负数是二次方程的根,这是一个很大的成就,但他认为负的概念是负债的意思.[2]1629年荷兰日拉尔(A. Girard,约1590—1633)在解几何问题时用到负数.[3]比日拉尔晚的笛卡尔(Descartes,1596—1650)的负数概念比较清楚[4],但已在刘徽以后1300多年了.

(2) 正负术的产生.一般说来,正负数运算法则产生于社会实践与科学实验,这是没有问题的,例如上面提到的《乾象历》中的正负数运算法则,就是来自历法计算与天文测

① 严敦杰."我国正负数的历史",《数学通报》,1960,1.

② F. Cajori: A History of Mathematics, 1919:94.

③ 同上,第156页.

④ 同上,第178-179页.

量的需要.但是,像《九章算术》所记载的正负术就是来自系数全为正数的方程组的解法(即方程术).刘徽指出:“方程自有赤黑相取,左右数相推求之术.而其并减之势不得广通,故使赤黑相消夺之.”在正负术出现以前已经存在系数全为正的方程组,后来由于实际问题产生的方程组中大多数方程式是有加有减的(“自有赤黑相取”),因此在两个方程式进行消元时(“左右数相推求之术”),如果用原来的方程旧术,就必然出现“并减之势不得广通”,这就是矛盾,数学家为了解决这个矛盾,因而创立了正负术.刘徽认为,正负术来自方程术,它产生于数学理论本身的内部矛盾.前面已经指出,正负术与正负数加减运算法则是吻合的,因此可以推论,正负数加减运算法则产生于系数全为正的线性方程组的解法.如果说《九章算术》方程章的内容可能出现在汉以前,那么从时间上来说,它比后汉《四分历》为早.因此正负数加减运算法则产生于数学理论内部的矛盾就可能比产生于历法计算与天文测量为早.当然,这只是根据现有的文献而作的推测而已.

(3) 正负两算的关系.在消元过程中,两方程式的首项系数为“同名”(同号)时,采用减法法则,“异名”(异号)时,采用加法法则.刘徽在加法消元法则注中说:“此条异名相除为例,故亦与上条互取.凡正负所以记其同异,使二品互相取而已矣.言负者未必负于少,言正者未必正于多,故每一行之中虽复赤黑异算无伤.然则可得使头位常相与异名.此条之实兼通矣.遂以二条反复一率,观其每与下互相取位,则随算而言耳,犹一术也.”在这一段话中,刘徽首先强调正负数是“记其同异”,是“互取”,因此正负术的加法法则与减法法则也是“互取”.在建立方程式时,哪个未知量项取作正,哪个未知量项取作负,是没有限制的.因为取作正的项,其绝对值未必是大的,取作负的项,其绝对值未必是小的.例如:“今有上禾五秉,损实1斗1升,当下禾七秉.”当取上禾 x 为负,下禾 y 为正,则有 $-5x-7y=-11$,下禾虽取作正,但其绝对值未必大,上禾虽取作负,但其绝对值未必小.因此也可以取 x 为正,y 为负,即 $5x-7y=11$.这就是刘徽所说的“故每一行之中虽复赤黑异算无伤”的意思.既然在一个方程式中正负可以同时变号,那么就“可得使头位常相异名”,头位异名,就可以用加法法则.因此减法法则与加法法则在方程式中正负可以同时换号的条件下便完全统一成为一种法则了(犹一术也).

经消元后,最后只剩下一个未知量项和一个常数项时,“赤黑异算无伤”当然仍然适用.在这里,刘徽本来可以推导出正负数的乘法法则和除法法则.然而,他在两个方程式相减时,硬性规定“以少行减多行”,使最后得到的方程式不可能出现负号,因此没有做到这一点,这是十分可惜的.正负数乘除法则直到14世纪初才由著名数学家朱世杰给出.

5 方程新术

这里说的方程新术,是指刘徽所创立的线性方程组解法.过去一般数学史论文和著作都认为互乘相消法是刘徽所创立的方程新术,这是值得商榷的.理由如下:

(1) 直除法本身已含有互乘相消的意义.刘徽已经指出,“以右行上禾偏乘中行而以直除”的方法就有“齐同之意”,而“齐同”就是互乘相消法的同义语.在反复相减的过程中,计算者很容易发现:反复相减的次数恰为偏乘方程式中原首项未知量的系数,当两个

方程式首项未知量的系数相差较大时，反复相减便显得十分累赘. 在这种情况下，人们自然会想到用偏乘方程式中原首项未知量的系数偏乘另一方程式，然后相减. 因此，从直除法过渡到互乘相消法是十分容易的，刘徽不会称它为方程新术.

(2)《九章算术》方程章已有简单的互乘相消法的例子. 这个例子出现在第 9 题："今有五雀、六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻. 一雀一燕交而处，衡适平. 并燕、雀重一斤. 问燕、雀一枚各重几何?""术曰：如方程，交易质之，各重八两." 设 x 为燕一枚重，y 为雀一枚重，据术文得

$$\begin{cases} 4x + y = 8 & ① \\ x + 5y = 8 & ② \end{cases}$$

这个方程组如用直除法求解，就必然出现负项，按照《九章算术》编者的规矩，术文中一定写明"以正负术入之"，但术文中没有这句话. 我们认为，这并不是编者的疏忽，而是可能采用别的算法. 例如用4偏乘 ② 式再减 ① 式，或用5偏乘 ① 式再减 ② 式，都不会出现负项. 如果这一推测不错，那么这就是简单的互乘相消法.

(3) 在刘徽以前可能已有互乘相消法. 本文开首时已经指出，83 年郑众注解"九数"时提到"今有重差、夕桀、勾股"，约与郑众同时的马融(79—166 年) 也提到"今有重差、夕桀"，而"夕桀" 就是"互棄"(即互乘) 的误文.

因此我们认为，刘徽在方程章第 7 题术注中提到的互乘相消法，只能说是现存文献中的最早记录，不能说是刘徽所创.

刘徽明确宣称的方程新术是他把粟米章的今有术和衰分章的衰分术推广到解线性方程组. 这个新方法出现在方程章最后一题："今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五. 问一斗直几何?" 设 x 为麻一斗值，y 为麦一斗值，z 为菽一斗值，u 为荅一斗值，v 为黍一斗值，依题意得

$$\begin{cases} 9x + 7y + 3z + 2u + 5v = 140 & ③ \\ 7x + 6y + 4z + 5u + 3v = 128 & ④ \\ 3x + 5y + 7z + 6u + 4v = 116 & ⑤ \\ 2x + 5y + 3z + 9u + 4v = 112 & ⑥ \\ x + 3y + 2z + 8u + 5v = 95 & ⑦ \end{cases}$$

刘徽用《九章算术》旧法解，即先选择两个方程式(⑤ 式与 ⑥ 式) 相减，使减后 x 项的系数为 1，然后将这个减得的方程式分别和其他四个方程式进行直除，即可消去未知量 x，得到一个新的四元线性方程组. 对新方程组重复上述步骤，便可消去 y，得到一个三元线性方程组. 继续下去，便可得到含有 u 和 v 的二元线性方程组. 再消去 u，便可以求出 v 的值. 再把 v 的值和其他消元后的方法进行直除，即可求出 u, z, y, x 的值. 最后刘徽指出："如此凡用七十七算."

对这个旧的方法，刘徽批评说："其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜

误，曾不知其非，反欲以多为贵. 故其算也，莫不闇于设通而专于一端. 至于此类，苟务其成，然或失之，不可谓要约 …… 世人多以方程为难，或尽布算之象在缀正负而已. 未暇以论其设动无方，斯胶柱调瑟之类." 因此，他"聊复恢演为作新术，著之于此".

刘徽的方程新术是先消去常数项，再消去未知量项，从而求出两个未知量的比率和各个未知量的比率. 他说："令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率. 又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也. 各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也." 在这个题目中，刘徽先求出：

$$x : y = 7 : 4 \qquad ⑧$$

$$y : z = 4 : 3 \qquad ⑨$$

$$z : u = 3 : 5 \qquad ⑩$$

$$u : v = 5 : 6 \qquad ⑪$$

因而得

$$x : y : z : u : v = 7 : 4 : 3 : 5 : 6 \qquad ⑫$$

如果 ⑧ 式的 y 率与 ⑨ 式的 y 率不同(z 率与 u 率也一样)，就称为"不通"，"率不通者齐之"，在此刘徽又一次使用了齐同术.

接着，刘徽提出两个方法：

(1)"更置减行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并以为法. 其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法. 以下实为实. 实如法，即合所问也." 这就是说，在上述方程组中，令 ⑤ 式减 ⑥ 式，得到"减行" 方程式

$$x + 4z - 3u = 4 \qquad ⑬$$

然后根据(10) 式，应用今有术求得

$$z = \frac{3}{7}x$$

$$u = \frac{7}{5}x$$

代入 ⑬ 式得

$$x = 7$$

(2)"其一术曰：置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各以其率乘之，并以为法. 其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余为法. 以减行下实乘列衰，各自为实. 实如法而一，即得."

衰分章衰分术的公式是

$$\text{所求数} = \frac{\text{所分} \times \text{列衰}}{\text{副并}}$$

这相当于已知

$$\begin{cases} x : y : z = a : b : c \\ x + y + z = d \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{ad}{a + b + c}$$

$$y = \frac{bd}{a + b + c}$$

$$z = \frac{cd}{a + b + c}$$

刘徽把它推广为：

已知

$$\begin{cases} x : y : z : u : v = a : b : c : d : e \\ fx + gy + hz + iu + jv = k \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{ak}{fa + gb + hc + id + je}$$

$$y = \frac{bk}{fa + gb + hc + id + je}$$

$$z = \frac{ck}{fa + gb + hc + id + je}$$

$$u = \frac{dk}{fa + gb + hc + id + je}$$

$$v = \frac{ek}{fa + gb + hc + id + je}$$

根据 ⑫ 式与 ⑬ 式，代入即得

$$x = \frac{7 \times 4}{1 \times 7 + 4 \times 3 - 3 \times 5} = 7$$

$$z = \frac{3 \times 4}{1 \times 7 + 4 \times 3 - 3 \times 5} = 3$$

$$u = \frac{5 \times 4}{1 \times 7 + 4 \times 3 - 3 \times 5} = 5$$

刘徽的方程新术，在方法上是有创新的．但在求解两未知量的比率时，并不比旧法的消元过程简单．因此他批评当时数学工作者"膠柱调瑟"虽然言之有理，但说他们"好烦而喜误"、"以多为贵"，似乎有些言过其实了．

6　开方术

在中国古代，开方术不仅是指一个数的开平方、开立方以及开其他次方，而且包括数字高次方程求正根的方法，从《九章算术》开始便是这样．不过在《九章算术》中，前者只限于开平方和开立方，后者只限于数字二次方程求正根．

对于开平方和开立方，刘徽在他的注解中首先提出用正方形的面积图形和正方体的体积图形来说明它的道理．详见钱宝琮《中国数学史话》[①]．

对于数字二次方程的立法，刘徽认为亦应给以理论的证明．这里以《九章算术》勾股章第 20 题为例："今有邑方不知大小，各中开门．出北门二十步有木．出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木．问邑方几何？""术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实．并出南门步数为从法，开方除之，即邑方．"设 x 为邑方，根据术文得

$$x^2 + (20 + 14)x = 2 \times 20 \times 1\ 775$$

① 钱宝琮．中国数学史话．中国青年出版社，1957：54-58．

刘徽注给出两个证明：

(1)"此以折而西行为股，自木至邑南十四步为勾，以出北门二十步为勾率，北门至西隅为股率，即半广数.故以出北门勾率乘西行股，得半广股率乘勾之幂.然此幂居西半.故又倍之合东半以尽之也."

如图1，股 = 1 775，勾 = 20 + 14 + x，股率 = $\frac{x}{2}$，勾率 = 20，根据勾中容横等于股中容直定理得

$$勾率 \times 股 = 股率 \times 勾$$

$$(20 + 14 + x) \times \frac{x}{2} = 20 \times 1\ 775$$

$$x^2 + (20 + 14)x = 2 \times 20 \times 1\ 775$$

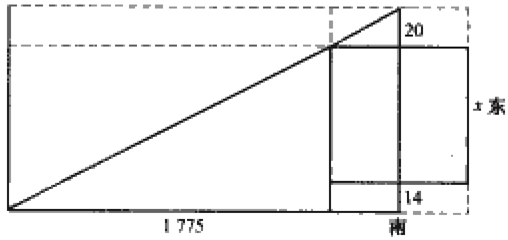


图1

(2)"此术之幂，东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤.合南北步数为广袤差，故并两步数为从法.以为隅外之幂也."这就是说，x 为广，$(20 + 14 + x)$ 为袤，广袤差 = 20 + 14，故有

$$x^2 + (20 + 14)x = 广袤积$$

根据勾中容横等于股中容直定理得

$$广袤积 = 2 \times 20 \times 1\ 775(隅外之幂)$$

故得

$$x^2 + (20 + 14)x = 2 \times 20 \times 1\ 775$$

类似刘徽对数字二次方程立法的证明，可以在赵爽的"勾股圆方图注"中见到.这种证明，实为后来宋元数学家的演段算法的嚆矢.

刘徽的方程理论与勾股理论、体积理论、极限理论等其他理论不同，证明和逻辑推理都比较少，更多的是定义和方程组解法所依据的理论基础.从方程和正负数的定义以及方程术和正负术的论述中，我们可以见到，他的方程理论在抽象性、一般性与严谨性方面，毫不比其他理论逊色.

从华罗庚教授研究过的一个数学魔术谈起

邵剑波[①]

在20多年前，世界上有很多著名媒体都报道过印度妇女沙昆塔拉的魔术的计算能力，她仅用50秒钟就算出了一个201位数的23次方根，胜过当时最先进的计算机，华罗庚教授知道此事后对其进行了剖析与研究，用科学揭开了其中部分的神秘与迷惑，值得我们学习.当然这个问题很难，我们现在来谈较简单的一些问题，其中的问题1与问题2曾给小学和中学的同学介绍过，大多数同学对这种数学魔术表示出极大的兴趣，有几个同学为了找到其中的奥秘将11到99的立方数值整齐地写在纸上，这样的探索精神正是我们要提倡的.事实说明这个引人入胜的数学魔术是培养创新能力的一份好材料，也是一个研究性学习的好课题，建议大家先向学生表演一下，再逐步提出问题，让学生自己探索，教师作适当的指导，完成时间大体控制在一周至二周，也允许学生合作完成，计算机、计算器、常用数表都可以使用，总之不拘一格.

在文[1]、[2]中都提及如下问题：

问题1 甲让乙任意想一个两位数，然后算出其立方，甲根据算出的结果可以迅速推知原来的两位数.问甲用的是什么方法?

解 先记住以下立方数

$$1^3=1,2^3=8,3^3=27,4^3=64,5^3=125,6^3=216,7^3=343,8^3=512,9^3=729$$

并且要注意1,4,5,6,9立方后末位数不变，而3,7是互换，2,8也是互换.

这样根据所给六位数(五位数时前面补上0也理解为六位数，下同)的前三位可确定所求两位数的十位，六位数的末位确定所求两位数的个位.例如238 328的前三位238介于216与343之间，所以所求两位数的十位是6，而238 328的末位数是8须互换成2，于是此两位数是62.

仿上笔者提出了如下问题：

问题2 将问题1中的立方改为平方.

解 众所周知

$$1^2=1,2^2=4,3^2=9,4^2=16,5^2=25,6^2=36,7^2=49,8^2=64,9^2=81$$

根据所给四位数的前两位可以确定所求两位数的十位，但由于1与9,2与8,3与7,4与6,平方后个位数相同，这样还要在两者之中选择一个，我们用它们的平均数作界限来确定

---

① 浙江省宁波市甬江职高综合高中部，315010.

之,例如5 476,由54推得7,由5 476的6推得6或4,易知$75^2=5\ 625$,因$5\ 476<5\ 625$,故所求两位数为74而非76.

问题3 将问题1中的两位数改为三位数.

分析 仿照问题1的解法我们容易确定三位数的百位与个位,难在十位的确定,例如494 913 671的前三位介于343与512之间,故百位为7,个位为1.当所给九位数的末位数是0,1,3,7,9时,我们凭几句口诀可以迅速解决此问题,另外情形要稍作笔算,若允许借助计算器作除法,则运算速度极快.

解 (1)当九位数的个位是0时,必定末三位都是0,从而问题3划归为问题1而获解决.

(2)当九位数的个位是1时,根据立方表(或用同余知识)观察到九位数的十位与三位数的十位之间有非常有趣的一一对应规律,即

$$01\to 01,11\to 71,21\to 41,31\to 11,41\to 81$$

$$51\to 51,61\to 21,71\to 91,81\to 61,91\to 31$$

我们把以上对应关系总结为:"1,一次到位乘以7,只取余数放中间."例如41中的4乘以7后为28,只取以10为模的余数8,从而对应81,以374 805 361为例,我们看一下完整的过程,因为$343<374<512$,所以百位为7,个位为1,由6得$6\times 7=42\equiv 2 \pmod{10}$,只取余数2放中间,从而得721.

(3)当九位数的个位是3时,类似地有

$$03\to 87,13\to 17,23\to 47,33\to 77,43\to 07$$

$$53\to 37,63\to 67,73\to 97,83\to 27,93\to 57$$

我们总结为:"3,3倍加8取其余,3要换7勿忘记."以506 261 573为例,因为$343<506<512$,所以百位为7,个位为7,由十位的7得$7\times 3+8=29\equiv 9 \pmod{10}$,只取余数9放中间,从而得797.

(4)当九位数的个位是7时,类似地有

$$07\to 43,17\to 73,27\to 03,37\to 33,47\to 63$$

$$57\to 93,67\to 23,77\to 53,87\to 83,97\to 13$$

我们总结为:"7,7前3倍再加4,7要换3不可遗."以11 089 567为例,因为$8<11<27$,所以百位为2,个位为3,由十位的6得$6\times 3+4=22\equiv 2 \pmod{10}$,只取余数2放中间,从而得223.

(5)当九位数的个位是9时,类似地有

$$09\to 69,19\to 39,29\to 09,39\to 79,49\to 49$$

$$59\to 19,69\to 89,79\to 59,89\to 29,99\to 99$$

我们总结为:"9,9前7倍再加6,取余置中9不变."

(6)当九位数的个位是5时,我们改用另外策略,总结为:"先乘8后除2."以955 671 625为例,由$955\ 671\ 625\times 8=7\ 645\ 373\ 000$,因为$1<7<8$,所以千位为1,对73中的7,我们有$7\times 3+8=29\equiv 9 \pmod{10}$,从而得1 970,最后$1\ 970\div 2=985$为所求.有时候一次乘8不解决问题,还需要再乘一次,但最多乘两次,这是因为此时实质问题转

化成了问题 1，我们用问题 1 的解法处理即可，此时口诀为："乘 8 两次要除 4." 以 926 859 375 为例，由 $926\ 859\ 375\times 8=7\ 414\ 875\ 000$，再乘 8 得到 59 319 000 000，由上得 $3\ 900\div 4=975$ 为所求.

(7) 当九位数的个位是 2,4,6,8 时，解决的方法有两种.

方法一："先除 8 后乘 2"，但有时这个过程可能需要重复四次，好在只是个位数的除法，运算尚不算麻烦，而且碰到的概率很小. 以 976 191 488 为例，第一次除 8 得 122 023 936，第二次除 8 得 15 252 992，第三次除 8 得 1 906 624，第四次除 8 得 238 328，后者是 62 的立方，所以所求数为 $62\times 2\times 2\times 2\times 2=992$.

方法二：

1) 当九位数的个位是 2 时，有以下对应规律

12 → 08,58　　32 → 68,18　　52 → 28,78　　72 → 88,38　　92 → 48,98

以上第二列与第三列之间的十位数相差 5，所以只要找到第一列与第三列之间的对应关系即可，我们总结为："2,2 前乘 3 再加 2." 例如对 72 得 $7\times 3+2=23\equiv 3 \pmod{10}$，这样对应 38 或 88. 那么两者之中如何取一舍一呢？对此我们仿照问题 2 的解法，但是要记住以下数据

$$15^3=3\ 375, 25^3=15\ 625, 35^3=42\ 875, 45^3=91\ 125, 55^3=166\ 375$$
$$65^3=274\ 625, 75^3=421\ 875, 85^3=614\ 125, 95^3=857\ 375$$

记住以下近似值或许方便一些

$$150^3\approx 3\times 10^6, 250^3\approx 15\times 10^6, 350^3\approx 42\times 10^6, 450^3\approx 91\times 10^6, 550^3\approx 166\times 10^6$$
$$650^3\approx 274\times 10^6, 750^3\approx 421\times 10^6, 850^3\approx 614\times 10^6, 950^3\approx 857\times 10^6$$

例如对于 236 029 032，我们得 618 与 668，但 $650^3\approx 274\times 10^6$，故所求者应该是 618.

2) 当九位数的个位是 4 时，有以下对应规律

04 → 34,84　　24 → 74,24　　44 → 14,64　　64 → 54,04　　84 → 94,44

我们总结为："4,4 前乘 7 再加 8." 例如对于 30 959 144，我们得 314 与 364，但 $350^3\approx 42\times 10^6$，故所求者应该是 314.

3) 当九位数的个位是 6 时，有以下对应规律

16 → 06,56　　36 → 46,96　　56 → 86,36　　76 → 26,76　　96 → 66,16

我们总结为："6,6 前 2 倍再加 3." 例如对于 282 300 416，我们得 606 与 656，但 $650^3\approx 274\times 10^6$，故所求者应该是 656.

4) 当九位数的个位是 8 时，有以下对应规律

08 → 02,52　　28 → 62,12　　48 → 22,72　　68 → 82,32　　88 → 42,92

我们总结为："8,8 前折半即可用." 例如对于 55 742 968，我们得 332 与 382，但 $350^3\approx 42\times 10^6$，故所求者应该是 382.

问题 4　今有一架计算器，可进行十位数之内的运算，甲让乙任意想一个三位数，并让乙在计算器上求出它的立方然后交给甲，甲只多使用计算器上的除法功能便能算出它的立方根即原先的三位数，问甲用的是什么方法？

解　当所给九位数的个位是 0,1,3,7,9 时还是用问题 3 中的解法. 当个位数是 5 时

应除以125,这个过程有时需两次,然后用问题1的解法,或个位是1,3,7,9时的解法求出它的立方根,再乘以5(或许要乘两次).

当个位是2,4,6,8时,我们用前述的方案一:"先除8后乘2",这个过程至多做四次即可解决.

说明 如果计算器只能限于八位数的运算,则所给三位数不能超过464,但这并没有质的区别.

参考文献

[1] 华罗庚.华罗庚科普著作选集[M].上海:上海教育出版社,1984.

[2] 谈祥柏.数学:上帝的宠物[M].上海:上海教育出版社,1996.

编后语 社会学家郑也夫指出:"文化与科学同游戏有着两点相似之处.其一,前者中的相当多的成员同做游戏的人一样,是因兴趣的驱使,而非对功利的追求;其二,文化与科学中相当大的组成部分,眼下没有实际用途,什么时候才能转化为物质利益殊难预料,也可能是一千年,也可能永远无用.它们远离功利和效益,真像一种游戏,或者是游戏的成果."

邵剑波先生的这篇研究数学魔术的文章着眼于激发学生学习数学的兴趣,值得提倡.对于例题的堆砌,方法的罗列,技巧的展示,我们已经烦了,厌了,倦了!

游戏在数学教育中的作用[①]

王幼军[②]

根据统计,刚入小学的学生几乎都喜欢数学,本能的好奇心是学生最大的学习动力.他们根据观察、实验等各种方法创造性地理解、学习数学.然而,随着年龄的增长,许多学生的数学学习的动力会逐渐减弱,他们对于数学的态度往往是渐渐地由热忱变为冷漠,由自信变为害怕,由主动变为被动,甚至完全放弃.这一现象的产生是值得我们数学教育工作者关注与反思的.考察产生这一变化的原因,我们有很多发现.如我们的文化过高地评价那些急功近利的活动,而相对孤立的安静的思维活动,特别是数学思维却由于不能看到直接的利益而为人所轻视.但是,这种现象形成的最直接的原因则来自于人们在学校所接受的数学教育的影响.当前学校数学教育大大地忽略了数学中生动有趣的游戏因素,而使数学活动过早地带上一个拒人于千里之外的形式化不足而严肃性有余的面罩.因此,从这个角度来说,探索游戏对于数学教育的作用和意义是非常必要的,而对于这个问题的探讨则必须首先从数学与游戏的关系谈起.

1 数学与游戏的关系

游戏是一个广泛的概念,它包括任何一种旨在消遣时光或寻求娱乐的活动.而数学则是带有艺术风度的智力工作,同时是具有巨大的实用价值的科学.数学总是和逻辑在一起,因为严谨和认真是人们对数学的一种追求,游戏与数学似乎是风马牛不相及的事情,它们至多也只是作为"智力的体操"方面的相似而已.然而,事实上情况并非那么简单.考察一下数学与游戏的关系,我们发现游戏与数学的关系是相互渗透、相互统一的关系,这种统一主要体现在它们的性质、结构的形式以及实践三个方面.

首先,数学与游戏作为两项人类活动具有许多共同的性质.有人曾经对此进行了深入的分析.例如,两种活动本身是为了锻炼,而不是为了从中获取利益;两者在人类的发展中起着一定的作用,像丰富情感、获得知识、发展智力和能力,从而为将来的竞争和生活做准备,体验解放、回避和放松、满足好奇心等感觉.在深思熟虑、实施以及取得成功的过程中能够得到巨大的乐趣;在两者的空间里都可以创造一种新秩序和充满和谐韵律的

---

① 本文摘自《汉字文化圈数学传统与数学教育》,科学出版社.

② 上海交通大学科学史系,上海,200240.

世界;两种活动都需要有自己独立的时间和空间等.

其次,数学与游戏的系统结构也有共同的形式.数学具有演绎体系或称为公理化系统,这种系统由不加定义的概念(原始概念),不加证明的命题(公理)组成.其中原始概念的含义由公理体现出来.任何游戏在一开始都是介绍一些对象或部件,一系列的规则,这些对象或部件的作用由那些规则所决定.两者的相似是显然的,它们的差异只是叫法不同而已,数学中的不加定义的概念对应着游戏中的对象或部件,公理对应着游戏的规则,数学中的定理则对应着游戏过程中的每一状态.两个系统中都有"定义",也都有"证明".文献[3]给出了游戏与数学系统相对应的几个典型例子.正是由于数学与游戏的形式结构的相似,20世纪初数学哲学中形式主义学派的代表人物希尔伯特提出一个极端的观点:"数学是根据某些简单规则使用毫无意义的符号在纸上进行的游戏."

最后,数学与游戏的实践也有共同的特征.任何人在开始做游戏时,都必须对它的规则有一定的了解,将各部件的相互联系弄清楚,就像数学的初学者那样,用同样的方法比较并建立该理论中的基本元素之间的相互作用,这些就是游戏和数学理论的基本练习.无论在数学中还是在游戏中,较深层次的、更复杂的步骤和策略的运用都需要特殊的洞察力.在玩高级游戏的过程中,总是有问题出现,人们总想要在从未探索过的游戏情境中用首创的方法来解决,这对应于数学理论中未解决的问题的研究.在创造新游戏的过程中,需要设计情境,给出新颖的策略和创造性的游戏方式.将其与创立新的数学理论相类比的话,就相当于提出新颖的思想和方法,并将之应用于其他未解决的问题,从而更深刻地揭示现实生活中某些至今尚不明了的真理.

因此,从广义上来讲,可以说数学是一种游戏,只不过这种游戏要涉及科学、哲学、艺术等更广泛的人类文化范围.从狭义上说,数学中的游戏是指那些具有娱乐和消遣性质的并带有数学因素的游戏和智力问题.正是由于数学与游戏之间的共性,许多问题和内容很难说是应归于纯数学研究还是归于有趣的智力游戏;更难于区分人们对于数学的兴趣是由于数学中的游戏因素,还是由于数学的其他因素.总之,数学中有游戏的精神,游戏中有数学的思想,要想在两者之间画出一道严格分明的界限是不可能的.

2　游戏在数学教育中的作用

数学与游戏之间相互渗透、相互统一的关系使得游戏对于数学教育具有极大的价值,实际上这一点已被古往今来的数学教育的理论和实践所证明.对此,著名的美国科普作家马丁·加德纳(M. Gardner)曾经做了相当正确的评价:"唤醒学生的最好的办法是向他们提供有吸引力的数学游戏、智力题、魔术、笑话、悖论、打油诗或那些呆板的教师认为无意义而避开的东西."具体说来,游戏在数学教育中的作用主要表现在以下几个方面.

第一,游戏是数学知识大众化的最好手段,这是因为游戏在数学知识的传播和普及中起着非常重要的作用.在数学的历史上,游戏一直伴随在数学教育的普及和数学知识的传播过程中,在人们津津乐道、相互传诵游戏的过程中,也将有关的数学知识和数学思想传送给四面八方的人.例如,成书于公元前1700年的古埃及的阿默士纸草书(也称

Rhind纸草书)是为当时的贵族和祭祀阶层所作的数学普及性的一个问题集,实际上也是一本教科书,其中有些问题是以有趣的歌谣或故事的形式编写而成的,因此流传很广,如第79题关于几何级数的加法问题又演变成"我去圣地爱弗斯"等歌谣流传于欧洲几个国家.以把严谨的公理思想引入数学而著称的欧几里得也在已经失传的一本名为《纠错集》(《Pseudaria》)的书中使用了一组有趣的谬论,作为激励他的学生进入正确思维过程的手段.中世纪意大利数学家斐波那契(J. Fibonacci)的《算盘书》是一本广泛流传于欧洲各国的著作,这本书流传的原因除了它的内容实用之外,还因为把数学内容寓于生动有趣的游戏之中,如"兔子繁殖问题"、"蓄水池问题"、"野兔和猎狗"、"七个老妇"等几乎成为家喻户晓、人人皆知的数学游戏,此书唤起了欧洲人对于数学的兴趣和重视,为以后欧洲数学的复兴奠定了基础.在世界各地都曾经流传一些著名的数学游戏,如古代中国的韩信点兵、百鸡问题、七巧板、大衍求一术(该问题被多种数学著作改头换面地采用).古印度的莲花问题、蜜蜂问题……这种以游戏的方式来处理数学的情境的目的就是使数学思想更容易为人们所理解和接受.总之,通过游戏达到数学教育和普及的目的的例子不胜枚举.

从19世纪末期开始,由于游戏在数学知识的普及与传播中的独特的作用被越来越清楚地意识到,关于数学游戏的收集、编造以及解答等方面的研究受到空前地重视,在众多的研究者中,影响最大的是马丁·加德纳的工作,他曾在美国的著名科普杂志《科学美国人》(《Scientific American》)上主持"数学游戏"专栏.他工作的特点是把许多数学思想或知识寓于各种奇妙有趣的故事和问题之中.这些题目初看似乎很难,有时冥思苦索,百思不得其解,但如果放开思路,打破框框,从各种角度去考虑,也许很快就会有所突破,具有"啊哈!灵机一动"的特点.这些妙趣横生的作品使数以百万计的人陶醉于数学乐园之中,这些趣题被汇集成册以各种文字出版多次,其影响广泛而又持久.最近,英国数学家康韦(J. H. Conway)等人在所作的《数学游戏获胜的方法》一书中说:"马丁·加德纳比任何人将更多的数学带给了千百万人."这句话在肯定了马丁·加德纳的贡献的同时,也道破了游戏对于数学传播和普及的有效性.

第二,游戏是数学人才发现的有效途径,游戏是许多数学人才进入数学研究领域的踏脚石.历史上许多数学家正是由于解决了某个游戏难题而发现自己具有数学潜能,从此放弃其他选择而献身数学.一个最典型的例子是高斯对数学的选择.高斯在数学史上是与阿基米得、牛顿等人齐名的数学家,有"数学王子"之称,他填补了古典数学家遗留的许多空白,而又为现代数学开辟了许多意义深远的新道路,高斯成为数学告别过去走向现代的一个象征.这样一位大数学家以数学为职业却是由于在他19岁那年解决了一个长期困扰数学界的、带有游戏色彩的几何作图难题——用尺规做出了一个正十七边形,这一成功使他对自己的数学才能有了更加明确的认识,于是,他毅然放弃自己所喜爱的语言学而投身于数学.另一个例子是著名的法国概率学家西米尔·泊松(S. D. Poisson),他年轻时曾经为找到一个适合自己的职业而大伤脑筋,他的父亲要他学医或法律,但他缺少这方面的欲望.正在苦苦寻觅之时,一道趣题使他意识到自己的兴趣倾向于数学方面.以此为开端,他开始了数学研究生涯.一道游戏趣题成为他一生的转折点.

一般来说许多具有数学潜能的人往往从小表现出对游戏的迷恋和酷爱以及在解决方法上的灵活和机智.所以游戏往往成为检测一个人的数学和推理能力的一个标准.如果说上述例子还不足以说明这一点的话,还可以举出许多涉足过游戏的数学家——对赌博痴迷终生的意大利数学家卡尔达诺;由魔术师成为20世纪有影响力的美国数理统计学家戴康尼斯;从小就以玩游戏出名的英国数学家康韦;此外还有莱布尼茨、伯努利、哈密尔顿、冯·诺伊曼……游戏成为自我检测数学才能的试金石.现在各种数学竞赛中包含许多数学游戏,这种做法实际上也是基于"游戏可用于选拔数学人才"的理念.

第三,游戏是获得数学内容的有效方法之一.游戏之所以具有难以抗拒的魅力的一个很重要的原因是游戏所涉及的问题和内容有趣迷人、浅显易懂.另外又不需要过多的预备知识,只要掌握一般的基本知识,初学者即可登堂入室,理解某一门学科的许多的重要内容.因此数学游戏常被用来作为严肃数学的一种表现方式,使之更易理解和更具趣味.游戏还为不同年龄层次的人提供了这样的机会——通过具体的经验去为今后所必须学习的内容做准备.如折纸的游戏,折纸的对象是一个正方形的纸张,留在正方形的纸张上的折痕揭示出大量几何的对象和性质:相似、轴对称、中心对称、全等、相似形、比例以及类似于几何分形结构的迭代折纸的过程也极具启发性,开始用一个正方形(二维物体)的纸张来折一个立体(三维物体).如果折出了新的东西,那么折纸的人就把这个立体摊开并研究留在正方形纸上的折痕.这个过程包含了维数的变动:一个二维物体到三维物体,又回到二维,这就跟投影几何的领域发生了关系.

第四,游戏与数学结构的相似性保证了游戏对于数学思维的培养,从而使学生更深刻地理解数学的精神.例如,计算机游戏可以发展几何的空间感觉和意识;某些棋类或字母游戏提供了公理系统的体验,从而使游戏成为学生从具体过渡到抽象数学证明的桥梁;通过多米诺骨牌可以得到数学归纳法的直观体验;走迷宫的游戏可使人体验拓扑、逻辑的思想……日本京都教育大学首屋诚司教授的研究还表明可以把诸如曲率、积分、群、子群等近现代抽象的数学思想通过绘图等方式化为"现实的"游戏,让学生学会用数学的思维方式看待事物.通过游戏也会使学生体会到数学的一种精神:数学不是一门一成不变的课程,数学知识也不是绝对的真理,"数学是人类心灵的自由创造".或者说数学思想是人的想象力的创造物.数学世界独立于我们的现实世界,尽管它和现实世界以不可思议的对应联系起来,并成为人类认识自然界和认识人类社会自身的有效工具.这正是数学的奇妙所在.

第五,游戏可以培养正确的数学态度,这一点主要体现在两个方面.一方面,游戏是培养好奇心的有效方法之一,这是由游戏的性质决定的——趣味性强、令人兴奋、具有挑战性等.好奇心又为探索数学现象的奥秘提供了强大的动力.如果学生没有对于这门学科的强烈兴趣和探索未知问题的好奇心,那么数学学习将是一项艰苦而缓慢的工作.许多数学家开始对某一问题做研究时,总带着与小孩子玩新玩具一样的兴致,先是带有好奇的惊讶,在神秘被揭开后又有发现的喜悦.人们从事数学活动就是在进行某种趣味四溢的游戏,数学中的游戏因素给数学带来了无穷的魅力,从而吸引了一代又一代人的目光,大大加速了数学的发展.另一方面,游戏还可以培养学生养成乐于吸取不同的思

路、勇于创造的研究态度.许多研究人员都为游戏和不同思路之间的关系之密切提供了大量的事例.例如,一个小女孩玩积木时,可能会尝试着用不同的组合方法来观察把一块积木放在另一块上面时,摆多少块可以不倒下来.她边玩边对自己的设想进行判断,充分发挥了她的主动性和创造性.并且她还可以用从游戏中所获得的思路和方法去解决其他的问题.玩游戏时所用的不同思路就是在为某种任务或问题寻找解决方案,可以说游戏是最高形式问题研究.爱因斯坦在1954年说过的一句话就指出了这一点:"要获得最终的或逻辑的概念的愿望,也就是玩一场结果不明的游戏的感情基础……这种组合游戏看来就是创造性思维的重要表现形式."所以,在我们注重问题解决能力的培养,强调研究性地学习的今天,游戏无疑是一种非常有效的方法,游戏为我们的教育目标的实现提供了大量的机会.

综上所述,我们可以看到,游戏与数学之间具有特殊的关系,游戏在数学教育中起着重要的作用.所以,从理论上探讨数学与游戏的关系及其游戏的数学教育价值对当今数学教育研究和实践具有深刻的启迪作用和借鉴意义.当然应当指出,由于游戏本身并不是数学的终点,在数学教育中游戏的方法并不能代替一切,但是,如果在正规严肃的教学方法之外把生动活泼的游戏因素掺入教学中去,那么数学教育将会起到事半功倍的效果,这也是游戏的数学教育价值给我们教育工作者的最大启示.

参考文献

[1] MIGUEL DE GUZMAN. 数学与游戏[M]. 唐瑞芬,李士锜,等译. 上海:上海教育出版社,1996.

[2] MCMAIN GARRIN. The Game of Science[M]. 4th Ed. Monterey. Calif: Brooks/Cole Pub. Co. 1982.

[3] GERNES DON. The Rules of the Game. The Matheremadtics Teachers, 1992,5.

[4] THIELE RUDIGER. Mathematical Games[J]. Companion Encyclopedia of the History and Philoso-phy of the Mathematical Sciences, Vol.2,1555-1567.

[5] SINGMASTER DAVID. Recreational Mathematics[J]. Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Vol. 2,1568-1575.

[6] ALBERS DONALD J, ALEXANDERSON G L. Mathematical People[M]. Boston Basel Stuttgart,1985.

编后语 王幼军博士是位女士,是我国科学文化旗帜性人物上海交通大学科学史系主任江晓原指导的第一位博士.女人学数学,自古不易,数学史上有"数学七仙女"之说,仅有希帕蒂娅、索菲·吉尔曼、柯瓦列夫斯卡娅、爱米·诺特等跻身于世界著名数学家行列.在我国的院士中数学仅有胡和生一位女院士.但似乎数学史界近年来打破了男性一统天下的局面,山东教育出版社先后出版了田淼女士的《中国数学的西化历程》和冯绪宁女士的《中国近代代数史简编》,上海交通大学出版社出版了王博士的《拉普拉斯概率理论的历史研究》.鉴于现在青少年沉溺于网络游戏的在增多,故摘编了这篇王博士的大作.

Hilbert 的第十六问题:多少个环?①

C.S.Coleman

"…… 风鸣琴,气锤,车刀刨金属板的声音,风吹旗子的飘动,水龙头不时发出的嗡嗡声;门的吱叫声,四极管多谐振荡器,电容器通过霓虹灯管的间歇放电,传染病和经济危机的间歇发生,两种动物共存、一种以另一种为食物的系统中各种动物密度的周期性变化,花的夜间闭合,低气压后阵雨的间歇出现,冷战,以及心跳 ……"

1 导 言

在上面引语中,Balthazar van der Pol(Phil. Mag, 6(ser. 7)(1928),763-775)把形形色色的现象汇集为一类显示周期振动(或循环)的系统,即使这种振动不是由"周期性的外力"引起的.(无论如何,人们对 van der Pol 的某些系统是感到惊叹的,例如花的夜间闭合确实是由于日夜的周而复始引起的)根据 van der Pol 的见解,这些系统中大多数都可以用下面的一组微分方程来近似地模拟

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

符号 x,y 表示被模拟的主要变量的大小,例如,x 可以认为是通过霓虹灯管电容器的电压,y 为电压变化的速率.或者如 x,y 可以分别表示掠食动物和被食动物的个体密度.不过,我们目前就假定微分方程组($*$)已经给出,而且我们的兴趣就是看它的解族中是否可能有环.

特别,假设 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 对所有的 x 和所有的 y 都是连续可微.我们说函数 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 是方程组($*$)的解,如果以下条件成立:

(1) 函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在一个公共的开区间 I 上有意义.

I:$a < t < b$;a 可以是 $-\infty$,b 可以是 $+\infty$.

(2) 函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 I 上连续可微,对任何 $t \in I$,满足方程组($*$).

---

① Hilbert's 16th problem: How many cycles? 原文系作者为大学高年级学生讲演的讲演稿.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=X(x(t),y(t))\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=Y(x(t),y(t))\end{cases}$$

(3) 不存在定义在某个区间 I^* ($I^* \supset I$,但 $I^* \neq I$) 上的函数 $x^*(t)$ 和 $y^*(t)$,在 I 上分别与 $x(t)$ 和 $y(t)$ 相同,而对 I^* 中的所有的 t 都满足方程组(*).

最后这个条件意味着我们只注意方程组(*)在时间变量 t 上最大延拓的解.例如 $x(t)=e^t$, $-\infty<t<\infty$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ 的解.而 $\tilde{X}(t)=e^t$, $1<t<2$ 不是它的解,因为在时间的区间上显然可以延拓.

方程组(*)的每一个解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 都在 xy 平面上定义一条曲线Γ,称为解的轨线.我们假设,但不予证明:

1) 不重合的两条轨线不相交;

2) 一条轨线或者是不自身相交的曲线,或者是简单闭曲线,或者是单个的点(奇点).

有一个类似的"存在唯一性"定理,如图1所示,箭头表示当 t 增加时轨线的走向.不同的解可能产生同一条轨线,例如 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x$ 有两组解

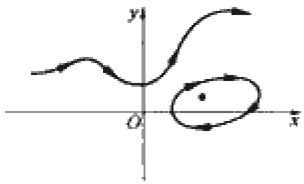


图1 方程组(*)的三种轨线

$$\begin{cases}x_1(t)=\cos t\\ y_1(t)=-\sin t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2(t)=\cos(t-\pi/3)\\ y_2(t)=-\sin(t-\pi/3)\end{cases}$$

它们都定义同一轨线 Γ,即单位圆 $x^2+y^2=1$.

2 环

方程组(*)的一个非常数解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 是一个环(或周期解),如果存在一个正数 T(环的周期),使得对所有的 t 都有

$$X(t+T)=x(t),Y(t+T)=y(t)$$

我们也把 xy 平面上相应的轨线称为环.显然,环是一条简单闭曲线.反之,任何一条简单闭曲线的轨线对应于一个周期解.(这似乎是很明显的,我们略去正式的证明)现在我们给出形如(*)的方程组的几个例子,这些方程组都是有环的.在此,我们要再次强调一下,任何实际出现的环都是由"x-实体"和"y-实体"内部相互作用产生的,而不可能是由于外部周期性变化的根源产生的,这是因为方程组(*)的右边都不是时间的显函数,当然更不是周期函数了.

例1 (无限多个环)方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x \qquad ①$$

的求解并不困难. 例如,对第一个方程微分,再由第二个方程,我们得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=-x$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0 \qquad ②$$

方程 ② 是二阶常系数的常微分方程,它的通解为

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t \qquad ③$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数,利用三角恒等式

$$a\cos\theta+b\sin\theta=A\cos(\theta-\delta)$$

这里

$$A=(a^2+b^2)^{1/2},\quad \cos\delta=a/A,\quad \sin\delta=b/A$$

我们可把 ③ 式简化为

$$x(t)=A\cos(t-\delta) \qquad ④$$

其中 A 和 δ 是任意常数. 于是利用 ① 的第二个方程,① 的任何一个解均可表示为

$$\begin{cases}X=x(t)=A\cos(t-\delta)\\ Y=y(t)=-A\sin(t-\delta)\end{cases} \qquad ⑤$$

A 和 δ 为某个常数. 如果 $A\neq 0$,对应的轨线是一个圆,其半径为 $|A|$,中心在原点(因为有 $x^2(t)+y^2(t)=A$),如图 2 所示. 如果 $A=0$,我们得到奇点(0,0),它也是 ① 的解. 注意 ① 的轨线中,除了一个是奇点外,其余的都是环. 在图 2 中轨线上的箭头表示当时间增大时轨线的走向.

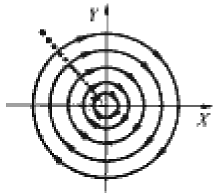


图 2 $\frac{dx}{dy}=y$, $\frac{dy}{dt}=-x$ 的环

方程组(*)的奇点是使得 $X(x_0,y_0)=0$ 和 $Y(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0). 这样的一点确定(*)的一个解,因为

$$\frac{dx_0}{dt}=0=X(x_0,y_0),\quad \frac{dy_0}{dt}=0=Y(x_0,y_0)$$

奇点对于研究方程组(*)的环起着重要的作用,因为任何环的内部至少有一个奇点(证明这个事实相当困难). 例 1 的方程组有一个奇点(因为它有环,故必有奇点). 下面大多数例子也是有奇点的.

例 2 (单环) 用 r 和 θ 表示通常的极坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \qquad ⑥$$

考虑极坐标方程组

$$\begin{cases}\frac{dr}{dt}=r(1-r^2),\quad r\geqslant 0\\ \frac{d\theta}{dt}=1\end{cases} \qquad ⑦$$

首先,用直角坐标 x,y 来表示这个方程组. 由 ⑥ 我们有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (1-r^2)r\cos\theta - r\sin\theta = (1-x^2-y^2)x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (1-r^2)r\sin\theta + r\cos\theta = (1-x^2-y^2)y + x \end{cases} \quad ⑧$$

这里我们用到复合函数的微分法则(如$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$),注意 ⑦ 的任何一个解$(r(t),\theta(t))$给出 ⑧ 的一个解$(x(t),y(t))$.反之,如果利用关系

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}, \quad \tan\theta = y/x \quad ⑨$$

方程组 ⑧ 的一个解也确定 ⑦ 的一个解.方程组 ⑦ 比方程组 ⑧ 更容易求解.事实上我们有

$$r(t) = \frac{r_0}{[r_0^2 + (1-r_0^2)\mathrm{e}^{-2t}]^{1/2}}, \quad r_0 \geqslant 0 \quad ⑩$$

$$\theta(t) = t + \theta_0, \quad \theta_0 \text{ 是任意常数} \quad ⑩'$$

$r(t)$ 的求解留给读者去完成(问题 2),可以对 ⑦ 的第一个方程用变量分离法求出,而 $\theta(t)$ 是直接解 ⑦ 的第二个方程得到的.注意,已经假定 $t=0$ 时,$r=r_0$ 和 $\theta=\theta_0$.

如果 $r_0=1$,则 $r(t)\equiv 1$;如果 $r_0=0$,则 $r(t)\equiv 0$;如果 $0<r_0<1$,则从 ⑩ 看出,当 $t\to\infty$ 时,$r(t)$ 单调增大到1;若 $r_0>1$,则当 $t\to\infty$ 时,$r(t)$ 单调减少到 1.在直角坐标系中,$r(t)\equiv 0$ 相当于一个奇点 $x=0,y=0$.而 $r(t)\equiv 1,\theta(t)=t+\theta_0$ 相当于

$$x(t) = \cos(t+\theta_0), \quad y(t) = \sin(t+\theta_0)$$

这就是单位圆的参数方程.

因此,方程组 ⑧ 有唯一的奇点即原点,有唯一的环,即单位圆.它的轨线图如图3所示.方程组 ⑧ 称为三次系统,因为方程的右边是 x,y 的三次多项式.再注意,这个环是渐近稳定的;当时间 t 增加时,所有"邻近的"轨线都向这个环靠拢.实际上,在这个例子中,所有的轨线,除了一个奇点外,都趋向这个环.

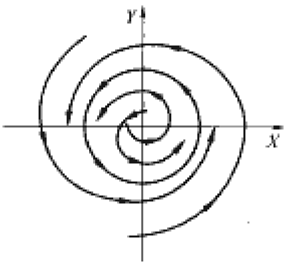


图3　单环

例 3　(没有环)方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x+1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y \quad ⑪$$

用变量分离法很容易解出(问题 3)

$$x(t) = 1-(1-x_0)\mathrm{e}^{-t}, \quad y(t) = y_0\mathrm{e}^{-2t}$$

这个例子没有环,仅有一个奇点(1,0).请读者证明它的轨线图象如图 4 所示.

例 1 中的每个环都不同于例 2 中的那个环,即后者在该方程组的其他的环中是"孤立的"(实际上根本没有其他的环).更精确地说,方程组(*)的环 Γ 是"孤立的",如果存在一个正数 a,使得中心线为 Γ 的环形区域

$$A = \{(x,y) \mid \text{从}(x,y)\text{到 }\Gamma\text{ 的距离小于 }a\}$$

中不含其他的环.(在这个定义中,从(x,y)到 Γ 的距离是指

$$\min_{u,v\in\Gamma}[(x-u)^2+(y-v)^2]^{1/2}$$

可以证明,这个极小值总是存在的,只要(x,y)不在Γ上这个值总是正的)如果在以环Γ为中心线的任何一个环形区域里至少含有另一个环,则称环Γ是非孤立的.由这些定义显然可见,例1中每一个环都是非孤立的,而例2的那个环则是孤立的.

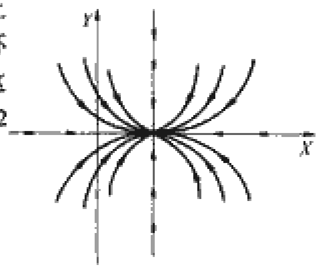


图4 无环

例4 (N个孤立的环)极坐标方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2)(4-r^2)\cdots(N^2-r^2),r\geqslant 0,N\in\mathbf{Z}^*\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}\qquad ⑫$$

相应于直角坐标系的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y)\end{cases}\qquad ⑬$$

这里$X(x,y)$和$Y(x,y)$是x,y的$2N+1$次多项式(问题4).这个方程组有唯一的奇点即原点,有N个孤立的环,即下面的这些圆

$$r=1,r=2,\cdots,r=N$$

但它没有非孤立的环.读者应该证明这些事实(问题4),并验证图5中相应轨线图形的正确性.

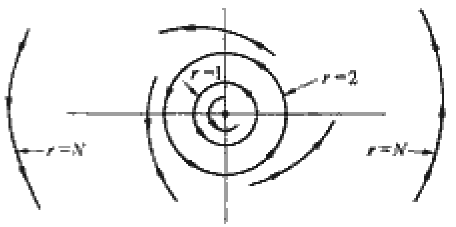


图5 N个孤立的环

这些例子说明,环的确存在,至少构造形如①的有环的方程组是不太困难的[①].问题是:形如(*)的已知方程组有多少个孤立的环?(有一个非孤立环的方程组一定有无穷个环——见问题5)这就引出了 Hilbert 的第十六问题.

① 以上各例中的环都是圆,但这并不是必要的.的确,环的形状可能是很复杂的(除非Y和X是x和y的二次多项式,这时环是凸区域的边界).此外,在上述例子中,每个环的内部只有一个奇点,但除二次系统外,并不都是这样.

3　Hilbert 的第十六问题

下面的问题是 D. Hilbert 在 1900 年提出来的，并且仍然没有得到解决：

"…… 我想提出一个问题．我以为，这个问题似乎可以用 …… 系数连续变化的方法处理，并且其解答对于微分方程所定义的曲线族的拓扑结构是有价值的．这就是一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Y/X$$

Poincaré 边界环(极限环)的最大数目和位置的问题，这里 X 和 Y 都是 x 和 y 的 n 次有理函数 ……"

"有理整函数" 是指一个多项式

$$\sum_{i+j=0}^{n}a_{ij}x^iy^j=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{0n}y^n \qquad ①$$

"Poincaré 边界环(极限环)"，就是我们所讲的孤立环①．

这个问题是 Hilbert 于 1900 年在巴黎召开的第二次国际数学会上提出的二十三个问题的第十六问题的第二部分．Hilbert 在这次会议的开幕发言中说：

"…… 历史告诉我们，科学的发展是一个连续的过程．我们知道，每个时代有它自身的问题，这些问题，在下一个时代里或者得到解决，或者作为无用之物给扔在一边而被一些新的问题所代替．如果我们希望知道未来数学领域可能的发展趋势，我们必须回顾一下那些尚未解决的问题，考查一下今天的科学提出来，指望明天能加以解决的问题．眼下是两个世纪之交，我以为正是这样来检查数学问题的时候，因为一个伟大时代的结束不仅要我们回顾过去，而且也指引我们的思想去展望未知的将来．"

Hilbert 提出的那些问题，有的过几年就解决了，有的最近才解决(第十问题是 20 岁的前苏联数学家 МаТиящевич 在 1970 年解决的)，但有几个问题现在仍然没有解决．

现在回到讨论 Hilbert 在其第十六问题中所提出的多项式系统的孤立环的最大数目问题．我们首先令 P_n 表示次数不大于 n 的所有实多项式的全体，因为形如①的多项式所有 n 次项的系数可以为 0，所以 $P_{n-1}\subset P_n$，对 $n=1,2,\cdots$ 都成立．1923 年 Dulac 证明了对于已知的 n 和 P_n 中的 X 和 Y，方程组(*)有有限多个孤立的环，个数 k 依赖于 n 和 X，Y 的选取．对每个固定的 n，这个 k 究竟可能有多大，这个问题使我们做出 Hilbert 数 $H(n)(n=0,1,2,\cdots)$ 的定义如下

① Poincaré 也把某些奇异环(或分界线环)算做他的极限环，奇异环是由奇点和轨线组成且有连贯定向的简单闭曲线．按頻週时的作法，我们不把奇异环算在孤立环的范围内．

$$H(n)=\sup_{X,Y\in P_n}\{\text{方程组}(*)\text{的孤立环数目}\}$$

因此,对于一个特定的 n,$H(n)$ 有限就意味着 P_n 中存在多项式 X 和 Y,使得对应的方程组$(*)$恰好有 $H(n)$ 个孤立环.另一方面,对于某一特定的 n,$H(n)=\infty$ 意味着对每一个正整数 k,P_n 中存在多项式 X 和 Y,使得对应的方程组$(*)$至少有 k 个孤立环.这和 Dulac 的结果并不矛盾.(为什么?)

由于 $P_{n-1}\subset P_n$,可见 $H(n-1)\leqslant H(n)$.由此以及例4中 n 为奇数时所给出的结果,我们可以肯定,对所有的整数 $n=0,1,2,\cdots$,有

$$H(n)\geqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

这里$[a]$表示不大于 a 的最大整数.因此,如果 $H(n)\to\infty$,且 $H(n_0)=\infty$,则当 $n>n_0$ 时 $H(n)=\infty$.

Hilbert 要求对每个 n 确定 $H(n)$.不难证明 $H(0)=H(1)=0$(问题7).因此第一个可能的非平凡 Hilbert 数(即 $H\neq 0,\infty$)是 $H(2)$.秦元勋给出了有一个孤立环的二次系统(即 $n=2$)的例子

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-1-2y+x^2+xy+y^2\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-x^2\end{cases}$$

读者可以验证 $x^2+y^2=1$ 是该系统的一个环(问题8),但这环是孤立环的证明从略.这个例子蕴涵 $H(2)\geqslant 1$.1939年,Bantin 宣布 $H(2)\geqslant 3$,但由于严酷的第二次世界大战,证明的发表却推迟到1952年.Bantin 的作法使人感到这个 $H(2)$ 就等于3,因此二次系统至多有三个孤立环.

20世纪50年代中期,Petrovsky 和 Landis 在两篇深奥的文章中"证明了"$H(2)=3$,以及 $n>2$ 时

$$H(n)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}(6n^3-7n^2-11n+6),n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{2}(6n^3-7n^2+n+4),n\text{ 为偶数}\end{cases}\qquad ②$$

这个工作看来大大有助于问题的解决,剩下的问题就是看 $n>2$ 时,这个上界是否能降低以确定 $H(n)$ 本身.不幸的是,1967年 S. P. Novikov 发现他们的论文有一个关键性引理的证明有错误,因而两篇论文必须撤销,所以整个问题又重新提出来了.

尽管1967年以后,人们已经清楚这个问题很不简单,但是仍然希望 $H(2)$ 的结果就是3.1979年,这个希望被史松龄、陈兰荪和王明淑打破了.他们利用了秦元勋、董金柱和叶彦谦的结果及技巧,构造了至少有四个孤立环的明确的二次系统,由此我们得出 $H(2)\geqslant 4$.这些系统就是

$$(\text{陈,王})\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\delta_2x-y-3x^2+(1-\delta_1)xy+y^2\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\dfrac{2}{9}x^2-3xy\end{cases}$$

其中，δ_1 和 δ_2 是充分小的正数.

$$(\text{史})\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy\end{cases}$$

其中，$\lambda = -10^{-200}$，$\delta = -10^{-13}$，$\epsilon = -10^{-52}$. 这两个系统的四个已知的孤立环的相对位置是相同的，即三个环围绕着奇点(0,0)，第四个环围绕着奇点(0,1)，如图 6 所示. 还不知道这两个系统是否还有其他的孤立环. 我们这里不来证明这些结果了. 读者如果想要更深入地研究这个问题，应该首先熟悉 Poincaré-Bend-ixson 定理. 关于二次系统的详细情况可以从参考文献中秦元勋、董金柱和叶彦谦的文章中得到. Coppel 总结了许多已知的结果，其中包括：

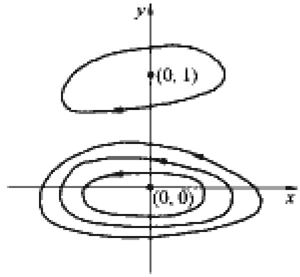


图 6　陈、王和史的二次系统的四个孤立环

(1) 二次系统的每个环围成一个凸区域，其中只包含一个奇点.

(2) 在二次系统中，围绕同一个奇点的环当 t 增加时有同样的走向，而围绕不同的点的环则走向相反.

于是，(1) 解答了二次系统的环的形状问题. (2) 蕴涵一个二次系统最多有两个(即最多有两个奇点，其中每个奇点被一个或多个孤立环所包围). 陈兰荪、王明淑和史松龄的例子实际上是有两个眼的情况.

因此，对于二次系统而言，环的可能形状和相对位置我们已经知道，但是 $H(2)$ 们仍不知道，甚至它是否有限也不知道.

$n > 2$ 的情况就更不清楚了. Sibirskiĭ 和史松龄已经证明 $H(3) \geqslant 5$. $n \geqslant 6$ 时，Otrokov 得到了 $H(n)$ 的下界，较例 4 得到的下界 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 更好：

$$H(n) \geqslant \begin{cases}\dfrac{1}{2}(n^2 + 5n - 14), n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{1}{2}(n^2 + 5n - 26), n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

在推导中，Otrokov(不明显地)构造了一个多项式系统. 另一方面，Iljasěnko 证明了，对任意的 n，P_n 中存在 X 和 Y，使得相应的系统至少有 $\dfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$ 个眼，其内部不相交. 当 $n > 2$ 时，不知道眼的最大数目是多少，不知道眼内的眼有多么复杂的样式，或者是否存在包含不止一个奇点的眼.

4　在生态学里的解释

我们转到本文开始时 van der Pol 所描述的那些物理现象. 特别地，令 $x(t)$，$y(t)$ 分

别表示两种有关系的生物个体密度(即在它们的栖息地上每单位面积或每单位面积上的个数).假设对固定的时间 t,$x(t)$ 和 $y(t)$ 在栖息地上的每一个子区域都相同也就是假设分布是均匀的.一种生物可能是以掠夺另一种生物为食物,或者双方为有限的公共食物来源而竞争,或者两种生物之间存在着一些其他的更奇特的关系

$$\frac{\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t}{x(t)},\quad \frac{\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t}{y(t)}$$

称为两种生物的相对变化率.每一个相对变化率是生物的出生速率 B 和死亡速率 M 之差

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B_1(x,y)-M_1(x,y)\equiv f(x,y)$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=B_2(x,y)-M_2(x,y)\equiv g(x,y) \qquad ①$$

注意,我们假定相对变化率依赖于生物的个体密度,而不明显地依赖于时间.在实际相互作用的系统中,这种假设是一种近似.像以前一样,我们指出,方程组 ① 的环必定是由于内部自身的,而不是由于外部的周期力的影响所产生的.当然,我们可以假设 $x(t)$,$y(t)$,$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 是所有变量的连续可微函数.

对于函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的确切性质有大量的争论.当然,它们的形式取决于相互制约的性质.例如,假设 y 种生物是以 x 种生物为食物的主要掠夺者,一种意见可以认为 $f(x,0)>0$,这种情况即表示当捕食者不在时,作为食物的生物会有正的相对增长率.另一方面,我们可以有 $f(x,0)<0$,当 x 足够大时.这是因为在栖息地即使没有捕食生物时,也会因太拥挤而产生有害的结果.对于每个 x,因为 y 种生物是捕食 x 种生物的,$f(x,y)$ 是 y 的减函数,这种假设似乎也是合理的.类似的推理也适应于相对速率函数 $g(x,y)$.

在任何情况下,一对相互作用的生物的基本速率方程可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xf(x,y)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yg(x,y)\end{cases} \qquad ②$$

x 和 y 可做生物的个体密度,我们感兴趣的是 ② 在 $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$ 象限的解.这个模型所要研究的课题,其基本问题是存不存在两种生物相互作用的系统,它们可以用微分方程组 ② 来模拟,且具有一个或多个孤立的环[①].

让我们略述一下理由,"自然"背景中单个的环必定是孤立的,实际上是生态稳定的.生态稳定的意义如下:"自然界"的环持续了很长的时间间隔,必定对"现实世界"的不可避免的冲击和扰动感觉迟钝.如果在时刻 t,突然冲击个体密度点 $P_1=(x_1,y_1)$,使得它离开环 Γ 而到达邻近的一点 Q,并且如果这种冲击迅速停止的话,那么通过 Q 点的轨线当时间继续增加时,将朝 Γ 方向运动.这样的环是生态稳定的,如图 7 所示(数学上

① 如果 f 和 g 是 x 和 y 的仿射函数(也就是一般形式 $ax+by+c$ 的函数),则 ② 不可能有孤立环.因此,如果 ② 有孤立环的话,那么 f 和 g 的次数必须是二次或更高次.

称渐近轨道稳定，但这里我们不给出正式的定义）. 在自然界中，仅有生态稳定环才能存在似乎是无疑的.

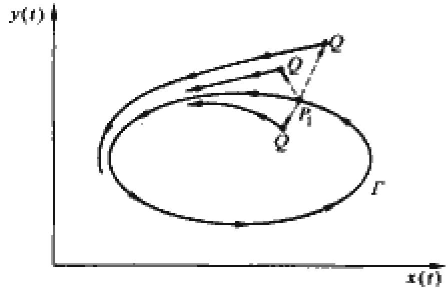


图 7　一个生态稳定环

一个生态稳定环 Γ 必定是孤立的. 因为，如果它不是孤立的，那么一个突然的冲击可以把 Γ 上的个体密度点 P 赶到一个不同的环上点 Q，而这个环有不同的振幅，且可能有不同的周期. 一旦到了新的环上，个体密度就留在那里，除非另一个冲击把密度点送到另外的一个环上. 不管怎样，都不能逐渐回到原来的环 Γ 上去了. 因此，如果环 Γ 是孤立的，则它不是生态稳定的，如图 8 所示. 注意：一个孤立环不一定是生态稳定的.

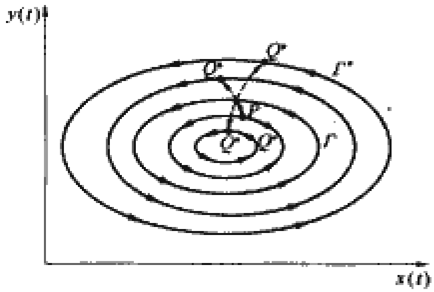


图 8　非孤立环不是生态稳定的

有几组已获得大量研究的掠食和被掠食生物群，其每一群都有一个生态稳定环. 加拿大山猫 – 白腿野兔的系统有一个令人惊奇的规律的周期为 10 年的环，它至少持续了近两个世纪. 还有阿尔卑斯的松毛虫 – 松树林的奇怪的环，北极旅鼠 – 植被的环. 它们双方的关系似乎是完全确定了. 其他一些环是在实验室里建立起来的. 在每一种情况里，环的出现都是由于两种生物本身相互作用而在内部产生的，并不是由于外界周的因素诸如气候循环变化的结果. 在 van der Pol 提到的大部分系统中，也具有孤立的和生态稳定的环.

这些系统可以用形如 ⑱[①] 的方程来模拟，也是大家所广泛承认的. 这里，我们讨论 f 和 g 所可能有的各种形式. 现在我们依照 Hilbert 第十六问题可以提出一个生态学的问

---

① 最近的证据表明，带时滞微分方程 $\frac{dx(t)}{dt} = x(t-\alpha)f(x(t-\alpha), y(t-\beta))$（$\frac{dy}{dt}$ 是类似的方程）可更精确.

题:自然界(或实验室)中,是否存在至少有两个生态稳定环的掠食 - 被食系统?这个问题的答案还不知道.

假定存在有两个生态稳定环的自然系统,那么它的轨线分布就可以画成如图 9 所示的那样.

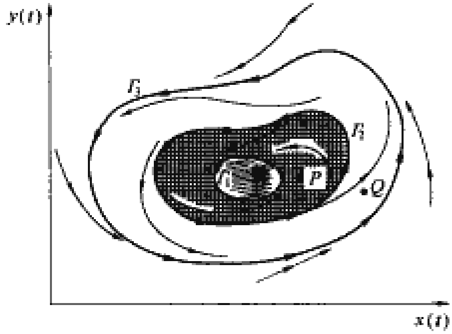


图 9　三个孤立环,其一生态不稳定环在两个生态稳定环之间

设 Γ 为生态稳定的环,它的影响区域是这样的所有点 P 的集合:当 $t\to\infty$ 时,过点 P 的轨线趋向 Γ. 图 9 中阴影部分就是 Γ_1 的影响区域. 在这个图中,Γ_3 的影响区域是由 Γ_2 以外的所有点所组成.

现在问,这样一个自然系统的个体密度轨线怎样能从一个环的影响区域运动到另一个环的影响区域?这可以用对系统的一个巨大冲击来做到,比如驱使点 P 在 t_1 时刻到达点 Q. 当然,这一切都是假想的,但一个自然系统可能以这种方式来作用,至少是可以理解的.

5　三个几乎不可能的研究项目

(1) 求 $H(2)$.

(2) 用计算机求二次系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b_0+b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2\end{cases}\qquad①$$

的数值解. 这里的系数取成陈兰荪和王明淑或者史松龄所使用的方程的系数,具体求出各个已知的孤立环,并试图鉴别是否存在别的环.

(3) 在自然界中找出(或在实验室里建立)一个掠食与被食生物的或其他的相互作用系统,它至少有两个生态稳定的环.

显然,问题(1) 是很深奥、很难的,而且不大可能很快得到回答. 问题(2) 略为容易些,但需要一些计算机方面的经验. 换句话说,人们可以处理一般的二次系统 ⑬. 当然系数的个数可以从 12 减到 6. 谁要在这个问题上开展工作,首先应该阅读 Cop 的文章. 问题

(3) 在工程实验室里用二极管的适当组合，或者在化学实验室里作用的化学药品，或者在生物实验室里用适当的小生物，实际上是可以做到的.

编后语　全国高中数学联赛经过若干年的"规范化"已经俨然成为难一点的高考.数论、图论、组合论、平面几何成为点缀，丧失了主体地位，这使得大量优秀中学生在"大纲"的圈子中空转.今年由丘成桐先生所倡导的新式竞赛方式带来了一股清新气息，以小组为单位，组数不限，内容不限，只求创新，基础数学、应用数学均可，以论文形式参赛，难度及内容上不封顶，给天才学生留下了极大的空间.这类似于美国的西屋科学大奖，2005年获奖者维斯卡尔迪虽辍学在家，但以高难度的偏微分方程中拉普拉斯方程的狄利克雷问题新解法而获10万美金大奖.所以本文是为那些超常学生提供的.至于为什么选择这个题目，有三个原因，一是微分方程由于我国上世纪50年代的学科布局，造成了最庞大的队伍和大量的文献，二是在极限环问题上，中国数学家有很好的表现(特别是田刚之母王淑明女士)，三是与现实世界联系最多的数学分支当属微分方程，如名画真伪之辨、期权期货定价等.

股票市场中的非线性动力学模型

王忠玉　　刘培杰

1　引　论

在股票市场里，各种股票价格每天都在变化，价格有时缓缓上涨，有时急剧飞涨；相反，价格有时还慢慢下降，有时直泻千里．这些价格的波动牵动着千千万万投资者的心．作为金融市场的一个重要组成部分的股票市场，之所以吸引着众多的投资者，是因为股票价格不仅受到经济活动比如企业经营活动和当时利率等的影响，而且还受到除经济活动之外的其他因素的影响，有时这些因素还是相当重要的．例如，1987 年 10 月 19 日，星期一，美国纽约股票市场崩盘，道・琼斯指数下跌了 20%，一夜之间，投资者的 20% 以上的价值化为乌有，因而导致了数千家公司、银行的倒闭，造成了债券无法偿还，股息无法发放，这就是所谓的"黑色星期一"．至今，投资界对此仍谈虎色变．就此现象，许多研究人员竞相给出了各种各样的解释，目前，还没有一种理论能够圆满地解释为什么会发生"黑色星期一"现象．然而，股票市场中的非线性动力学模型的建立和发展，给这一现象找到了一种较好的诠释．

2　现代金融理论的基石 —— 效率市场理论

早在 1900 年，巴施利耶(Bachelier)[1] 在他的数学博士论文中就提出了所谓"效率市场"的理论思想，他描述了价格的随机行走模型(Random Walk)，概率常扩散 —— 也叫布朗运动和鞅，这些都是效率市场的数学表述．

在 1953 年，当时一位颇有名的统计学家肯德尔(Kendall)发表了一篇颇有争议的文章，即"经济时间序列分析，第一部分：价格"．此文的初衷是想借助于问世不久的电子计算机，追寻出股票价格波动的模式．研究结果显示，股市价格没有任何模式可寻：它就像"一个醉汉走路一样，几乎宛如机会之魔每周扔出一个随机数字，把它加在目前价格上，以此决定下一周的价格"．

简略地说，股市价格似乎遵循一种随机行走规律．

这一发现使一些金融经济学家感到困惑，因为它似乎暗示着股票市场是由一种反复无常的市场心理所支配，没有任何逻辑和理性．很快，许多经济学家对 Kendall 现象形成

了新的解释.

要理解这一重要却又似乎自相矛盾的结论,我们先要了解价格的内涵.最初经济学家认为价格是商品的市场价格,经过进一步的探索,人们发现价格取决于有关信息.因为购买者对一种商品的需求是建立在他对该商品的预期之上的.这种预期对一般商品而言,是使用寿命、安全性、质量等;对证券而言,则主要是看涨还是看跌.预期决定需求行为,而它本身又取决于购买者对所需之物的了解,即信息的占有程度.在股票市场上,这种信息一般包括:历史数据,发行者的金融、管理等方面的状况和盈利情况等.

随机变化的价格,不仅不是市场非理性的证据,而且是众多理智聪明的投资者竞相开发有关的信息,并对其做出理性反应的结果.相反,如果股市波动是可以预测的,那才真正说明市场的无效和非理性.因为,只要有人拥有预测价格涨落的能力,就说明并非所有可以得到的信息都已反映在现行价格上.

价格已经反映了所有可以得到的信息,这就是效率市场假设(Efficient Market Hypothesis),或称为市场有效性假设,缩写为EMH.

按照可获得信息的分类不同,可将效率市场细分为以下三种形式:

(1) 弱形式假设(Weak-form-hypothesis)

在此情况下,证券的现行价格所充分反映的是有关过去的价格和过去收益的一切信息.因为价格的时间走势表现为一种随机行走,所以,在某一时刻上,价格便被看做为整个价格运动轨迹上的一个质点.

(2) 中强形式假设(Semistrong-form-hypothesis)

此时,现行的证券价格不仅能反映过去的价格和过去收益的一切信息,而且还融汇了一切可以公平得到的信息,如公司收益、红利,对公司的预期、公司间的兼并等.

(3) 强形式假设(Strong-form-hypothesis)

在这一假设市场条件下,价格不仅包括了弱形式及中强形式的内涵,而且包括了内线人,如公司管理人员所知信息,包含了所有对特定公司以及整个经济所进行的冗长而痛苦的分析所得出的信息.在这里任何人,包括内线人也无法拥有对信息的垄断权.也就是说,研究者的成果,管理者对市场的评估等都已反映到价格中了.这样的市场,就像一个理想的拍卖行,价格永远反映真实的市场价值,永远是公正的.投资者在这样市场里,偶尔靠运气能够预测到价格的变化趋向,但重复成功的很少,连续重复成功的就更少.

在20世纪70年代初,由于Fama发表文章的影响,股票市场转向了随机行走规律的EMH观点,效率市场假设迅速地流传起来,而且不断地发展和完善.

EMH本身并没有可供检验的内涵,其经济上的意义是指没有人能在市场上持续地赚取超额利润.为了使这一假设能被检验,金融学家们基本上选择了两条途径,其一是找出什么是均衡条件下的证券价格,然后再去检验现实中证券价格波动是否遵循均衡所给出的轨迹.如有偏离是否大到能使人赚取超额利润.这种检验研究集中在对中强形式及强形式的两种假设上,成果累累.其二是从统计学上找出所谓"价格已经反映了所有可以得到的信息"是什么意义,这样给出的往往是随机模型.按照Fama的观点,随机行走模型隶属于一个更广泛的所谓"公平博弈(Fair Game)"模型.统计学上的随机行走模型要求

连续价格波动之间相互独立，而且这种波动要遵循相同的分布．这些要比公平博弈模型来得严格，而公平博弈又比市场有效性假设更严格．关于这方面的许多内容，学者们也进行了广泛而深入的研究．

简洁明快的EMH体现了金融学家们一直梦寐以求的东西，那就是竞争均衡．EMH实际上是亚当·斯密"看不见的手"在金融市场的延伸．现代金融学科中最重要的模型——资本资产定价模型的存在，基本上规划出一个效率市场．因此，EMH的成立保证了金融理论的适用性，EMH是现代金融学的基础．

3　股票市场中的非线性动力学模型

经济学中，很少有一种理论能获得像EMH这样广泛的支持．但是，它也不是完美的，经济学家们在不断发现支持它的证据时，也碰到了一些与之相悖的现象．这些称为异常的东西，向这一美妙的假设提出了有力的挑战．比如，财务文献资料中充满着诸如低的市价——盈利比率效应之类市场异常现象，此种情况指的是一些公司的股票价格相对于其盈利属于偏低，这些股票总的说来始终优于市场．

进入20世纪80年代以来，许多学者扩展了由勒鲁瓦(LeRoy)和波特(Porter)[2]、希勒(Shiller)[3]开始研究的工作，收集了不同意随机行走规律假设的经验证据以及阐述了理论上的争论点．在此情况下，非线性确定性模型在理论上的出现替代了线性随机模型用来解释股票市场的动力学，在金融市场上的数据中强吸引子的存在与否至今仍是一个未解决的问题，因为对经验证据而言既有支持者，又有反对者．在理论研究上，许多努力也在进行，在此过程中显示混沌行为的股票市场模型被设计出来．

下面，我们在建立对股票投资和交易进行分类的基础上，来阐述股票市场中的非线性确定性动力学模型，以此揭示出股票市场中价格行为的复杂性．

设p是股票的市价，v是依赖于公司或厂商最近季度报表的公司基本资料的股票价值，基本资料如收益、股息、负债资产比等，称v为现期基本价值或简称为现期价值．最后，设投资价值u是基于综合性信息和长时期因素的复杂分析之上v的预期未来值的估计．

第一类投资者：该类型投资者使用的策略是基于独立的、复杂的长期投资价值u和市价p之间关系的估计上，同时基于资本收益或损失的变化估计上．

市场总是处在价格经常上升或下跌的运动中．如果$p < u$，他们就试图买进股票，从而由$u - p$得到的资本收益是人们所期望的．然而，越低的p就越容易察觉它将有上升的机会．如果购买的决策被延误，并且如果价格随后上升，那么投资者将失去一个得到高收益的机会——即现在机会将被丢失．如果$p > u$，情况刚好相反，那么这就带来了必须担心的资本损失．

上面的分析，我们能够借助于假定的权函数$f(p)$正式表述出来，其中$f(p)$表示损失机会的可能性，即表示当市场处于低谷时，没有买进或者表示市场处于高位时而没有卖掉．资本收益和损失的机会可以用投资者心目中的预期最高价$M > u$和预期最低价

$m < u$ 的情形来估计. 当 p 接近于最高价 M 时,损失资本收益的机会和经历资本损失的机会是大的;当 p 接近于最低价时,那么没有买进而丢失资本收益的机会是大的;当 p 接近于投资价值时,察觉到的资本收益与资本损失的机会是很小的或等于零. 因此,我们假设 $f(p)$ 是在点 m 和点 M 附近为双峰的. 如图 1 所示.

进一步,我们还假设 $f(p)$ 如下:

$f(p)$ 是非负的、可微的,且在 $[m, M]$ 上有界

$$f(p) = \begin{cases} f'(p) < 0, & m < p < u \\ f'(p) = 0, & p = u \\ f'(p) > 0, & u < p < M \end{cases} \quad ①$$

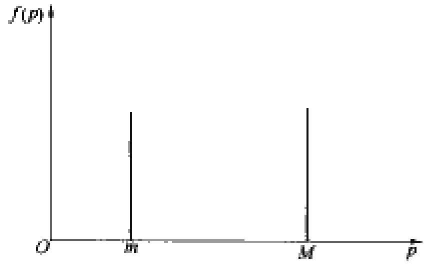


图 1

已知投资者的交易是以 $u - p$ 差价为基础的,$f(p)$ 的意义如上所述,从而我们可以用 $\alpha(p)$ 函数表示第一类投资者的超额需求,$\alpha(p)$ 定义为

$$\alpha(p) \xlongequal{\triangle} \begin{cases} a \cdot (u - p) \cdot f(p) & , p \in [m, M] \\ 0 & , p < m, p > M \end{cases} \quad ②$$

其中 a 为正的参数,表示第一类投资者需求强度的度量. 超额需求是指在股票市场上,投资者对某种股票的需求量减去此股票的供给量.

第一类投资者是复杂的,他们的行为是基于价格和仔细估计未来经济价值之间差价的市场变化的评价上. 这样的行为是昂贵的、费时的,并且在智力上大量投资,还要计算资本. 大多数的市场参与者不愿意追求这类的行为,并且也不这样做. 相当多的人代之以相关的简单规则和低费用的信息. 我们称这种投资者为第二类投资者.

假设第二类投资者与第一类投资者相反,他们以归结为在市价 p 和现期基本价值 v 之间差价的简单适合的方式. 假定第二类投资者在仔细考虑最高价和最低价时,不考虑任何资本收益或损失适度调整的机会,也不考虑用于买进或卖出股票的适度调整的策略. 结果,随着投资者实施计划时,当股票价格上升时他们也不试图卖出,当股票价格下降时他们也不试图买进. 相反,在市场将上升的信息下,当股价上升时,他们以特有的方式进入股市,在市场将下跌的信息下,当股价下跌时他们退出股市. 这意味着不复杂的投资者追逐价格上上下下.

设第二类投资者的机会函数是常数,那么类似于 $\alpha(p)$ 在 ② 式定义的超额需求函数,这里用 $\beta(p)$ 表示第二类投资者的超额需求为

$$\beta(p) \xlongequal{\triangle} b(p - v) \quad ③$$

其中,正的参数 b 表示投资者的需求强度,也称为群集系数.

第三类投资者即市场制造者或市场管理层. 这里,我们称在股票市场上起着调节市场交易和维护市场秩序的市场制造者或市场管理层为第三类投资者. 本质上说,这是一类极其特殊的投资者. 他的作用是对超额需求(或超额供给)的市场设置价格,而且当存

在超额供给时，他就在此价格上从他自己的存货中提供超额需求，反之亦然. 假定他在离散时间间隔里宣布一个价格，比如一天里，在时间 t 的价格，然后在宣布的价格上执行秩序，那么市场上的超额需求(或超额供给)表现为他存货的减少(或积累).

在上面分析的基础上，我们就能知道市场上总的超额需求是由第一类投资者的 $\alpha(p)$ 和第二类投资者的 $\beta(p)$ 的和组成，即可以用 $E(p)$ 定义为

$$E(p) \xlongequal{\triangle} \alpha(p) + \beta(p) \tag{4}$$

为了理论阐述上的方便，我们这里假设所有第一类投资者是相同的，所有第二类投资者也是相同的.

如果设 V_t 是在宣布价格时期里市场制造者的股票存货，那么存货在一个时期里的变化刚好是

$$V_{t+1} = V_t + E(p_t) \tag{5}$$

为了保持式 ⑤ 处在平衡状况中，必要的是市场制造者将起作用，因为超额买进股票将耗尽他的财政资源以及超额卖出股票将耗尽他的存货. 因此，他从一个时期到另一个时期来调整价格，以便平衡地继续市场均衡的期限，而又同时缓和他的反映，以便于在这一过程中不至于极度地使市场不稳定. 比如我国股票市场上的市场管理层对股市涨跌幅限制的目的，就是使市场在短时期内保持市场均衡的期限变化不大.

上面的分析只是考虑了各类投资者的投资行为抽象化的数学模型. 实际上，股票市场上股价的涨跌是由供需双方力量共同作用而引起的. 如果供给大于需求的话，那么股价下跌；倘若供给大于需求的程度很大，则股价下跌的幅度就很大，反之亦然. 因此，假定价格 $p_{t+1} - p_t$ 的变化是由连续的单调递增函数 $c\gamma[E(p)]$ 来确定的，其中 $\gamma(0) = 0$，c 为调整系数，从而

$$p_{t+1} = \theta(p_t) \xlongequal{\triangle} p_t + c\gamma[E(pt)] \tag{6}$$

为了简单性，对于所有的 p，假设 $\gamma[E(p)] = E(p)$. 从而

$$p_{t+1} = p_t + cE(p_t) \tag{7}$$

这样我们就得到了一类递推的映射，即 $p_{t+1} = \theta(p_t)$ 来刻画股票市场上价格行为的变化. 也就是说，今日的股票价格是在昨日股价的基础上，经过投资者们今日的投资决策而得来的，同样，明日的股价是在今日股价的基础上，再经过投资者们明日的投资决策而得来的，以此递推 ……

因此，我们可以只考虑一类所有的递推映射，其结构在定义域 $Z \subset \mathbf{R}$ 上能够由一个连续映射 $\theta: X \to \mathbf{R}$ 来表示. 在给定的时期里，股市状态是由 $p_t \in \mathbf{Z}$ 的值来给出的. 以后的状态是由差分方程

$$p_{t+1} = \theta(p_t) \xlongequal{\triangle} \theta(p_t; \pi) \tag{8}$$

来产生，其中 π 是函数 θ 的参数向量. 利用

$$\theta^0(p) = p, \quad \theta^n(p) = \theta^{n-1} \cdot \theta(p), \quad n = 1, 2, \cdots$$

定义迭代映射 $\theta^n: Z \to \mathbf{Z}$，那么序列 $\tau(p) = \{\theta^n(p)\}_{n \geqslant 0}$ 被称为从初始条件 p 开始的轨迹. 轨迹的渐近行为是由轨迹的极限集合 $\omega(p)$ 来指述，$\omega(p)$ 被定义为 $\tau(p)$ 的所有极

限点的集合.

这样,我们就能够在投资者分类以及递推映射的基础上,运用混沌动力学的分析方法来展开深入的分析和研究.当然,在分析中还要假设所有参数比如 a,b,c 都为常数.

暂时均衡与完全均衡

假设价格是在 p 处平稳的,那么

$$E(p)=\alpha(p)+\beta(p)=0 \quad ⑨$$

所以第一类投资者超额需求(或供给)刚好等于第二类投资者超额供给(或需求).如果 $p\neq v$,那么 $\beta(p)\neq 0$,所以从④式得 $\alpha(p)\neq 0$.已知由于第一类投资者的假设情况,故 $p\neq u$.在递推的股票市场里在这样的价位上,市场制造者的存货应是一个常数,但为了支承这样的价位,市场只好提供无穷尽的股票供应而且投资者有无穷尽的股票要求,反之亦然.这种状态仅仅是一种暂时均衡,而不是完全均衡.只有当 $\alpha(p)=0$ 蕴含着 $p=u$ 时,投资者才是处在完全均衡中.同样地,只有当 $\beta(p)=0$ 蕴含着 $p=v$ 时,市场才是处在均衡中.因此,我们得到下述结论.

结论 1 在一个完全均衡市场中,价格等于现行基本价值等于投资价值,即 $\bar{p}=v=u$.这样的均衡是唯一的.任何满足⑨式的另一价格是一个暂时均衡价格.

完全均衡的局部稳定需要 $|\theta'(\bar{p})|\leqslant 1$,其中 $\bar{p}=\gamma=u$,也就是

$$-1<1+CE'(\gamma)<1 \quad ⑩$$

或利用④式得

$$-2<C[a'(v)+b]<0 \quad ⑪$$

已知这个条件,任何充分接近完全均衡的轨迹能够收敛于完全均衡.倘若这样,只有市场被随机震动(比如有影响的重大事件发生)所冲击时,不规则波动能够被传播.这是第一类投资者在市场上占上风的局面.这正是我们期望没有第二类投资者的情形.这时,市场"混沌"只能是外生的.

然而,如果条件⑩式被违背的话,那么市场机制是在完全均衡附近局部的扩展.任何经过接近均衡值的价格轨迹,无论怎样经常或多么近,它都能够被"踢远",此时,价格轨迹就返回到邻近区域里.这样形成了参数空间里的分叉(Bifurcation)轨迹.这种分析是基于数值条件的推导和演算之上的,本文对此就不详细地扩展了.

最后,可以得到最为重要的结论:

结论 2 已知市场大体上是充分接近于完全均衡 $\bar{p}=v=u$,且当投资者的反映较为强烈时,那么:

(1) 混沌:长时期的不规则的投机波动是可能的.

(2) 制度转变:股票价格在或多或少的随机区间里围绕着较低的和较高的水平交替,具有不规则的波动.

(3) 显著性和遍历性:这样不规则行为就随机地选择初始条件而言是可能的,而且许多价格的频率能够收敛于稳定的密度函数.

(4) 鲁棒性:长时期的不规则的波动相对于参数 u,v,m,M,a,b,c 的变动而言能够是鲁棒的.

(5) 随机性:价格的平均能够服从于中心极限定理,所以股票价格行为貌似一个随机过程.

(6) 伪序性:价格轨迹可以经过已知暂时序的各种变化着周期的附近,当这些轨迹不稳定时,价格将从任何这样的序中离去,而且价格以不可预测的方式进行演变.

那么,结论2对应于现实股票市场的意义是什么呢?它意指虽然市场上股价处于相对说来是完全均衡的(指在结论1中定义下的含意),但是当从较长时期的时间上来考察股价变化时,人们便发现投资者在各种信息的左右下,开始进行各自的投资决策,其最终目标是投机获利,以至于不自觉地推动着股票市场中的价格上下波动.当然,股票价格在熊市和牛市市场中交替变化,其还要经历各种微小的变化,由此形成了股价在不断地发展变动中.这里,鲁棒性若用通俗语言来解释的话,就是指投资者的投资决策行为在一定范围内微调时,不会影响到市场股价变动的总趋势.而当人们选择几个时期进行对比研究市场价格变动现象时,发现股价波动的轨迹非常像一个服从某种类型(中心极限定理)的随机过程.此外,股价随着时间流逝而演变的轨迹,有可能与历史上某一时期的股价变动相符合,但是它决不是历史现象的"重现",虽然现在或将来的股价也可能经历历史上的任何价位,但是这些演变都有其各自的特点,用历史经验来预测未来的市场价格演变的趋势是不可能十分奏效的.

上述的讨论和分析是一种理想化的情形,我们更进一步地还可以研究各种参数变化的组合来得到丰富多彩、变化多端的各式各样的股票市场变化的模拟.因此,本文介绍的非线性动力学模型在一定条件下就必然地会出现混沌——"黑色星期一"现象.当然研究模拟现实股票市场时,需要一系列的数值演算等.

现今,股票市场中的动力学模型,以其特有的理论魅力和与现实较为相符的特点,吸引了各国学者们的广泛关注.金融市场上的动力学模型仍在发展和研究之中.

参考文献

[1] P. H. COOTNER. The random character of stock market prices[M]. MIT Press. 1964.

[2] S. E. LEROY, R. PORTER. The present-value relation: tests based on implied variance bounds[J]. Econometrica, 1981:49.

[3] R. J. SHILLER. Do stock price move to much to be justified by subsequent changes in dividends[J]. American Economic Review, 1981, 71(3).

[4] R. L. DEVANEY. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems[M]. Menlo Park. Calif :Benjamin/Cammings, 1986.

[5] S. SHAFFER. Structural shifts and the viability of chaotic market[J]. Journal of Economic and Behavior Organization, 1991:15.

S先生和P先生的新谜题(摘要)

吴康[①]　杨萍[②]　林冬[③]

1　谜题源起

题1　(S先生和P先生的谜题)

数学老师想好了两个自然数 m,n,满足 $2\leqslant m\leqslant n\leqslant 100$.他把 m,n 的和 s 告诉了S,把 m,n 的积 p 告诉了P.S和P都是聪明学生,诚实可靠,进行了以下的对话——

S:我不知道 n 的确切值,但我知道你也不知道.

P:现在我知道了.

S:现在我也知道了.

老师证实了S和P的表述都是有根据的,结论是正确的.试求 m,n 的值.

答:$m=4,n=13$.

注:"S:我不知道 n 的确切值,但我知道你也不知道."这句话中的","代表"并列",即在S说完整句话之前P并没有进行思考.本文所有题目中表示"并列"的","的用法与此相同.

此题目是著名的"S先生和P先生的谜题",上个世纪问世后一度风靡欧美,成为测试智商的逻辑难题.因为S和P的表述都是有根据的,结论是正确的,所以S和P还有"旁观者",都可以从已知的信息入手,一点一点地挖掘题目中的"潜台词",每个人的言论都是信息的重要来源.然后一步一步进行分析、演绎,运用形式逻辑进行归纳、推理,直至得到答案.这种类型的题目往往受到大中学生的欢迎,但迄今为止还没有进入数学竞赛的正殿,主要是因为其编拟和求解都有较大的难度.

2　S先生和P先生的新谜题

题2　(命题:吴康)[2]

① 华南师范大学数学系,广州,510631.

② 美国俄亥俄州 Case Western Reserve 大学.

③ 中国人民大学附中,北京,100080.

(1998 CHINESE OLYMPLAD TRAINING CAMP Second Test) A mathematic teacher wants her two intelligent students S and P to derive the exact value of a 2—digit natural number n by revealing the number of positive divisors of n to S and the sum of the digits of n to P. A brief conversation between S and P goes as follows:

P: I can not determine n.

S: I can't either but I know whether n is even or not.

P: Now I know what n is.

S: So do I now.

Suppose both students are honest and have perfect logical reasoning for whatever they say. Determine n and justify your answer.

Answer: $n = 30$.

(原文)[3] 数学老师把一个两位自然数 n 的约数个数告诉了S,把 n 的各位数字和告诉了P.S和P是两位很聪明的学生,他们希望能推导出 n 的准确数值.S和P进行了如下的对话——

P:我不知道 n 是多少.

S:我也不知道.但我知道 n 是否为偶数.

P:现在我知道 n 是多少了.

S:现在我也知道了.

老师证实了S和P都是诚实可信的,他们的每一句话都是有根据的.

试问:n 的值究竟是多少?为什么?

(提示:设 n 的各位数字和为 p,n 的约数个数为 s.首句话成立 $\Leftrightarrow 2 \leqslant p \leqslant 17$.次句话成立 $\Leftrightarrow s \in \{2,3,8,10,12\}$.第3句话成立 $\Leftrightarrow n \in \{11,30,59,89\}$.本句话成立 $\Leftrightarrow n = 30$.)

题3 (命题:吴康)[1]

王老师把一个小于60的正整数 n 的约数个数告诉了S,把 n 的末位数字告诉了P.S和P是两个很聪明的学生.他们进行了如下的对话——

P说:我不知道 n 是多少,你也不知道,但我知道 n 有两个约数互相不能整除.

S说:现在我知道 n 是多少了.

P说:现在我也知道了.

王老师证实了S和P都是诚实的,问 n 的值究竟是多少?

答:$n = 10$.

题4 (命题:吴康)[1]

数学老师告诉他的三名学生S,P,Q,他想好了一个二位十进制自然数 n,并且把 n 的各位数字和 s,各位数字积 p,n 的约数个数 q 分别告诉了S,P,Q.三名学生进行了一场有趣的对话——

S:我不知道 n 是多少,你们也都不知道.

P:现在嘛,我还是不知道,但我知道了 n 的奇偶性.

S:现在我知道 n 是多少了.

Q:那我也知道了.

P:我也知道了.

老师证实了三个学生说话都有根据.那么 n 的值究竟是多少?为什么?

答:$n = 50$.

题 5 (命题:吴康)[1]

数学老师想了一个两位十进制自然数 n,并且把 n 的两位数字和 s 告诉了 S,把 n 的两位数字积 p 告诉了 P,把 n 的约数个数 q 告诉了 Q.S,P,Q 是三个聪明的学生,他们进行了如下的对话——

P:我不知道 n 是多少.

Q:我也是.

S:我也是.

P:但我知道 n 的奇偶性.

Q:我也是.

S:我也是.

Q:现在我知道 n 是多少了.

P:我也是.

S:我也是.

老师证实了三名学生都是诚实的,他们的每一句话都是有根据的.试问:这个数是什么?为什么?

答:$n = 48$.

3 谜题编拟方法

到目前为止,在国内外很少有人专门研究与此相类似的谜题.这种类型的题目最大的特点是可以对学生的逻辑思维进行有效的强化性训练,并且题目内容与数学学科紧密融合.它可以弥补目前逻辑类型题目偏重于语言逻辑的这一缺陷,丰富了逻辑推理题目的发展空间.但是因为此类谜题的命题过程和解答过程都相当复杂,所以在国内外的竞赛试题中很少见到,即使偶有一、两道也只限于吴康所做的工作,还不足以成为一个体系.下面将对这种类型的逻辑谜题尝试着作一个深入的剖析和探究,找出题目命题和解答的方法及规律;并且在文章的最后给出了可以拓展的方向,使之成为一类逻辑谜题.在此称这种类型的题目为数字逻辑谜题.

(1) 选择条件

(2) 选择对话顺序

(3) 选择结论

(4) 解答谜题的步骤

4 谜题的特点

(1) 中学数学与大学数学之间

这些题目所涉及的知识是初等数论中一些简单的概念,但题目的解答对学生的逻辑思维要求很高.如果没有受到良好的逻辑思维训练,即使是大学生解答此类题目也不会很容易,这一点恰好符合竞赛命题的原则 —— 知识点不超纲,而且能够达到锻炼学生思维和能力的目的.

(2) 题目充满趣味性

题目采用对话的形式,使用通俗易懂的口语化语言,使形式化与生活趣味化结合起来.题目的解法上一环紧扣一环,经实践,学生一旦开始解这些题目,往往是解不出来不罢手.大多数学生开始时往往是找不到解题的要领,经常落掉题目中的已知条件所带来的全部信息,只有极少数对数字非常敏感且逻辑思维能力很强的学生才可以找到解题的窍门,但也经常是做了两三遍才把题目做对.可见这些题目对大、中学生具有一定的挑战性和吸引力.

(3) 题目的内容比较新颖

目前在国内外的数学竞赛中极少出现类似的题目.把这些题目作为数学竞赛试题具有一定的新颖性.

(4) 题目有一定的数学教育价值

经过解这些题目可以充分锻炼学生的逻辑思维能力,培养学生思维的严谨性、灵活性,考查学生对已有知识的掌握情况,开发学生的思维潜能.同时学生在解答过程中也可以感受到数学美:在众多的数字中只有一个数字具有与众不同的特性,或当一些不同的性质做交集时,只有一个数字可以"脱颖而出",极大地激发了学生对数学的兴趣,从而达到提高学生全面素质的要求.

5 两个难度更大的新谜题

已知条件:现在有一个十进制二位数 n,老师想考查一下他的学生的逻辑推理能力,于是他让学生P知道 n 的各个数位上的数字之积,让学生Q知道 n 的约数的个数,让学生S知道 n 的各个数位上的数字之和,让学生R知道 n 的个位和十位上两个数字的最大公约数.然后让他们根据自己知道的条件在相互间展开了一场有趣的对话,在对话中每个人又不断地获得新的信息来推断 n 的值.老师证明每个人都是诚实的,并且说话都是有根据的.由于对话内容的不同,最后所确定的 n 的值也不同,问题是让读者作为旁观者来推断 n 的值.

题6 (命题:林冬)

P说:我不知道 n 是什么,就算你们知道了这一点,可你们还是不知道 n 是多少.其实,我连 n 的奇偶性都不知道.

Q 说:我也不知道 n 的奇偶性.

R 说:n 的奇偶性我也不清楚.

S 说:既然你们这么说,我现在知道 n 的奇偶性了.

Q 说:哈哈,连 n 是多少我都知道了.

P,R,S 说:我们也知道了.

答:$n=16$.

题 7 (命题:林冬)

P 说:我不知道 n 是什么,就算你们知道了这一点,可你们还是不知道 n 是多少.其实,我连 n 的奇偶性都不知道.

Q 说:我也不知道奇偶性.

R 说:至于奇偶性吗,目前我还不清楚.

S 说:你们说了这么半天,可我现在连 n 的奇偶性都没搞清楚.

P 说:n 是多少我知道了,而且我是我们当中第一个知道的人.

S 说:原来如此,现在我也知道了.

R 和 Q 说:的确,我们也知道了.

答:$n=76$.

6　谜题的拓展

(1) 改变人数
(2) 改变条件
(3) 改变数字
(4) 允许撒谎
(5) 分组讨论
(6) 老师参与
(7) 信息穿插
(8) 改变语境
(9) 应用编程

7　谜题的研究价值

(1) 培养观察能力
(2) 培养理解能力
(3) 培养记忆能力
(4) 培养运用能力
(5) 培养运算能力
(6) 培养推理能力

(7) 培养自学能力

参考文献

[1] 吴康. 奥数金牌之路·高中数学[M]. 桂林:广西师范大学出版社,2002.

[2] 1998 Chinese Olympiad Training Camp Second Test. Crux Mathematicorum. Canadian Mathematical Society,1992(3),66.

[3] 舒五昌,吴康. 第二届全国数学奥林匹克集训班训练考试试题选解[J]. 数学竞赛,1998(11).

吴康(1957—),华南师范大学数学系副教授,硕士生导师,指导课程与数学论专业竞赛数学方向研究生.曾任国家集训队教练(1987,1988),澳门IMO代表队教练(1993),冬令营广东代表队教练(1987 ~),华罗庚杯潮州队教练(1993,1995).指导过IMO金牌选手逾10名.现任广东奥林匹克学校教练(1994 ~),广东省数学奥林匹克业余学校教练(1986 ~),广州市小学数学奥林匹克业余学校顾问(1998 ~),《中学数学研究》副主编,《数学教育学报》编委,教育部基础教育教材审查委员会专家组成员,全国中学理科报刊协作组理事会理事,中国初等数学研究协调办事组成员,教育硕士专业学位导师,希望杯数学竞赛命题组成员.在学报、中级数学杂志发表论文与科普文章约200篇,参加"图论Ramsey数下界研究"科研项目获广西科技进步奖一等奖(2001).系中国数学奥林匹克高级教练员(1989 ~),广东省组合数学研究会理事兼秘书长.任总主编出版了丛书《奥赛金牌之路》,丛书《走向6月》等,著有《竞赛数学的原理和方法》,教材有《数学问题探究》等.

编后语 吴康教授著述颇丰,且文理兼备,诗作不断,有人说数学家与诗人是同一类人,在吴教授这里得到充分体现,这篇稿件是2004年他参加全国数学奥林匹克研究会上的一篇"旧作".由于开辟了一个命题新方向,所以选用.近日惊闻吴教授辞去了《中学数学研究》主编一职,不知何故,这本刊物刚刚有点起色,中途换将乃兵家大忌,但搞数学者多半不像拉普拉斯之流,随机应变,长袖善舞.上世纪80年代大学校长多由数学家挂印,如北京师范大学王梓坤,北京大学丁石孙,四川大学柯召,吉林大学王柔怀,中山大学伍卓群,山东大学潘承洞,复旦大学谷超豪等,但随着管理凸显,学术隐退,数学家"风光不在",行政讲变通、平衡,数学讲绝对、极端,两者俱备,凤毛麟角,吴先生辞"官"后,心无旁骛,对数学奥林匹克界也算一件幸事.后吴先生又发来短信告知他新任丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任.

汉密尔顿致丘成桐代理律师的信[①]

尊敬的库珀先生：

丘成桐在《纽约客》的文章被以不公正的方式描写让我感到极大的不安.我在下面提供给你我关于此事的看法,以正视听.我授权你在能够对丘有所帮助的情况下将这封信与《纽约客》杂志和公众分享.

20世纪80年代初,在我刚完成具有正瑞奇(Ricci)曲率的三维流形瑞奇流的第一篇论文时,丘立刻意识到了它的重要性.虽然我证明了一个他一直在用极小曲面从事研究的结果,他不仅没有表现出任何嫉妒之意,而是成为我最有力的支持者.早在当时,他就向我指出瑞奇流可以形成瓶颈(Neck Pinch)奇点,这些奇点会解决连通和分解的问题,这样就可以导致庞加莱猜想的一个证明.1985年,他把我、Rick Schoen(注:现St anford大学数学系教授)和Gerhard Huisken(注:现德国马克斯－普朗克引力物理研究所所长)一起带到了加州大学圣地亚哥分校,我们四人形成了一个非常活跃且颇具成效的几何分析研究小组.当时Huisken主攻超曲面的平均曲率流,这是一个几乎和Ricci流平行的研究方向,也是对内蕴和外蕴曲率来说最自然的几何流.丘成桐反复鼓励我们用一些类似于椭圆方程研究中发展出来的极小曲面方程中的技巧来研究这些抛物方程中奇异点的放大问题.在极小曲面方程方面,丘与Rick是该方面的专家.如果没有丘成桐早期的指导和支持,就不会发展出整套的Ricci流纲领,Perelman最后完成的正是这一纲领.

丘还有一些跟随他从普林斯顿到圣地亚哥分校的非常杰出的学生,特别是曹怀东、周培能和施皖雄三人.丘成桐鼓励他们研究瑞奇流,他们对这个领域也作出了非常重要的贡献.曹怀东证明了在正则Kaehler情形中归一化瑞奇流总是具有存在性,并具有对零或负的陈类的收敛性.曹怀东的结果是佩雷尔曼在Kaehler瑞奇流研究中激动人心的工作的基础,佩雷尔曼证明了瑞奇流对于正的陈类半径与标度曲率是有界的.周培能除了在其他几何流方面有很多杰出的工作之外,还把我在二维球上瑞奇流的工作推广到了曲率可变号的情形.施皖雄开创了完整非紧流形上瑞奇流的研究,在许多漂亮的论证基础上他证明了瑞奇流的局部微商估计.奇异点的放大通常会产生非紧致解,证明放大极限的收敛性总是要依赖于施皖雄的微商估计,所以施皖雄的工作是佩雷尔曼和我使用的所有极限论证方法的关键.

1982年,丘成桐和李伟光(Peter Li)写了一篇超乎寻常重要的论文,文章给出了线性热方程的逐点微分不等式,它在沿曲线积分后可以给出经典的Harnack不等式.丘成桐反复地鼓励我研究这篇论文,基于他们的方法,我得以证明瑞奇流和平均曲率流的Harnack

① 本文摘自《科学时报》,2006年9月29日.

不等式.这种由李－丘的工作所得到的 Harnack 不等式是对我开创的早先的解决方案进行分析的基础.Perelman 完成了这一分析,并且这正是他的正则邻域定理中所用到的基本工具.曹怀东证明了 Kaehler 情形中瑞奇流的 Harnack 估计,而周培能则证明了 Yamabe 流和高斯曲率流的 Harnack 估计.

故事远还没有结束于此.佩雷尔曼最重要的工作是瑞奇流非坍塌性结果不仅仅在三维而且在任意维数中都有效.它对未来的意义超出了庞加莱猜想本身,这成为排除雪茄型奇点的工具,而雪茄型奇点正是我未能解决的一种奇异点分类.这个结果有两个证明,一个使用了逆向标量热方程的熵,另一个使用了路径积分.这里对熵的估计来自于对共轭热方程的李－丘微分型 Harnack 不等式的积分,另一种估计是对同样的 Harnack 不等式的最优李－丘路径积分.正如佩雷尔曼在他的第一篇论文 7.4 节中的所承认的,他写道:"一个更为相关的参考文献是[L－Y],这里他们所用的一个与线性抛物方程相关的'长度',这与我们的情形几乎一模一样."

多年来,丘成桐一致不懈地支持瑞奇流和整个几何流领域的研究.这些研究还导致了其他重要的成就,比如最近 Huisken 和 Ilmanen 对 Penrose 猜想的证明,这是广义相对论中非常重要的结果.我不认为除丘之外还有能够对我们的领域给以如此之多的支持的卓越领袖.

丘建立的是一个天才的团队,而不是权力的帝国.人们被他的活力、睿智和他对一流数学家坚定不移的支持所吸引,丘成桐将他们聚集在一起攻克最难的问题.在过去的许多年里,丘和我在瑞奇流和其他问题上一起度过了无数时间,常常是工作到深夜.从研究瓶颈奇点时开始,他就一贯无私地与我分享他的建议与意见,而从不要求得到任何个人荣誉.事实上,就在去年冬天,当我最后证明了一个我们一起研究多年的问题,即瑞奇流的 Harnack 不等式的局部情形,我提出应该将他的名字也写进论文,他却谦虚地谢绝了.不幸的事情是,现在他的人品被这样不合事实地描写出来.据我所知,他从来没有提出过任何划分荣誉的百分比的事情,也没有说过佩雷尔曼应该和除我之外的任何其他人分享关于证明庞加莱猜想的荣誉.这当然是容易理解的,因为没有人比佩雷尔曼更加慷慨地承认我的工作.所谓丘窃取佩雷尔曼成就的说法远非事实,相反,丘一直称赞佩雷尔曼的工作,并和我一起支持他获得菲尔兹奖.事实上,没有谁比丘更应该为瑞奇流纲领的创建负责,而佩雷尔曼正是用它获得了这个(菲尔兹)奖.

您的忠诚的
理查德·汉密尔顿
哥伦比亚大学数学教授

背景链接

近几个月来,有关庞加莱猜想的证明和中国科学家在其中的贡献问题在国际、国内引起了广泛关注.今年[①]8 月 28 日出版的美国《纽约客》杂志发表一篇题为《流形的命运——一个传奇的难题和谁解决它之争》的 14 页长篇文章,文章中有一幅漫画:坐在椅

① 2006 年——校注.

子上的丘成桐正在从佩雷尔曼先生脖子上夺取"菲尔兹奖章",文章的两位作者分别是纽约哥伦比亚大学新闻学院教授西尔维亚·娜萨和鲁杰斯大学(Rutgers University)海洋与海岸科学研究所的大卫·格拉布尔.

9月18日,作为哈佛大学数学系教授丘成桐的代理律师,波士顿Todd&Weld律师楼律师霍华德·库珀(Howard M. Cooper)致信娜萨和格拉布尔,以及《纽约客》负责"核查事实"的杰西卡·罗森博格女士,指出这篇文章用"错误和捏造的事实"对丘成桐造成了严重的诽谤,要求《纽约客》和娜萨在杂志显著的位置对该文中的错误进行更正,并为文中侮辱性的插图作出道歉,以消除因这篇文章的出版而在世界范围内对丘成桐声誉造成的损害.

库珀在信中指出:"丘博士和我准备就此事立即与你们和你们的律师会面,商讨如何着手或采用你们可以提供的方法来消除你们所造成的损害.如果你们不愿协助这种努力,那么你们将让丘博士别无选择,只有考虑采取进一步的行动."

9月20日,《纽约客》发表声明,回复库珀的律师信.声明中说:娜萨和格拉布尔花了4个多月的时间,在经过仔细地报道和谨慎地事实检查后,才写出这篇文章……与丘博士的指责相反,这篇文章措辞谨慎、公正,文章的形成过程使用的是新闻职业道德标准.丘博士和其支持者以及他的观点都在这篇文章中占有大量的空间.声明最后说:"我们支持这篇文章和新闻记者."

2006年9月26日,美国哥伦比亚大学数学系教授理查德·汉密尔顿(Richard S Hamilton)致信丘成桐律师库珀,他在信中说:"丘成桐在《纽约客》的文章被以不公正的方式描写让我感到极大的不安.我在下面提供给你我关于此事的看法,以正视听."

汉密尔顿出生于1943年,1966年在美国普林斯顿大学获得博士学位,现在是美国纽约哥伦比亚大学数学系教授,美国科学院院士,他创立的瑞奇流方程及其理论成为几何分析领域中最重要的方法之一,并成为解决庞加莱猜想的有效工具.在国际数学界,他被誉为"瑞奇流之父".

在庞加莱猜想的证明中究竟有没有中国科学家的贡献?他们的贡献在哪里?今年6月15日,汉密尔顿在北京访问时曾谈到庞加莱猜想.他说,最早提示自己将瑞奇流用来证明庞加莱猜想的是华裔数学家丘成桐,佩雷尔曼借助瑞奇流在证明庞加莱猜想中获得"重大突破","曹怀东与朱熹平最近在佩雷尔曼与前人工作的基础上,给出了关于庞加莱猜想的一个完整与详细的描述".详细披露了中国人在庞加莱猜想证明中的贡献.

9月26日,在致库珀的信中,汉密尔顿再次讲述了瑞奇流用于庞加莱猜想证明的来龙去脉,并授权库珀公开此信.

首届数学文化节

第一轮活动　“基础知道闯关”书面问题解答

（2005年12月4日　上午8:30 ~ 10:30）

亲爱的读者，欢迎你参加江苏教育出版社《时代数学学习》编辑部主办的首届数学文化节！

数学文化无处不在．当你通过数学学习，发现自己头脑更加聪明、有办法，说话、做事更加公正客观、有条有理，学会运用数学的思想方法解决问题，探索自然和社会生活的种种奥秘…… 这时，你就已经触摸到数学文化的脉搏了．参加本届数学文化节活动，如果你觉得不仅是解答了一些数学问题，而且感受到数学文化的美丽芬芳，主办者和你的老师就心满意足了．

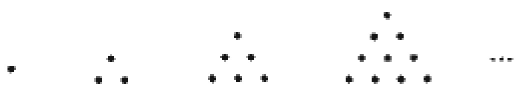
好，让我们从“数学之史”开始这次数学文化巡礼吧！

（注：以下各题，1 ~ 19题每题7分，第20题17分．选择题的4个答案中只有一个是正确的）

数学之史

1．*无穷探索*　圆周率π是一个无限不循环小数3.141 592 6…，我国古代数学家对圆周率的研究作出了重大贡献．古算书《周髀算经》记载了“周三径一”；东汉科学家张衡进一步估算得π约为3.16；三国时期的数学家刘徽用“割圆术”求得π约为3.14；魏晋南北朝时期的数学家________对圆周率进行了深入的研究，他算出π的值在3.141 592 6与3.141 592 7之间，并取“约率”$\frac{(\quad)}{7}$（填分子，下同）、“密度”$\frac{(\quad)}{113}$作为圆周率的近似值．

2．*童年回忆*　毕达哥拉斯定理（我国称之为勾股定理）是数学中的一颗明珠．古希腊毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，他们常把数描绘成沙滩上的沙子或小石子，根据沙子或小石子排列的形状把整数进行分类．如：1，3，6，10，… 这些数叫做三角形数（如图），则整数55，364，1 830中，________是三角形数．



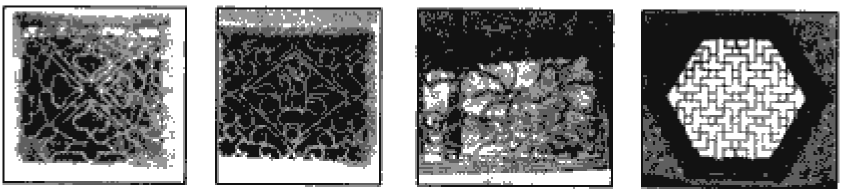
（第2题）

数学之美

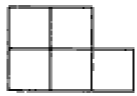
3. 文化瑰宝　苏州古典园林是“世界文化遗产”之一. 世界遗产委员会这样评价她：“没有哪些园林比历史名城苏州的四大园林更能体现出中国古典园林设计的理想品质，咫尺之内再造乾坤，苏州园林被公认是实现这一设计思想的典范. 这些建造于 16 ~ 18 世纪的园林，以其精雕细琢的设计，折射出中国文化取法自然而又超越自然的深邃意境.”

你去过苏州古典园林吗？漫步其间，处处是美，即使是墙上的漏窗也不例外，呈现出典雅精致的对称美. 下面是苏州拙政园的 4 幅漏窗照片，其中是轴对称图形（不考虑其背景）的有（　　）.

A. 1 幅　　B. 2 幅　　C. 3 幅　　D. 4 幅



4. 对称设计　如图是由 5 张大小相同的正方形纸片拼成的图形. 现只移动其中 1 张纸片，使 5 张纸片组成轴对称图形，要求每张纸片至少有 2 个点与其余纸片相连，但纸片彼此不覆盖，请画出尽可能多的不同形状的图形.（旋转后能重合的图形看成是同一种形状）



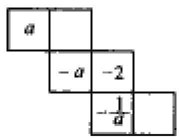
（第 4 题）

5. 天鹅湖　一群天鹅，飞越天空，寻找大湖作为栖息地. 每到一个大湖，天鹅群中总是有一半多 1 只留下，其余的继续飞行. 照此下去，在第四个大湖上正好留下了最后所有的天鹅. 则这群天鹅在第四个大湖上还有________只，最初共有________只.

数学之思

6. 给数排队　已知 a,b 为有理数，且 $a>0,b<0,a+b<0$. 将四个数 $a,b,-a,-b$ 按由小到大的顺序排列是________________.

7. 面面相对　如图是一个正方体表面展开图. 请在图中空格内填上适当的数，使这个正方体相对两个面上标注的数值相等.



（第 7 题）

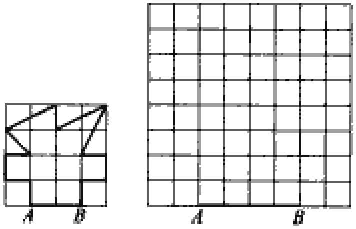
8. 北京欢迎您　为迎接 2008 年北京奥运会，体育迷小明设计了一个“火炬”图案（如图(a)），请你帮帮他：

(1) 利用网格，在图(b) 中根据画出的手柄直径 AB，把图(a) 按比例放大；

(2) 如果两图中小方格的边长都是 1，那么图(a)、图(b) 中火炬图案的面积分别是________.

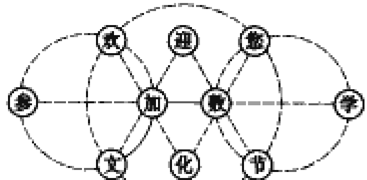
9. 文化乐园　如图，“欢、迎、您、参、加、数、学、文、化、节”十个字各代表 1 ~ 19 中的不同奇数. 且每个圆上的四个数之和，经过圆心的直线上的四个数之和都是 36，“欢 — 加 — 化”、“化 — 数 — 您”上的三个数之和都是 37；“迎 — 加 — 文”、“迎 — 数 — 节”上的三个数之和都是 39. 已知“欢、迎、您”三个字分别代表 15，19，11，请依次写出“参、加、

数、学、文、化、节”代表的数：________________.



(a)　　(b)

（第 8 题）



（第 9 题）

10. 一个也不能少　非零整数 m,n 满足 $|m|+|n|-5=0$，所有这样的整数组 (m,n) 共有________组.

11. 商家头脑　1 杯鲜橙汁售价 1.80 元. 现商家促销：买 1 杯鲜橙汁送奖券 1 张，3 张奖券兑换 1 杯鲜橙汁. 每张奖券的价值相当于（　　）.

A. 0.3 元　　B. 0.45 元　　C. 0.5 元　　D. 0.6 元

12. 火眼金睛　由 2，4，5，7 组成的没有重复数字的四位数中，只有一个四位数 a 是另一个四位数的整数倍，则 a 等于________.

13. 浮想联翩　若代数式同时满足条件：(1) 含字母 a,b；(2) 含有关于字母 a,b 的加、减、乘、除和乘方运算；(3) 当 $a=-1,b=3$ 时，该代数式的值等于 -7.

请写出一个这样的代数式：________________.

数学之用

14. 数理不分家　2005 年是世界物理年，也是物理学巨人爱因斯坦逝世 50 周年. 爱因斯坦著名的质能公式 $E=mc^2$（其中 c 为光速，约 3×10^8 m/s），刻画了物质所含的能量 (E) 与质量 (m) 之间的深刻联系，揭示出物质所含能量之巨大！

根据公式 $E=mc^2$，计算质量为 1 g 的物质所含的能量为________J（质能公式中质量单位为 kg，速度单位为 m/s 时，能量单位为 J）.

在通常情况下，1 t 无烟煤燃烧产生的热能约为 3.4×10^{10} J. 如果 1 g 无烟煤所含的能量完全释放出来，即全部转化为能量，那么这一能量约相当于________t 无烟煤燃烧产生的热能.

15. 志趣相投　学校有 4 个课外活动小组：数学组、美术组、书法组和文体组. 某班有 42 名学生，每人都参加了其中的一个组或两个组，那么该班至少有________名学生参加的课外活动小组完全相同.

16. 你相信吗　一群学生参观徐州古迹——龟山汉墓，景点讲解员介绍：“龟山汉墓不仅工程浩大，雕琢精细，而且测量建造也极其精确. 笔直的两条墓道几乎平行，夹角仅为 20″，相距约 19 m. 如果延长这两条墓道，它们将于 800 公里以外相交呢！”你认为这位讲解员的最后一句话（画浪线部分）是否正确？________.（填“是”或“否”）

17. *文武双全*　七年级(1)、(2)、(3)班各派4名代表参加射击比赛，每队每人打两枪，射中内环得50分，射中中环得35分，射中外环得25分，脱靶得0分. 统计比赛结果，(1)班8枪全中，(2)班1枪脱靶，(3)班两枪脱靶，但三个班的积分完全相同，都是255分.

请将三个班分别射中内环、中环、外环的次数填入右表.

班级	内环	中环	外环
(1)班			
(2)班			
(3)班			

18. *幻想当然*　静水中航行，甲船的速度比乙船大. 在水流速度不为零的河流中，甲乙两船同时从A港出发，同向航行1 h后立即返航，那么(　　).

A. 甲船先返回A港　　B. 乙船先返回A港

C. 甲、乙两船同时返回A港　　D. 不能确定哪条船先返回A港

19. *问题新编*　"鸡兔同笼"是传统的名题：笼中鸡兔若干，数一数共有35个头，94只脚. 问鸡、兔各有几只？

设有鸡x只，则兔有$(35-x)$只，可列出方程

$$2x+4(35-x)=94 \qquad ①$$

解方程①可求得鸡、兔的只数.

在大千世界里，许多事物的数量关系本质上是相同的，这是数学具有广泛应用的重要原因之一. 下面是一道尚未编完的应用题，请你补充完整，使列出的方程与方程①相同：

"甲、乙两种品牌的电视机，甲品牌的电视机每台2 000元，乙品牌的电视机每台4 000元，______________________________________."

数学之语

20. *文质彬彬*　请以《数轴的自述》为题写一篇短文，字数为200～300，体裁不限. 要求文中用到以下"关键词"：相反数，绝对值.

第二轮活动 “能力素质挑战”书面问题解答

（2005年12月18日　上午8:30～10:30）

亲爱的读者，欢迎参加江苏教育出版社《时代数学学习》编辑部主办的首届数学文化节！在第一轮“基础知道闯关”活动中，你已经感受到扑面而来的数学文化气息．以你良好的基础，完全有信心从容地接受第二轮活动的“能力素质挑战”！这里，重要的不是为了胜人一筹，而是由此更上一层楼，进一步明白学好数学需要多方面的知识和素养，同时再一次展现你的灵性和潜能，品味数学文化的美丽芬芳和博大精深，简单些吧，写成一个公式：

广泛阅读＋深入思考＋仔细品味＝享受数学

再简单些吧，写成一个“数学公式”：G＋S＋Z＝X．

Let's go!

（注：满分150分，1～20题每题7分，第21、23题每题3分，第22题4分．选择题只有一个正确答案）

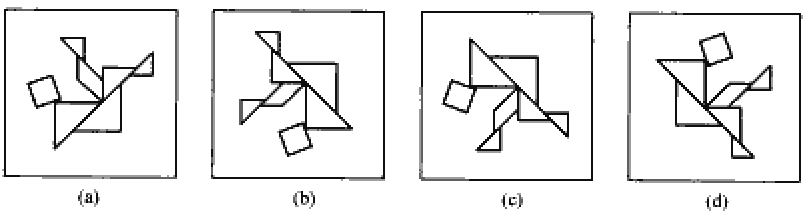
数学之史

1．几何鼻祖　古时候，人们从生活实践中积累了丰富的几何知识．公元前300年左右，古希腊数学家欧几里得对它们进行了系统整理，写成一部数学巨著，书名是________________．书中先给出少数基本定义、数学事实和原理，然后以它们为根据，严格推演出数百个几何结论，成为后世数学科学研究的典范．

例如，从“平面上两点之间，________最短”可以推出“三角形的两边之和________第三边（填“大于”、“小于”或“等于”）”．

2．数学群星　华人著名科学家：华罗庚、苏步青、陈省身、竺可桢、茅以升、陈景润中，________________是数学家．

3．七巧世界　七巧板是我国古代劳动人民的智慧结晶，在国际上受到广泛重视，英文里有一个专门单词________（填翻译后的汉语名称）称呼七巧板．下面的4幅由七巧板拼成的人物图案中，有3张完全相同，则与众不同的那一张是（　　）．



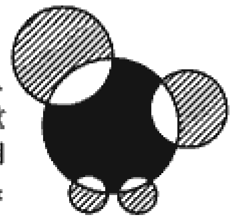
(a)　(b)　(c)　(d)

（第3题）

数学之美

4.透过表面

(1) 如图,有半径分别为7 cm,5 cm,4 cm,2 cm,2 cm的5个圆.要求将4个较小的圆与最大的圆进行重叠,使大圆中与小圆不重叠部分(黑色)的面积正好等于4个小圆中与大圆不重叠部分(阴影部分)的面积之和.请简要说明你的方法:________.



(第4题)

(2) 如果透过图形的外表,仔细反思你的解题过程,然后将5个圆改变成6个圆,当最大圆的半径仍然是7 cm,并且5个较小的圆与最大的圆进行重叠时,大圆中与小圆不重叠部分的面积正好等于5个小圆中与大圆不重叠部分的面积之和.那么,这5个较小圆的半径(都是整数,单位:cm)从大到小依次可以是________.

5.对称与对仗　《时代数学学习》曾发表过张奠宙教授的文章《对称与对仗》,文中指出,轴对称图形沿对称轴折叠后能完全重合,这种"变中有不变"的思想,在古典文学诗词中就是"对仗".例如唐朝王维的诗句"明月松间照,清泉石上流",内容从描写月亮到描写泉水,确有变化,但这一变化中有许多是不变的,特别是两句中对应词的词性不变.如"明"、"清"都是形容词,"月"、"泉"都是名词(景物).

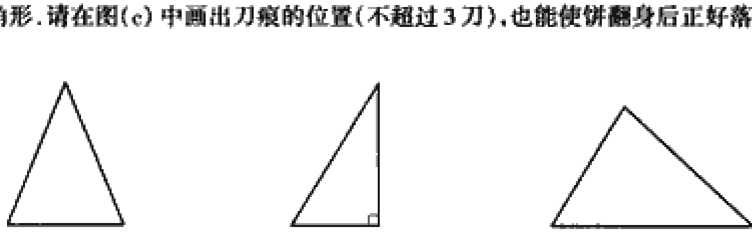
请你再写出两首古代名诗中的对仗句:________;________.

6.烙饼翻身　野营活动中,同学们创造性地选用铁皮代替锅来烙饼.

(1) 小明找到一张如图(a)的等腰三角形铁皮,用它烙一块与铁皮形状、大小相同的饼.烙好一面后把饼翻身,这块饼仍能正好落在"锅"中,这是因为________.

(2) 小倩只找到一张如图(b)的直角三角形铁皮,用它烙一块与铁皮形状、大小相同的饼,这块饼翻身就不能正好落在"锅"中.小华将饼切了一刀(沿直线切饼,下同),然后把两小块饼都翻身,它们也能正好落在"锅"中.请你在图(b)中画出上述刀痕.

(3) 小强最后拿到的是一张如图(c)的三角形铁皮,但它既不是等腰三角形又不是直角三角形.请在图(c)中画出刀痕的位置(不超过3刀),也能使饼翻身后正好落在"锅"中.



(a)　(b)　(c)

(第6题)

7.数也对称

(1) 计算(直接填写结果).

$\frac{22\times 22}{1+2+1}=$ ________;

$\frac{333\times 333}{1+2+3+2+1}=$ ________.

(2) 先猜想结果,再计算验证.

$\frac{4\,444\times 4\,444}{1+2+3+4+3+2+1}=$ ________;

$\frac{55\,555\times 55\,555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}=$ ________.

(3) 归纳:设 N 是各位数字都是 n 的 n 位数(n 是小于 10 的正整数),那么 $\frac{N\times N}{1+2+3+\cdots+n+(n-1)+\cdots+2+1}$ 是________位数,其正中的一个数字是________.

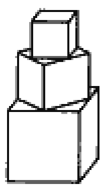
数学之思

8.滴水不漏　点 M,N 为线段 AB 上的两点,若 $AB=20$ cm,$AM=12$ cm,$MN=4$ cm,则 $NB=$ ________.

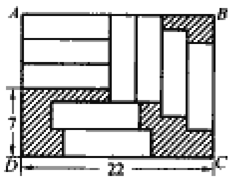
9.不思则罔　小刚被邀请参加另一个班的数学晚会,回来后告诉小飞:"晚会上共有 40 道抢答题,规定答对一道题得 5 分,不答得 1 分,答错一道题得 -3 分.抢答结束后,统计各人所得分数,总分好像是 147 分吧!"小刚所说的总分是否记错了,简要说明理由:________________.

10.积木成塔　如图是由若干个正方体形状的积木堆成的,平放于桌面上.其中,上面 1 个正方体下底面的 4 个顶点正好是相邻的下面 1 个正方体的上底面各边的中点.如果最下面的正方体的棱长为 1,且这些正方体积木露在外面的面积之和超过 8,则正方体积木最少有________个.按此规律不断堆下去,请估计,这些正方体积木露在外面的面积之和与整数________最接近.

11.纵横错落　如图,长方形 $ABCD$ 中,放置 9 个形状、大小都相同的小长方形(尺寸如图),则图中阴影部分的面积是________.



(第 10 题)



(第 11 题)

12.巨人文肩　(1) 用简便方法计算:$2\,005+2\,008+1\,997+2\,012+1\,995+1\,989+1\,992+2\,006+2\,017+1\,981=2\,000\times 10+[5+8+(-3)+12+(-5)+(-11)+$

$(-8)+6+17+(-16)]=$ ________.

(2) 大数学家高斯在小学时曾用巧妙的方法很快求出 $1+2+3+\cdots+100$，即把它写成 $(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)=101\times 50=5\ 050$.

请你运用解第(1)题的方法，给出计算 $1+2+3+\cdots+100$ 的另一种简便方法. 写出简要计算过程：________________________.

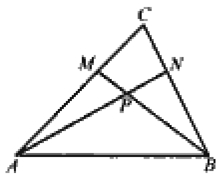
13. 十全十美　在下列算式的九个方框中填入"×"号或"÷"号，使等式成立：

$$10\square 9\square 8\square 7\square 6\square 5\square 4\square 3\square 2\square 1=\frac{64}{7}$$

请写出所有不同的填法(算式)：________________.

14. 你长我也长　小辉在小学某年级时，他的年龄是其他3个小伙伴年龄的平均值. 现在小辉上七年级了，已成长为一个12岁的少年. 那3个小伙伴中的两个现在的年龄分别是10岁，15岁，还有一个当年的小伙伴现在是________岁.

15. 动与静　如图，$\triangle ABC$ 的面积为12，点 M，N 分别是 AC，BC 边上的两个动点，点 M 由点 A 出发沿着 AC 向点 C 运动，同时点 N 由点 B 出发沿着 BC 向点 C 运动. BM 与 AN 相交于点 P，当四边形 $CMPN$ 的面积与 $\triangle APM$ 及 $\triangle BPN$ 的面积都相等时，(1) 求 $\triangle APB$ 的面积(写出解答过程)；(2) 你还能发现哪些结论？(至少写两个)



(第15题)

数学之用

16. 量天丈地　如图，有一把长为9 cm的直尺，请在尺上标注3条刻度，使得利用这把直尺可以一次量出从1 cm至9 cm的所有整数厘米长度.(注：给出一种方法即可)



(第16题)

17. 销售策略　有甲、乙两种糖果，原价分别为每千克 a 元和 b 元. 根据柜台组调查，将两种糖果按甲种糖果 m kg与乙种糖果 n kg的比例混合，取得了较好的销售效果. 现在糖果价格有了调整：甲种糖果单价上涨 $c\%$，乙种糖果单价下跌 $d\%$，但按原比例混合的糖果单价恰好不变. 那么 $\frac{m}{n}$ 等于(　　).

A. $\frac{ac}{bd}$　　B. $\frac{ad}{bc}$　　C. $\frac{bc}{ad}$　　D. $\frac{bd}{ac}$

18. 家长会上　某校开了一次家长会，参加者是部分老师和学生家长，共有31人. 会上，第1位老师与16位家长交换意见；第2位老师与17位家长交换意见；第3位老师与18位家长交换意见 …… 依此类推，直到最后一位老师与所有与会的家长交换意见.

参加这次会议的老师有________位，家长有________位.

19. 破译密码　密码在通信安全技术、国防军事中扮演着重要角色. 下面6道算式，

乍看真是莫名其妙!

①$8+7=62$;②$5+3=5$;③$12+8=23$;④$50+9=54$;⑤$11\times 1=55$;⑥$0-9=1$.

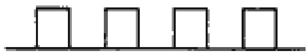
当你知道这只是密码算式,各个密码数字各自对应另一个不同数字时,算式就合理了.

请根据算式,写出表中密码所对应的数字.

密码	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
对应数字										

20. *隐身数*　你觉得手机很神奇吗?它能在瞬间清晰地传递声音、文字、图像等信号,据说以后还能发送味道、触觉信息呢!这里都有手机中电脑芯片的功劳.其实,这些信号在电脑芯片中都是以二进制数的形式给出的.每个二进制数都由0和1构成,电脑芯片上电子元件的“开”、“关”分别代表“1”和“0”.一组电子元件的“开”“关”状态就表示相应的二进制数.例如“开”“开”“关”表示“110”.

如图,电脑芯片的某段电路上分布着一组电子元件(假设它们首尾不相连),且相邻的两个元件不能同时是关的.(以下各小题要求写出解答过程)



(第20题)

(1) 若此电路上有4个元件,则这4个元件所有不同的“开”“关”状态共有多少种?(请一一列出)

(2) 若用a_k表示电路上$k(k\geq 1)$只电子元件所有不同的“开”“关”状态数,试探索a_k,a_{k+1},a_{k+2}之间的关系式(不要求论证);

(3) 试用(2)中探索出的递推关系式,计算a_{10}的值.

数学之谐

21. *幸运52*　中央电视台李咏主持的《幸运52》节目中,有一种两人游戏:李咏向甲出示一张纸条,让甲用语言或动作将纸条上的内容告诉乙,但甲的叙述中不能出现纸条上的字.

假设你和同伴小张玩这种游戏,李咏向你出示的纸条上面写着“0”,你对小张可以说“两个相同的数的差”等,但不能说“零”.你还有其他说法吗?请写出3种不同的说法(要求语言简练、准确)①______________;②______________;③______________.

22. *诗言数*　希腊是世界四大文明古国之一,在《希腊文集》中有这样一道用诗歌写成的数学题:

爱神的烦忧

爱神爱罗斯正在发愁,
女神吉波莉达问其理由:
“你为什么烦忧,我亲爱的朋友?”

爱罗斯回答:"我在黑里康山采回仙果,
路遇九位文艺女神嬉戏抢夺.
叶芙特尔波抢走七分之一,
爱拉托抢得一样多 —— 每七个仙果中拿走一个,
八分之一被达利娅抢走,
比这多一倍的仙果却落入了特希霍拉之手.
美利波美娜算是客气,每二十个仙果中拿走了一个.
可又来了克里奥,她的收获为这四倍之多.
波利尼亚拿得最少,也还有三十个仙果.
最后两位也不空手:一百二十个仙果归乌拉尼娅,
而卡利奥帕却拿走了三百个之多.
我回家时几乎两手空空,仅给我剩下五十个仙果."

请你算一算,爱神爱罗斯当初摘了________只仙果.(注:诗歌中多少分之一都是相对于当初仙果的总数而言)

23. *数学理趣* 人们常将数学语言(数、式和图形等)赋以新的含义,使之富有哲理和寓意美.例如:① 零和负数 —— 在有理数里,负数比零小;在生活里,坏思想比无知更糟.② 直线 —— 向两边延伸,无始无终,无边无际,代表着果断、刚劲和一往无前的毅力.③ 圆 —— 从各个方向看都是同一个图形,完美的对称性使人产生"完美无缺"的美感和向往,因而有"圆满"、"圆润"之说和"花好月圆"的祝愿.

请你就下列数学对象写出你的感言(富有哲理和趣味):

(1) 相反数________________________________.

(2) 分数__________________________________.

(3) 等腰三角形____________________________.

“道同志合”荐好书

——一封田廷彦的来信

刘老师：

您好！

在与您的多次交往中，我发现我们是同道中人，以前常有志同道合的说法，现在道不同也难以相识，我看倒不如是“道同志合”（当然这两个概念并列的话就无所谓了）.

2004年秋，在一个朋友吴焦苏的介绍下，我（和吴一起）去了一趟在浦东刚成立的中科大上海研究院.在那里，我遇到了胡森教授，还有李淼、吴泳时、高怡泓等几位理论物理学家（胡教授的研究方向是几何拓扑及其和量子场论的联系，与理论物理学家关系密切）.教授和研究生都短期住在那里.那天天气很好，讨论班在一间不大的教室里进行，有的学生还穿着拖鞋.

几位教授虽说不是什么大人物，但毕竟颇有成就，而且我也是头一回认识，所以有几分紧张.比如胡森，他是吴文俊的硕士研究生，普林斯顿大学的博士；在记录了大名鼎鼎的超弦“教主”威滕（E. Witten）的课堂讲义后，出了一本英文专著.不过，经接触我倒并不觉得有什么不自在.胡教授竟然记住了我，后来还把多篇丘成桐先生的文章转到我这里发表，这使我感到非常欣慰.

我认识了胡森教授后，他在一次 *E-mail* 中说能不能推荐点书给他，我就输入了这些东西（以数理图书为主），现在我们要把科学文化特别是数学文化推荐给大众.我觉得“历史”还没有终结，还有很多事情要做.奥数只是我的一部分，当然在这方面也是比较有体会的.

您要是有兴趣借点书，我这里到上图借书很方便，复印也极其便宜，一面只有2分多点.我觉得有时间再看点外文书.

我推荐了很多书给湖南科技社，他们接受了.现在关于图灵和哥德尔的著名传记将开始翻译.一本关于群论历史的书将要出版，关于普林斯顿高等研究院历史，关于冯·诺伊曼、狄拉克和麦克斯韦的传记，也将翻译出版.我就在天天等了.以后还可能出欧拉与高斯的传记，也都是翻译的.至于我们这里，胡作玄要给我们翻译一个《数学的世纪——20世纪30个最伟大的问题》.数学文化必须得到数学家和社会的共同关注.

愿常联系！

祝好
田廷彦
2006.11.30

科普作品概览

目　录

1. 科学传记
2. 科学经典名著
3. 科学史
4. 科学概观
5. 科学哲学、科学与哲学
6. 科学与社会，科学与文化
7. 数学科普分类(益智游戏类)
8. 数学科普分类(非益智游戏类)
9. 数理经济学、决策科学、信息经济学、博弈论
10. 科学思想、科学随笔与科学访谈
11. 关于相对论、时空物理学与引力
12. 关于量子力学、对称性、粒子物理、量子计算和量子信息、数学密码
13. 关于超弦、超对称、大统一物理学前沿
14. 关于进化论与演化博弈
15. 生命科学、人类学与数理科学
16. 物质科学分类
17. 系统论、信息论、控制论
18. 耗散结构、混沌、分形、自组织临界现象、协同论与复杂性科学
19. 天文学、天体物理、黑洞和宇宙学
20. 生态学、博物学
21. 关于科学方法论
22. 认知心理学、数理逻辑、人工智能、计算理论与其哲学
23. 科学之美
24. 现代科学与宗教及东方传统哲学
25. 最新补遗

科普作品概览(约 1 100 种)①

1.科学传记

《突破维数障碍 —— 斯梅尔传》(巴特森)(翻译) 上海科技教育出版社

《逻辑人生 —— 哥德尔传》(卡斯蒂)(翻译) 上海科技教育出版社

*《知无涯者 —— 拉马努金传》(卡尼格尔)(翻译) 上海科技教育出版社

*《海森伯传》(上下)(卡西第)(翻译) 商务印书馆

《星云世界的水手 —— 哈勃传》(克里斯琴森)(翻译) 上海科技教育出版社

*《数学精英》(贝尔)(翻译) 商务印书馆

《通才的绝唱:彭加勒》(俞晓群等) 福建教育出版社

《费曼的最后旅程》(莱顿)(翻译) 沪港三联书店

《爱因斯坦与物理学的边疆》(伯恩斯坦)(翻译) 百花文艺出版社

《冯·诺伊曼和维纳》(杨泰俊等) 科学技术文献出版社

《弗雷格》(斯卢格)(翻译) 中国社会科学出版社

*《希尔伯特》(瑞德)(翻译) 上海科学技术出版社

《和谐与统一 —— 尼尔斯·玻尔的一生》(布莱德耳)(翻译) 东方出版中心

《约翰内斯·开普勒与新天文学》(威尔克尔)(翻译) 陕西师范大学出版社

《雷戈·孟德尔与遗传学的根源》(埃德尔森)(翻译) 陕西师范大学出版社

《华罗庚》(王元) 江西教育出版社

《爱丁顿》(钱德拉塞卡)(翻译) 上海远东出版社

《吴健雄》(江才健) 复旦大学出版社

《陈景润传》(王丽丽等) 新华出版社

《菲尔兹奖获得者传》(胡作玄等) 湖南科学技术出版社

*《费米传》(费米)(翻译) 商务印书馆

《一位数学家的经历》(乌拉姆)(翻译) 上海科学技术出版社

*《居里夫人传》(居里)(翻译) 商务印书馆

《数学大师启示录》(陈诗谷等) 中国青年出版社

《科学家传记百科全书》(丹弟斯等)(翻译) 四川辞书出版社

《我的一生 —— 马克斯·玻恩自述》(翻译) 东方出版中心

《伟大科学家的生活传记》(托马斯)(翻译) 江苏科学技术出版社

① 标 * 者为名著.

《正直者的困境 —— 马克斯·普朗克》(海耳布朗)(翻译) 东方出版中心
《真知灼见 —— 罗伯特·奥本海默自述》(翻译) 东方出版中心
《勒内·笛卡儿先生在他的时代》(弗雷德里斯)(翻译) 商务印书馆
*《昔日神童》(维纳)(翻译) 上海科学技术出版社
《近代四大物理学家》(缪克成) 华东师范大学出版社
《乱世学人 —— 维格纳自传》(维格纳等)(翻译) 上海科技教育出版社
《关于尼尔斯·玻尔的一些回忆》(罗森塔尔)(翻译) 江苏教育出版社
*《我是一个数学家》(维纳)(翻译) 上海科学技术出版社
*《一个时代的神话 —— 爱因斯坦的一生》(派斯)(翻译) 东方出版中心
《永远进取 —— 埃·塞格雷自传》(翻译) 东方出版中心
《约翰·惠勒自传》(翻译) 汕头大学出版社
《思想之网:牛顿》(袁江洋) 福建教育出版社
《柯瓦列夫斯卡娅》(科布利茨)(翻译) 科学技术文献出版社
《牛顿传》(格雷克)(翻译) 高等教育出版社
《费曼传》(格雷克)(翻译) 高等教育出版社
《牛顿的苹果》(毕尔科)(翻译) 外国文学出版社
*《美丽心灵》(上下)(娜萨)(翻译) 上海科技教育出版社
《杨振宁 ——20 世纪一位伟大的物理学家》(丘成桐) 广西师范大学出版社
《倾听天上的音乐 —— 开普勒》(车桂) 福建教育出版社
《世界著名数学家传记》(上下)(吴文俊主编) 科学出版社
《爱心护天才》(王则柯等) 三联书店
《毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派》(马泰伊)(翻译) 商务印书馆
《伟大的探索者 —— 爱因斯坦》(朱亚宗) 人民出版社
《牛顿传》(怀特)(翻译) 中信出版社,辽宁教育出版社
《斯蒂芬·霍金》(麦克丹尼尔)(翻译) 世界知识出版社
《冯·卡门 —— 航空与航天时代的科学奇才》(卡门等)(翻译) 上海科学技术出版社
《爱因斯坦 —— 一位旷世奇才的一生》(怀特)(翻译) 海南出版社
《计算机与网络之父》(叶平等) 天津教育出版社
《引起纷争的金苹果:康托尔》(胡作玄) 福建教育出版社
《奇异之美 —— 盖尔曼传》(约翰逊)(翻译) 上海科技教育出版社
《维纳 —— 通向信息世界的异端之路》(胡作玄) 福建教育出版社
《麦克斯韦》(埃弗里特)(翻译) 上海翻译出版公司
《我的大脑敞开了》(*Erdös* 传)(谢克特)(翻译) 上海译文出版社
*《数字情种》(*Erdös* 传)(霍夫曼)(翻译) 上海科技教育出版社
《追求和谐的世界 —— 尼尔斯·玻尔》(张来举) 福建教育出版社
《尼尔斯·玻尔传》(派斯)(翻译) 商务印书馆
《苏格拉底》(布伦)(翻译) 商务印书馆

科普天地

《牛顿传》(科恩)(翻译) 科学出版社
《杨振宁传》(徐胜蓝等) 复旦大学出版社
《达尔文回忆录》(达尔文) 商务印书馆
《希尔伯特:探索数学的生命》(王前) 福建教育出版社
《当代西方著名哲学家传(逻辑哲学)》(张尚水) 山东人民出版社
《伽利略》(德雷克)(翻译) 中国社会科学出版社
*《上帝难以捉摸 —— 爱因斯坦的科学与生活》(派斯)(翻译) 广东教育出版社
《达尔文》(霍华德)(翻译) 中国社会科学出版社
《我要作数学家》(哈尔莫斯)(翻译) 江西教育出版社
《数学家传略辞典》(梁宗巨) 山东教育出版社
《薛定谔传》(穆尔)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《我生活的种种模式:西蒙自传》(翻译) 东方出版中心
*《爱因斯坦传》(库兹涅佐夫)(翻译) 商务印书馆
《世界著名思想家辞典》(迪瓦恩等)(翻译) 河北人民出版社
*《玻尔兹曼》(切尔奇纳尼)(翻译) 上海科学技术出版社
《超越时代:莱布尼茨》(孙小礼等) 福建教育出版社
《伽利略的女儿》(索贝尔)(翻译) 上海译文出版社
《保尔·厄任费斯脱》(克莱因)(翻译) 清华大学出版社
《伽利略传》(库兹涅佐夫)(翻译) 商务印书馆
《几个女数学家》(袁向东等) 四川少年儿童出版社
《斯蒂芬·霍金的科学生涯》(怀特等)(翻译) 上海译文出版社
《帕斯卡》(克莱尔希默)(翻译) 中国社会科学出版社
《库朗 —— 一位数学家的双城记》(瑞德)(翻译) 东方出版中心
《阿基米德》(本迪克)(翻译) 中国少年儿童出版社
《你干吗在乎别人怎么想》(费曼)(翻译) 中国社会科学出版社
《罗素传》(克拉克)(翻译) 世界知识出版社
《奈曼》(瑞德)(翻译) 上海科学技术出版社
《薛定谔 —— 徜徉在量子王国》(胡新和) 福建教育出版社
《原子舞者 —— 费米传》(塞格雷)(翻译) 上海科学技术出版社
《*ACM* 图灵奖》(吴鹤龄) 高等教育出版社
《麦迪逊大街上的物理学家》(罗思曼)(翻译) 江西教育出版社
《隐匿中的奇才 —— 贝塔朗菲传》(戴维森)(翻译) 东方出版中心
《爱因斯坦传》(弗尔辛)(翻译) 时代文艺出版社
《伽莫夫自传》(翻译) 上海翻译出版公司
《当代数学精英》(李心灿等) 上海科技教育出版社
《当代数学大师》(李心灿等) 北京航空航天大学出版社
《牛顿传》(韦斯特福尔)(翻译) 中国对外翻译出版公司

《迷人的科学风采——费恩曼传》(格里宾等)(翻译)上海科技教育出版社
《华尔街的智慧天才》(梅林)(翻译)中信出版社
《蛇杖的传人》(努兰)(翻译)上海人民出版社
《爱因斯坦》(李醒民)商务印书馆
《镜头下的爱因斯坦》(罗森克朗兹)(翻译)湖南科学技术出版社
《亲爱的爱因斯坦教授》(卡拉普丽斯)(翻译)湖南科学技术出版社
《科学家100人》(西蒙斯)(翻译)当代世界出版社
《鲜为人知的爱因斯坦》(布莱恩)(翻译)金城出版社
《剑桥科学伟人》(哈曼等)(翻译)河北大学出版社
《恋爱中的爱因斯坦》(奥弗比)(翻译)上海科技教育出版社
《孤独的科学之路》(瓦利)(翻译)上海科技教育出版社
《世界100大科学家》(萨明)(翻译)东方出版社

2. 科学经典名著

*《几何原本》(欧几里得)(翻译)陕西科学技术出版社
*《阿基米德全集》(翻译)陕西科学技术出版社
*《物种起源》(达尔文)(翻译)商务印书馆
*《无穷分析引论》(上下)(欧拉)(翻译)山西教育出版社
*《数学珍宝》(翻译)科学出版社
*《电磁通论》(上下)(麦克斯韦)(翻译)武汉出版社
*《宇宙之谜》(海克尔)(翻译)上海人民出版社
*《天体运行论》(哥白尼)(翻译)武汉出版社
*《几何》(笛卡儿)(翻译)武汉出版社
*《超穷数理论基础文稿》(康托尔)(翻译)内蒙古大学出版社
*《宇宙发展史概论》(康德)(翻译)上海人民出版社
*《宇宙体系论》(拉普拉斯)(翻译)上海译文出版社
*《自然哲学之数学原理》(牛顿)(翻译)商务印书馆
*《爱因斯坦的奇迹年》(施塔赫尔主编)(翻译)上海科技教育出版社
*《热的解析理论》(傅里叶)(翻译)武汉出版社
*《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》(伽利略)(翻译)北京大学出版社
*《关于两门新科学的对话》(伽利略)(翻译)北京大学出版社
《科学名著赏析(天文卷)》(宣焕灿等)山西科学技术出版社
*《九章算术》(张苍等编)(译解)重庆大学出版社

3. 科学史

《牛顿与科学革命》(克里斯琴森)(翻译)吉林人民出版社
《近代科学的建构》(韦斯特福尔)(翻译)复旦大学出版社
《自然科学史》(梅森)(翻译)上海人民出版社
《二十世纪数学史话》(张奠宙等)知识出版社

《倒计时》(赫彭海默)(翻译) 上海科学技术出版社
《布尔巴基学派的兴衰》(胡作玄) 知识出版社
*《古今数学思想》(四卷)(克莱因)(翻译) 上海科学技术出版社
《二十世纪物理学历史与展望》(金兹堡)(翻译) 湖南教育出版社
*《物理学史》(广重彻)(翻译) 上海教育出版社
《世界数学通史》(梁宗巨) 辽宁教育出版社
*《逻辑学的发展》(涅尔等)(翻译) 商务印书馆
*《科学史》(上下)(丹皮尔)(翻译) 商务印书馆
《19 世纪物理学概念的发展》(哈曼)(翻译) 复旦大学出版社
《20 世纪物理学史》(魏凤文等) 江西教育出版社
《科学革命史》(科恩)(翻译) 商务印书馆
*《双螺旋》(沃森)(翻译) 三联书店
《惺惺宇宙》(希尔德布兰特等)(翻译) 上海教育出版社
《早期数学史选编》(艾鲍)(翻译) 北京大学出版社
*《微积分概念史》(波耶)(翻译) 上海人民出版社
《数学简史》(鲍尔加尔斯基)(翻译) 知识出版社
*《驯服偶然》(哈金)(翻译) 中央编译出版社
《激动人心的年代》(李醒民) 四川人民出版社
《与天为敌 —— 风险探索传奇》(伯恩斯坦)(翻译) 清华大学出版社
《20 世纪的生命科学史》(艾伦)(翻译) 复旦大学出版社
《集合论发展史》(张锦文等) 广西师范大学出版社
《圆的历史》(泽布罗夫斯基)(翻译) 北京理工大学出版社
《物理学史》(卡约里)(翻译) 广西师范大学出版社
《一代神话 —— 哥本哈根学派》(关洪) 武汉出版社
《俄罗斯和苏联科学史》(格雷厄姆)(翻译) 复旦大学出版社
*《从 X 射线到夸克》(赛格雷) 上海科学技术出版社
《激动人心的年代》(赫尔曼)(翻译) 江西教育出版社
《现代数学史》(库克)(翻译) 内蒙古人民出版社
《数理统计学简史》(陈希孺) 湖南教育出版社
《代数数论简史》(冯克勤) 湖南教育出版社
《物理学史》(劳厄)(翻译) 商务印书馆
*《基本粒子物理学史》(派斯)(翻译) 武汉出版社
《350 年历程 —— 从费尔马到维尔斯》(胡作玄) 山东教育出版社
*《费马大定理》(辛格)(翻译) 上海译文出版社
《数学史》(吉特尔曼)(翻译) 科学普及出版社
《20 世纪数学经纬》(张奠宙) 华东师范大学出版社
《环宇孤心》(奥弗比)(翻译) 中信出版社

*《创世纪的第八天》(贾德森)(翻译)上海科学技术出版社
《电磁学定律和电磁场理论的建立和发展》(陈熙谋等)高等教育出版社
《数学史》(斯科特)(翻译)广西师范大学出版社
*《西方科学的起源》(林德伯格)(翻译)中国对外翻译出版公司
《数学史教程》(李文林)高等教育出版社
《数学史译文集》(两册)(翻译)上海科学技术出版社
《数学历史典故》(梁宗巨)辽宁教育出版社
《数学史概论》(伊夫斯)(翻译)山西经济出版社
《近代数学史》(胡作玄)山东教育出版社
《悖论简史》(索伦森)(翻译)北京大学出版社
《女士品茶》(索尔斯伯格)(翻译)中国统计出版社
*《量子理论的历史发展》(梅拉)(翻译)科学出版社
*《二十世纪物理学》(韦斯科夫)(翻译)科学出版社
《爱因斯坦恩怨史》(斯特恩)(翻译)上海科技教育出版社
《早期希腊科学》(劳埃德)(翻译)上海科技教育出版社
《世界数学通史》(三册)(梁宗巨等)辽宁教育出版社
《数理逻辑发展史》(张家龙)社会科学文献出版社
*《物理学发展史》(伽莫夫)(翻译)商务印书馆
《拉普拉斯概率理论的历史研究》(王幼军)上海交通大学出版社

4. 科学概观

《今日数学》(斯蒂恩)(翻译)上海科学技术出版社
*《物理学的进化》(爱因斯坦等)(翻译)上海科学技术出版社
《大学数学》(克拉默)(翻译)复旦大学出版社
*《趣味物理学》(别莱利曼)(翻译)湖南教育出版社
《探求万物之理》(牛顿)(翻译)上海科技教育出版社
*《数学概观》(戈丁)(翻译)科学出版社
《宇宙的四十二级台阶》(莫里森)(翻译)科学技术文献出版社
《近代物理》(倪光炯等)复旦大学出版社
《当代物理学进展》(魏凤文等)江西教育出版社
《科学的未知世界》(邓肯等)(翻译)上海科学技术出版社
《自然规律中蕴蓄的统一性》(泰勒)(翻译)北京理工大学出版社
《数学巡礼》(彼得逊)(翻译)湖南教育出版社
*《从一到无穷大》(盖莫夫)(翻译)科学出版社
*《复杂》(沃尔德罗普)(翻译)三联书店
《科学前沿集》(洪定国主编)湖南科学技术出版社
*《数学是什么》(库朗)(翻译)湖南教育出版社
《理解宇宙》(穆尼茨)(翻译)中国对外翻译出版公司

《物理学的进展和前沿》(张瑞琨主编) 上海教育出版社
*《科学与近代世界》(怀特海)(翻译) 商务印书馆
《数学:新的黄金时代》(德夫林)(翻译) 上海教育出版社
*《上帝与新物理学》(戴维斯)(翻译) 湖南科学技术出版社
《物理科学的概念和理论导论(上下)》(霍尔顿)(翻译) 高等教育出版社
《普通人的物理世界》(琼斯)(翻译) 江苏人民出版社
*《不论》(巴罗)(翻译) 上海科学技术出版社
《20 世纪数学的五大指导理论》(卡斯蒂)(翻译) 上海教育出版社
《在岩石上漂浮》(齐默尔曼)(翻译) 江苏人民出版社
《科学难解之谜》(马隆)(翻译) 经济日报出版社
*《万物简史》(布莱森)(翻译) 接力出版社
*《物理定律的本性》(费曼)(翻译) 湖南科学技术出版社
《近现代数学发展概论》(张光远) 重庆出版社
*《当代数学:为了人类心智的荣耀》(迪厄多内)(翻译) 上海教育出版社
《20 世纪数学思想》(胡作玄等) 山东教育出版社
《数学的进化》(李文林) 科学出版社
*《费恩曼物理学讲义》(费恩曼等)(翻译) 上海科学技术出版社
《改变人类生活的 418 项发明与发现》(卡黎索)(翻译) 百花文艺出版社
《心理发生和科学史》(皮亚杰等)(翻译) 华东师范大学出版社
《大自然的常数》(巴罗)(翻译) 上海世纪出版集团
《宇宙逍遥》(惠勒)(翻译) 北京理工大学出版社
《20 世纪的物理学》(亚当斯)(翻译) 上海科学技术出版社

5. 科学哲学、科学与哲学

《现代物理学哲学问题》(薛晓舟等) 河南大学出版社
《科学哲学》(雅罗森)(翻译) 北京大学出版社
*《自然的观念》(柯林伍德)(翻译) 华夏出版社
《科学与反科学》(霍尔顿)(翻译) 江西教育出版社
*《科学革命的结构》(库恩)(翻译) 北京大学出版社
*《证明与反驳》(拉卡托斯)(翻译) 上海译文出版社
*《数学:确定性的丧失》(克莱因)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《哥德尔》(王浩)(翻译) 上海译文出版社
《自然哲学》(石里克)(翻译) 商务印书馆
*《理性、真理与历史》(普特南)(翻译) 上海译文出版社
《科学方法和科学动力学》(邱仁宗) 知识出版社
《伽利略研究》(柯伊列)(翻译) 江西教育出版社
《科学的哲学》(弗兰克)(翻译) 上海人民出版社
*《科学与假设》(庞加莱)(翻译) 商务印书馆

*《科学的价值》(庞加莱)(翻译) 辽宁教育出版社
《逻辑哲学》(哈克)(翻译) 商务印书馆
《科学哲学》(罗森堡)(翻译) 上海科技教育出版社
《数学哲学》(巴克尔)(翻译) 三联书店
《科学究竟是什么》(查尔默斯)(翻译) 河北科学技术出版社
《哥白尼革命》(库恩)(翻译) 北京大学出版社
*《数学哲学》(贝纳塞拉夫等编)(翻译) 商务印书馆
《牛顿自然哲学著作选》(翻译) 上海译文出版社
《物理学哲学》(邦格)(翻译) 河北科学技术出版社
《物理实在论》(洪定国) 商务印书馆
《分析哲学及其在美国的发展》(上下)(涂纪亮) 中国社会科学出版社
*《现代物理学中的因果性与机遇》(玻姆)(翻译) 商务印书馆
*《自然科学的哲学》(亨普尔)(翻译) 上海科学技术出版社
*《科学哲学的兴起》(赖兴巴哈)(翻译) 商务印书馆
《从封闭世界到无限宇宙》(柯瓦雷)(翻译) 北京大学出版社
《牛顿研究》(柯瓦雷)(翻译) 北京大学出版社
《牛顿革命》(科恩)(翻译) 江西教育出版社
*《真实世界的脉络》(多伊奇)(翻译) 广西师范大学出版社
*《从逻辑的观点看》(蒯因)(翻译) 上海译文出版社
*《认识论》(巴罗)(翻译) 商务印书馆
*《命名与必然性》(克里普克)(翻译) 上海译文出版社
*《尼尔斯・玻尔哲学文选》(翻译) 商务印书馆
*《理性主义》(陈宣良) 四川人民出版社
*《近代物理科学的形而上学基础》(伯特)(翻译) 四川教育出版社
*《何为科学真理》(牛顿)(翻译) 上海科技教育出版社
*《科学与方法》(庞加莱)(翻译) 辽宁教育出版社
*《物理学和哲学》(海森伯)(翻译) 商务印书馆
《科学哲学导论》(卡尔纳普)(翻译) 中国人民大学出版社
《逻辑与语言》(陈波等主编) 东方出版社
《科学:什么是科学》(波塞尔)(翻译) 上海三联书店
*《科学与怀疑论》(沃特金斯)(翻译) 上海译文出版社
*《猜想与反驳》(波普尔)(翻译) 上海译文出版社
*《客观知识》(波普尔)(翻译) 上海译文出版社
*《科学发现的逻辑》(波普尔)(翻译) 沈阳出版社
《理由与求知》(夏佩尔)(翻译) 上海译文出版社
*《科学的形象》(弗拉森)(翻译) 上海译文出版社
《当代实在论与反实在论之争》(张之沧) 南京师范大学出版社

*《我们关于外间世界的知识》(罗素)(翻译) 上海译文出版社
《科学哲学指南》(史密斯)(翻译) 上海科技教育出版社

6. 科学与社会,科学与文化

《微漪之塘》(拉兹洛)(翻译) 社会科学文献出版社
《真实地带》(赫尔曼)(翻译) 上海科学技术出版社
*《两种文化》(斯诺)(翻译) 三联书店
《让科学的光芒照亮自己》(刘青峰) 四川人民出版社
《科学与启蒙运动》(汉金斯)(翻译) 复旦大学出版社
《数学与社会》(胡作玄) 湖南教育出版社
《国际数学家大会百年图史》(阿伯斯等)(翻译) 江苏教育出版社
《文化科学与自然科学》(李凯尔特)(翻译) 商务印书馆
《数学在科学起源中的作用》(波克纳)(翻译) 湖南教育出版社
《数学的故事》(曼凯维奇)(翻译) 海南出版社
《科学与人》(哈里斯)(翻译) 商务印书馆
《进化 —— 广义综合理论》(拉兹洛)(翻译) 社会科学文献出版社
《科学知识:一种社会学的分析》(巴恩斯等)(翻译) 南京大学出版社
*《高级迷信》(格罗斯等)(翻译) 沪港三联书店
《站在巨人的肩膀上》(斯蒂恩)(翻译) 上海教育出版社
*《西方文化中的数学》(克莱因)(翻译) 复旦大学出版社
《鹦鹉的定理》(盖之)(翻译) 作家出版社
*《统计陷阱》(哈夫)(翻译) 上海财经大学出版社
《第三种文化》(布罗克曼)(翻译) 海南出版社
*《科学社会学》(默顿)(翻译) 商务印书馆
《φ的故事 —— 解读黄金比例》(利维奥)(翻译) 长春出版社
*《熵:一种新的世界观》(里夫金)(翻译) 上海译文出版社
《尚未解开的科学之谜》(马多克斯)(翻译) 国际文化出版公司
《邮票上的数学》(威尔逊)(翻译) 上海科技教育出版社
*《后现代转向》(贝斯特等)(翻译) 南京大学出版社
《数学无国界》(莱赫托)(翻译) 上海教育出版社
*《"索卡尔事件"与科学大战》(索卡尔等)(翻译) 南京大学出版社
*《系统、结构和经验》(拉兹洛)(翻译) 上海译文出版社
《数学与文化》(邓东皋等) 北京大学出版社
《后现代思想的数学根源》(塔西奇)(翻译) 复旦大学出版社
《数学与知识的探求》(克莱因)(翻译) 复旦大学出版社
《爱因斯坦与物理百年》(赖特等编)(翻译) 北京大学出版社
《爱因斯坦:历史与其他激情》(霍尔顿)(翻译) 南京大学出版社
《复杂性与后现代主义》(西利亚斯)(翻译) 上海世纪出版集团

*《科学社会学》(上下)(默顿)(翻译) 商务印书馆
《一种文化?》(拉宾格尔等)(翻译) 上海科技教育出版社
《思考宇宙》(韦尔代)(翻译) 译林出版社

7.数学科普分类(益智游戏类)

《稳操胜券》(谈祥柏) 江苏教育出版社
《数,上帝的宠物》(谈祥柏) 上海教育出版社
《登上智力快车》(谈祥柏) 中国少年儿童出版社
《数学营养菜》(谈祥柏) 中国少年儿童出版社
《数学广角镜》(谈祥柏) 江苏教育出版社
《谈祥柏科普文集》(谈柏祥) 上海科学普及出版社
《故事中的数学》(谈祥柏) 中国少年儿童出版社
*《数学游戏与欣赏》(鲍尔)(翻译) 上海教育出版社
《测试你的逻辑推理能力》(萨默斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《智力游戏中的数学方法》(倪进等) 江苏教育出版社
*《数学游戏》(上下)(科学美国人)(翻译) 科学技术文献出版社
《数学趣闻集锦》(上下)(帕帕斯)(翻译) 上海教育出版社
*《啊哈,灵机一动》(加德纳)(翻译) 湖南教育出版社
*《这本书叫什么》(斯穆里安)(翻译) 上海译文出版社
《数学的奇妙》(帕帕斯)(翻译) 上海教育出版社
《好玩的数学》(吴鹤龄) 科学出版社
*《数学万花镜》(史坦因豪斯)(翻译) 上海教育出版社
《邮票 · 自行车 · 果园 · 雨中行》(丁石孙) 北京大学出版社
《七巧板、九连环和华容道》(吴鹤龄) 科学出版社
《所罗门王的智慧》(加德纳)(翻译) 世界图书出版公司
《斯芬克斯之谜》(加德纳)(翻译) 世界图书出版公司
《蚊迹寻踪 —— 及其他数学探索》(盖尔)(翻译) 上海科技教育出版社
《数学博弈与游戏》(多莫里亚特)(翻译) 科学普及出版社
《趣味逻辑问题》(堵丁柱) 湖南教育出版社
《归纳 · 递推 · 无字证明 · 坐标 · 复数》(丁石孙) 北京大学出版社
《三车同到之谜》(伊斯特威)(翻译) 上海教育出版社
《数学娱乐问题》(亨特)(翻译) 上海教育出版社
《绳长之谜》(伊斯特威)(翻译) 上海教育出版社
《数学锻炼大脑》(波利亚等)(翻译) 科学普及出版社
《引人入胜的数学趣题》(加德纳)(翻译) 上海科技教育出版社
《意料之外的绞刑》(加德纳)(翻译) 上海教育出版社
*《一百个数学问题》(史坦因豪斯)(翻译) 上海教育出版社
《等周问题与夫妇入座问题》(翻译) 北京大学出版社

科普天地

*《数学加德纳》(翻译) 上海教育出版社
《乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋》(丁石孙) 北京大学出版社
《数学探奇》(古斯曼)(翻译) 上海教育出版社
*《又一百个数学问题》(史坦因豪斯)(翻译) 上海教育出版社
《数学游戏的启迪》(张铃) 安徽教育出版社
《逻辑推理新趣题》(萨默斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《萨姆·劳埃德的数学趣题》(加德纳)(翻译) 上海科技教育出版社
《萨姆·劳埃德的数学趣题续编》(加德纳)(翻译) 上海科技教育出版社
《给数学迷的 500 个挑战性问题》(巴尔博等)(翻译) 上海科技教育出版社
《矩阵博士的魔法数》(加德纳)(翻译) 上海科技教育出版社
*《稳操胜券》(上下)(伯莱坎普等)(翻译) 上海教育出版社
《乐在其中的数学》(谈祥柏) 科学出版社
《幻方与幻立方的当代理论》(欧阳录) 湖南教育出版社
《1 000 个思维游戏》(上下)(莫斯科维奇)(翻译) 南海出版公司
《培养几何直觉的 100 道趣题》(贝洛坎)(翻译) 上海科技教育出版社
《训练逻辑思维的 100 道趣题》(贝洛坎)(翻译) 上海科技教育出版社
《强调数字推算的 100 道趣题》(贝洛坎)(翻译) 上海科技教育出版社
《挑战智力水平的 150 道趣题》(贝洛坎)(翻译) 上海科技教育出版社
《世界经典绳结智力游戏》(布莱德)(翻译) 民主与建设出版社
《亨利·杜德尼的数学趣题》(杜德尼)(翻译) 上海科技教育出版社
《好玩的数学》(谈祥柏) 中国少年儿童出版社

8. 数学科普分类(非益智游戏类)

《群——通向几何学之路》(布恩)(翻译) 大连理工大学出版社
《素数的奥秘》(掘场芳数)(翻译) 科学出版社
《凸函数 - 不等式 - 平均值》(李文荣等) 辽宁教育出版社
*《基础拓扑学》(阿姆斯特朗)(翻译) 北京大学出版社
《直线与曲线》(瓦西利耶夫等)(翻译) 科学普及出版社
《图论的例和反例》(卡波边柯等)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《康托的无穷的数学和哲学》(道本)(翻译) 江苏教育出版社
《从正五边形谈起》(严镇军) 上海教育出版社
《万哲先数学科普文选》(万哲先) 河北科学技术出版社
《运动群》(张远达) 上海教育出版社
《从$\sqrt{2}$谈起》(张景中) 上海教育出版社
《概率世界》(达宁)(翻译) 辽宁科学技术出版社
《递归数列》(陈家声等) 上海教育出版社
《圆和二次方程》(马明) 上海教育出版社
《几何变换》(蒋声) 上海教育出版社

*《数学——它的内容、方法和意义》(三卷)(翻译)科学出版社
《抽屉原则及其他》(常庚哲)上海教育出版社
《三角恒等式及应用》(张运筹)上海教育出版社
《人造卫星轨道的分析和计算》(俞文魮等)上海教育出版社
《一些不像"几何"的几何》(沈信耀)上海教育出版社
《登山·赝币·红绿灯》(丁石孙)北京大学出版社
《矩阵对策初步》(张盛开)上海教育出版社
《费马猜想》(姚玉强)辽宁教育出版社
《黎曼猜想》(楼世拓等)辽宁教育出版社
《连续统假设》(张锦文等)辽宁教育出版社
《希尔伯特第十问题》(胡久稔)辽宁教育出版社
《欧几里得第五公设》(蒋声)辽宁教育出版社
《哥德尔不完全性定理》(朱水林)辽宁教育出版社
《不动点定理》(张奠宙等)辽宁教育出版社
《无处可微的连续函数》(刘文)辽宁教育出版社
《科克曼女生问题》(罗见今)辽宁教育出版社
《哥德巴赫猜想》(陈景润等)辽宁教育出版社
《置换多项式及其应用》(孙琦等)辽宁教育出版社
《素数判定与大数分解》(孙琦等)辽宁教育出版社
《斐波那契数列》(康士凯)上海科技教育出版社
《从单位根谈起》(蒋声)上海教育出版社
《反射和反演》(严镇军)上海教育出版社
《谈谈不定方程》(柯召)上海教育出版社
《算两次》(单墫)中国科学技术大学出版社
*《圆与球》(布拉须凯)(翻译)上海科学技术出版社
*《天空中的圆周率》(巴罗)(翻译)中国对外翻译出版公司
《三角不等式及应用》(张运筹)上海教育出版社
《数学归纳法》(华罗庚)上海教育出版社
《凸图形》(吴利生等)上海教育出版社
《趣味的图论问题》(单墫)上海教育出版社
《十个有趣的数学问题》(单墫)上海教育出版社
《形形色色的曲线》(蒋声)上海教育出版社
《初等极值问题》(程龙)上海教育出版社
《几何作图不可能问题》(邱贤忠等)上海教育出版社
《从勾股定理谈起》(盛立人等)上海教育出版社
《绳圈的数学》(姜伯驹)湖南教育出版社
《数论入门》(布恩)(翻译)高等教育出版社

科普天地

《趣味数论》(单墫) 中国青年出版社
《集合论与连续统假设浅说》(张锦文) 上海教育出版社
《覆盖》(单墫) 上海教育出版社
《拓扑空间中的反例》(汪林等) 科学出版社
《代数方程与置换群》(李世雄) 上海教育出版社
《对称和群》(朱水林) 上海教育出版社
《波利亚计数定理》(萧文强) 湖南教育出版社
《数学模型选谈》(华罗庚等)(翻译) 湖南教育出版社
*《阿基米得的报复》(霍夫曼)(翻译) 中国对外翻译出版公司
*《天才引导的历程》(邓纳姆)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《泛函分析中的反例》(汪林) 高等教育出版社
《连分数》(奥尔德斯)(翻译) 北京大学出版社
《无限的用处》(兹平)(翻译) 北京大学出版社
《概率统计中的反例》(张尚志等) 湖南科学技术出版社
《有趣的数论》(奥尔)(翻译) 北京大学出版社
《射影几何趣谈》(冯克勤) 上海教育出版社
《数字的力量》(斯坦因)(翻译) 吉林人民出版社
《谈谈数学中的无限》(谷超豪) 上海教育出版社
《无穷之旅》(马奥尔)(翻译) 上海教育出版社
《棋盘上的组合数学》(冯跃峰) 上海教育出版社
《从毕达哥拉斯到费尔马》(胡作玄) 河南科学技术出版社
《数的趣谈》(阿西摩夫)(翻译) 上海科学技术出版社
《数学故事丛书》(6 本)(张远南) 上海科学普及出版社
《世界数学名题选》(陆乃超等) 上海教育出版社
《世界数学名题选讲》(左宗明) 上海科学技术出版社
《九种平面几何》(雅格龙)(翻译) 上海科学技术出版社
《古典几何学》(项武义等) 复旦大学出版社
《实分析中的反例》(汪林) 高等教育出版社
《斐波那契数列》(吴振奎) 辽宁教育出版社
《站在巨人肩膀上》(布雷格)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《简明数论》(潘承洞等) 北京大学出版社
《*SOS*—— 编码纵横谈》(谈祥柏) 上海教育出版社
《几何的有名定理》(矢野健太郎)(翻译) 上海科学技术出版社
《凸性》(史树中) 湖南教育出版社
《数学世界》(斯坦因)(翻译) 中国社会出版社
《数林掠影》(胡久稔) 南开大学出版社
*《突变论》(托姆)(翻译) 上海译文出版社

《从古典几何到现代几何》(邓纯江等) 成都科技大学出版社
*《现代世界中的数学》(科学美国人)(翻译) 上海教育出版社
*《几何学的新探索》(考克塞特)(翻译) 北京大学出版社
《几何不等式》(单墫) 上海教育出版社
《丢番图方程引论》(曹珍富) 哈尔滨工业大学出版社
《立体几何短文集》(周春荔,樊进)(翻译) 测绘出版社
《几何变换》(1－4)(亚格龙)(翻译) 北京大学出版社
《数学传奇》(张景中) 中国少年儿童出版社
《数学花园漫游记》(马希文) 中国少年儿童出版社
《几何不等式》(卡扎里诺夫等)(翻译) 北京大学出版社
《数学与哲学》(张景中) 中国少年儿童出版社
《游戏 —— 自然规律支配偶然性》(艾根等)(翻译) 上海教育出版社
《图中的几个极值问题》(管梅谷) 上海教育出版社
《我思故我笑》(保罗斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《数学小丛书》(18 种)(华罗庚等) 科学出版社
*《统计与真理 —— 怎样运用偶然性》(劳)(翻译) 科学出版社
《几何学的故事》(姆洛迪诺夫)(翻译) 海南出版社
《运动场上的数学》(黄国勋等) 上海教育出版社
《神奇的 π》(布拉特纳)(翻译) 汕头大学出版社
《浅论点集拓扑、曲面和微分拓扑》(杨忠道) 湖南教育出版社
《极小曲面》(陈维桓) 湖南教育出版社
《几何变换漫谈》(王敬庚) 湖南教育出版社
《凸函数与琴生不等式》(黄宣国) 上海教育出版社
*《圆锥曲线的几何性质》(科克肖特)(翻译) 上海教育出版社
*《从微分观点看拓扑》(米尔诺)(翻译) 上海科学技术出版社
《天平的数学与数学的天平》(陈培德) 辽宁教育出版社
*《如何求解问题》(麦克维克斯等)(翻译) 中国水利水电出版社
《大学生数学专题选讲》(朗)(翻译) 机械工业出版社
《数学旅行家:漫游数王国》(克劳森)(翻译) 上海教育出版社
《染色:从游戏到数学》(柳柏濂) 上海教育出版社
《中学生数学分析》(庞特里亚金)(翻译) 上海教育出版社
*《密码故事》(辛格)(翻译) 海南出版社
*《拓扑实验》(巴尔)(翻译) 上海教育出版社
《不等式入门》(贝肯巴赫等)(翻译) 北京大学出版社
《双曲几何》(李忠等) 湖南教育出版社
《漫谈几何学》(邵品琮) 科学出版社
《$3N+1$ 猜想》(乌家邦) 湖南大学出版社

《数学猜想集》(徐本顺等) 湖南科学技术出版社
《随机性》(本内特)(翻译) 吉林人民出版社
《数学探索》(莫尔丁)(翻译) 四川教育出版社
《实迭代》(张景中等) 湖南教育出版社
*《数学中的智巧》(亨斯贝尔格)(翻译) 北京大学出版社
《直观拓扑》(王敬庚) 北京师范大学出版社
《机会的数学原理》(黑格)(翻译) 吉林人民出版社
*《数论中未解决的问题》(盖伊)(翻译) 科学出版社
《组合与折线》(陈福泰等) 上海教育出版社
*《拓扑学的首要概念》(陈锡驹等)(翻译) 上海科学技术出版社
《尺规作图话古今》(梅向明) 湖南教育出版社
《军事密码学》(李长生) 上海科技教育出版社
《漫话数学》(张景中) 中国少年儿童出版社
《分形几何的数学基础》(文志英) 上海科技教育出版社
*《数论的三颗明珠》(辛钦)(翻译) 上海科学技术出版社
《组合理论的基本方法》(科恩)(翻译) 北京大学出版社
*《圆 —— 数学的窗口》(佩多)(翻译) 黑龙江科学技术出版社
《数学与联想》(韦尔斯)(翻译) 上海教育出版社
*《高观点下的初等数学》(克莱因)(翻译) 湖北教育出版社
《p 进数》(冯克勤) 湖南教育出版社
《走出混沌》(方兆本) 湖南教育出版社
《小波十讲》(道比姬丝)(翻译) 国防工业出版社
《有限域》(冯克勤) 湖南教育出版社
*《算术基础》(弗雷格)(翻译) 商务印书馆
*《几何不等式》(博特玛)(翻译) 北京大学出版社
《生物数学趣谈》(李金平等) 上海教育出版社
《素数定理的初等证明》(潘承洞等) 上海科学技术出版社
《几何不等式在中国》(单墫等编) 江苏教育出版社
*《拓扑学奇趣》(巴尔佳斯基等)(翻译) 湖南教育出版社
《数论中的问题与结果》(曹珍富) 哈尔滨工业大学出版社
《希尔伯特第十七问题》(戴执中等) 江西教育出版社
*《解析不等式》(米特诺维奇)(翻译) 科学出版社
*《伽罗华理论》(阿丁)(翻译) 上海科学技术出版社
《丢番图逼近引论》(朱尧辰等) 科学出版社
《奇妙的几何世界》(鲍里斯基)(翻译) 陕西科学技术出版社
《拉姆塞理论》(李乔) 湖南教育出版社
《数论妙趣》(贝勒)(翻译) 上海教育出版社

《变换与数学竞赛》(常庚哲) 中国少年儿童出版社
*《数学万花镜》(施坦因豪斯)(翻译) 湖南教育出版社
*《基础数论》(杜德利)(翻译) 上海科学技术出版社
《从哥尼斯堡七桥问题谈起》(王树禾) 湖南教育出版社
《分形几何中的技巧》(法尔科内)(翻译) 东北大学出版社
*《分析中的反例》(盖尔鲍姆)(翻译) 上海科学技术出版社
《计算出人意料》(埃克朗)(翻译) 上海教育出版社
*《近代欧氏几何学》(约翰逊)(翻译) 上海教育出版社
《数学圈》(1－3)(伊弗斯)(翻译) 湖南科学技术出版社
《素数的音乐》(索托伊)(翻译) 湖南科学技术出版社
《数学爵士乐》(伯格等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《趣味解析几何》(蒋声等) 上海教育出版社
《代数学》(塔巴克)(翻译) 商务印书馆
《几何学》(塔巴克)(翻译) 商务印书馆
《数》(塔巴克)(翻译) 商务印书馆
*《直观几何》(希尔伯特等)(翻译) 高等教育出版社
*《初等几何的著名问题》(克莱因)(翻译) 高等教育出版社
《数盲》(保罗士)(翻译) 上海教育出版社
《奇妙而有趣的几何》(韦尔斯)(翻译) 上海教育出版社
《黎曼博士的零点》(萨巴)(翻译) 上海教育出版社
《数学走遍天涯》(帕帕斯)(翻译) 上海教育出版社
《初等概率论》(钟开莱)(翻译) 人民教育出版社
*《概率论及其应用》(费勒)(翻译) 人民邮电出版社
《数据与人生》(张奠宙) 上海交通大学出版社
《趣味立体几何》(蒋声等) 上海教育出版社
《从毕达哥拉斯到怀尔斯》(刘培杰) 哈尔滨工业大学出版社
《最小网络》(越民义) 上海科学技术出版社
《果戈尔博士数字奇遇记》(匹克奥弗)(翻译) 上海科学技术出版社
《雨林中的欧几里得》(马祖尔)(翻译) 重庆出版集团
*《离散几何中的研究问题》(布拉斯等) 科学出版社
*《随机致富的傻瓜》(塔勒布)(翻译) 中信出版社
《数学与自然法则》(塔巴克)(翻译) 商务印书馆
《概率论与统计学》(塔巴克)(翻译) 商务印书馆
《数学走进现代化学与生物》(姜伯驹等) 科学出版社
《数论与密码》(冯克勤) 科学出版社
《数学的力量》(李文林等) 科学出版社
《迭代、混沌、分形》(李忠) 科学出版社

《古希腊名题与现代数学》(张贤科) 科学出版社
《千年难题》(德夫林)(翻译) 上海科技教育出版社

9. 数理经济学、决策科学、信息经济学、博弈论

《对付欺诈的学问 —— 信息经济学平话》(王则柯) 中信出版社
*《博弈论与信息经济学》(张维迎) 上海三联书店
《决策与判断》(普劳斯)(翻译) 人民邮电出版社
《博弈论平话》(王则柯) 中国经济出版社
《博弈论经典》(哈罗德等编)(翻译) 中国人民大学出版社
《投资革命》(伯恩斯坦)(翻译)(上海远东出版社)
《个人策略与社会结构》(培顿)(翻译) 上海人民出版社
《博弈学习理论》(弗登伯格等)(翻译) 中国人民大学出版社
*《策略思维》(迪克西特等)(翻译) 中国人民大学出版社
*《博弈论教程》(奥斯本)(翻译) 中国社会科学出版社
*《博弈论与经济行为》(上下)(冯·诺伊曼等)(翻译) 三联书店
*《策略理性模型》(泽尔滕)(翻译) 首都经济贸易大学出版社
*《博弈论基础》(吉本斯)(翻译) 中国社会科学出版社
《经济演化》(弗罗门)(翻译) 经济科学出版社
*《纳什博弈论论文集》(翻译) 首都经济贸易大学出版社
《一般均衡的策略基础》(盖尔)(翻译) 上海人民出版社
*《社会选择:个性与多准则》(阿罗)(翻译) 首都经济贸易大学出版社
《博弈生存》(潘天群) 中央编译出版社
《鲁宾斯坦微观经济学讲义》(鲁宾斯坦)(翻译) 上海三联人民出版社
《博弈论教程》(王则柯等) 中国人民大学出版社
*《海尔萨尼博弈论论文集》(翻译) 首都经济贸易大学出版社
《纳什均衡论》(谢识予) 上海财经大学出版社
*《博弈论》(弗登博格等)(翻译) 中国人民大学出版社
《不可避免的错觉》(帕尔马里尼)(翻译) 中央编译出版社
《信息经济学讲义》(董保民) 中国人民大学出版社
《利他主义倾向》(菲尔德)(翻译) 长春出版社
《囚徒的困境》(庞德斯通)(翻译) 北京理工大学出版社
*《有限理性建模》(鲁宾斯坦)(翻译) 中国人民大学出版社
*《微观动机与宏观行为》(谢林)(翻译) 中国人民大学出版社
*《冲突的战略》(谢林)(翻译) 华夏出版社
《博弈论与经济学》(蒙特等)(翻译) 经济管理出版社
《讨价还价理论及其应用》(穆索)(翻译) 上海财经大学出版社
《博弈论战略分析入门》(麦凯恩)(翻译) 机械工业出版社
*《博弈论与经济模型》(克雷普斯)(翻译) 商务印书馆

《别做正常的傻瓜》(奚恺元) 机械工业出版社
《经济学与博弈理论》(雷东多)(翻译) 上海人民出版社
《行为经济学原理》(董志勇) 北京大学出版社
《活学活用博弈论》(米勒)(翻译) 中国财政经济出版社
《一位经济理论家讲述的故事》(阿克洛夫)(翻译) 首都经济贸易大学出版社
《身边的博弈》(董志强) 机械工业出版社
《群体决策》(胡毓达) 上海科学技术出版社
*《赢者的诅咒》(泰勒)(翻译) 中国人民大学出版社
《微观经济学:行为、制度和演化》(鲍尔斯)(翻译) 中国人民大学出版社

10. 科学思想、科学随笔与科学访谈

《终极抉择》(阿西莫夫)(翻译) 上海科技教育出版社
《阿基米得的浴缸》(奥尔托利)(翻译) 北京大学出版社
《科学的智慧》(布朗)(翻译) 辽宁教育出版社
《数学家谈数学本质》(卡普尔)(翻译) 北京大学出版社
《聆听大师》(杨振宁等) 北京大学出版社
《物理学家风雅趣闻》(范洪义等) 中国科学技术大学出版社
*《数:科学的语言》(丹齐克)(翻译) 上海教育出版社
*《宇宙波澜》(戴森)(翻译) 三联书店
《爱因斯坦晚年文集》(翻译) 海南出版社
*《创造力和直觉》(汤川秀树)(翻译) 复旦大学出版社
*《科学的终结》(霍根)(翻译) 远方出版社
《赤裸裸的纯真理》(马小兵编) 四川人民出版社
《从法拉第到麦克斯韦》(徐在新等) 科学出版社
《从电子到夸克 —— 粒子物理》(陆埮等) 科学出版社
《和谐的秩序》(马小兵编) 四川人民出版社
《定性与半定量物理学》(赵凯华) 高等教育出版社
《第三次数学危机》(胡作玄) 四川人民出版社
*《科学进化史》(布伦诺斯基)(翻译) 海南出版社
《纪念爱因斯坦译文集》(编译) 上海科学技术出版社
*《一个数学家的辩白》(哈代)(翻译) 江苏教育出版社
*《别闹了,费曼先生》(费曼等) 三联书店
《零的历史》(卡普兰)(翻译) 中信出版社
*《最后的沉思》(庞加莱)(翻译) 商务印书馆
*《伊甸园的飞龙》(萨根)(翻译) 河北人民出版社
*《物理世界奇遇记》(盖莫夫)(翻译) 科学出版社
*《发现者》(布尔斯廷)(翻译) 上海译文出版社
《思想家》(麦基)(翻译) 三联书店

《数学的童年》(编译) 中国少年儿童出版社
《探索无限》(摩里斯)(翻译) 华夏出版社
《预测科学》(舍普等)(翻译) 三联书店
《追问千禧年》(古尔德)(翻译) 三联书店
*《仰望苍穹》(温伯格)(翻译) 上海科技教育出版社
*《爱因斯坦文集》(三卷)(翻译) 商务印书馆
*《爱因斯坦论著选编》(爱因斯坦)(翻译) 上海人民出版社
《数学家妙谈股市》(保罗斯)(翻译) 机械工业出版社
*《偶然性和必然性》(莫诺)(翻译) 上海人民出版社
《科学之路》(泰勒克等)(翻译) 山东画报出版社
《真该早些惹怒你》(佩鲁茨)(翻译) 上海科学技术出版社
《历史数学名题赏析》(沈康身) 上海教育出版社
《数学的魅力》(1 – 4)(沈康身) 上海辞书出版社
*《乘小猎犬号环球航行》(达尔文)(翻译) 中国人民大学出版社
《给讨厌数学的人》(小室直树)(翻译) 哈尔滨出版社
《科学音乐会》(郑载承)(翻译) 海南、三环出版社
《物理学的历史和哲学》(吴大猷) 中国大百科全书出版社
《世界的种子》(纽特)(翻译) 新疆人民出版社
《旅人 —— 一个物理学家的回忆》(汤川秀树)(翻译) 河北科学技术出版社
《无之书》(巴罗)(翻译) 上海科技教育出版社
《基因・女郎・伽莫夫》(沃森)(翻译) 上海科技教育出版社
*《原子中的幽灵》(戴维斯等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《费恩曼演讲录》(理查德・费恩曼)(翻译) 上海科学技术出版社
《发明:激动人心的创新之路》(维纳)(翻译) 上海科学技术出版社
《解析彩虹》(道金斯)(翻译) 上海科学技术出版社
《未来的魅力》(霍金等)(翻译) 江苏人民出版社
《残缺的记忆》(弗里希)(翻译) 江苏人民出版社
《做数学之美妙》(兰)(翻译) 四川大学出版社
《东西数学物语》(平山谛)(翻译) 上海教育出版社
《论创造力》(玻姆)(翻译) 上海科学技术出版社
*《从前有个数》(保罗斯)(翻译) 上海科学技术出版社
《我们是唯一的吗》(戴维斯)(翻译) 吉林人民出版社
《宇宙简史》(斯蒂芬・霍金)(翻译) 线装书局
*《数学的建筑》(布尔巴基)(翻译) 江苏教育出版社
《爱因斯坦语录》(艾丽斯・卡拉普赖斯)(翻译) 杭州出版社
《自然与古希腊》(薛定谔)(翻译) 上海科学技术出版社
《未来启示录》(奥辛廷斯基等)(翻译) 上海译文出版社

《数学家言行录》(莫里兹)(翻译)江苏教育出版社
《哥本哈根》(弗雷恩)(翻译)上海科学技术出版社
《想象中的世界》(戴森)(翻译)吉林人民出版社
《九十初度说数学》(陈省身)上海科技教育出版社
*《太阳、基因组与互联网》(戴森)(翻译)三联书店
《时间简史续编》(霍金)(翻译)湖南科学技术出版社
*《细胞生命的礼赞》(托马斯)(翻译)湖南科学技术出版社
*《科学家的辩白》(哈代,维纳,怀特海)(翻译)江苏人民出版社
《科学的生命》(萨顿)(翻译)上海交通大学出版社
《数学与生活》(丘成桐等)浙江大学出版社
《数学魔法》(克劳森)(翻译)湖南科学技术出版社
《科学救国之梦》(任鸿隽)上海科技教育出版社,上海科学技术出版社
《发现的乐趣》(费曼)(翻译)湖南科学技术出版社
*《人类的知识》(罗素)(翻译)商务印书馆
《起源》(梅勒等)(翻译)华夏出版社
《纪念陈省身先生文集》(丘成桐、刘克峰)浙江大学出版社
《光电帝国》(琼斯)(翻译)中信出版社
《时间》(里德伯斯编)(翻译)华夏出版社
《异想天开》(夏尔帕克等)(翻译)辽宁教育出版社
《丘成桐的数学人生》(丘成桐,刘克峰)浙江大学出版社
《数字密码》(尼德曼等)(翻译)上海译文出版社
《成为科学家的100个理由》(阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心)(翻译)上海科学技术出版社
《科学的灵魂》(佩尔斯)(翻译)江西人民出版社
《右手,左手》(麦克纳马斯)(翻译)北京理工大学出版社
《费曼的彩虹》(曼罗迪诺)(翻译)陕西师范大学出版社
《科学是魔法吗》(里德雷)(翻译)广西师范大学出版社

11. 关于相对论、时空物理学与引力

《追寻逝去的时间》(约克)(翻译)中国对外翻译出版公司
*《时空本性》(霍金等)(翻译)湖南科学技术出版社
《时间的奥秘》(都筑卓司)(翻译)科学出版社
《狭义相对论》(司蒂文逊)(翻译)上海科学技术出版社
《爱因斯坦是怎样创建相对论的》(尤广建)湖南教育出版社
《爱因斯坦与相对论》(克威利克)(翻译)商务印书馆
*《狭义与广义相对论浅说》(爱因斯坦)(翻译)上海科学技术出版社
《相对论天体物理的基本概念》(方励之等)上海科学技术出版社
《广义相对论和引力理论》(胡宁)科学出版社

《相对论的故事》(康多)(翻译) 中国少年儿童出版社
《四维世界》(都筑卓司)(翻译) 北京大学出版社
*《相对论的意义》(爱因斯坦)(翻译) 上海科技教育出版社
《引力之谜》(柏格曼)(翻译) 科学出版社
《空间、时间和引力》(王永久) 湖南教育出版社
《关于时间》(戴维斯)(翻译) 吉林人民出版社
*《黑洞与时间弯曲 —— 爱因斯坦的幽灵》(索恩)(翻译) 湖南科学技术出版社
《狭义相对论与爱因斯坦》(李宗熙) 四川教育出版社
《相对论引论》(柏格曼)(翻译) 人民教育出版社
《广义相对论》(刘辽等) 高等教育出版社
*《广义相对论》(狄拉克)(翻译) 科学出版社
《广义相对论引论》(俞允强) 北京大学出版社
《广义相对论基础》(金万修) 东北师范大学出版社
《相对论物理学》(张镇九) 华中师范大学出版社
《时空的维数》(李新洲等) 江西科学技术出版社
《广义相对论与引力波》(韦伯)(翻译) 科学出版社
*《爱因斯坦的宇宙》(徐一鸿)(翻译) 清华大学出版社
*《引力论和宇宙论》(温伯格)(翻译) 科学出版社
《时空物理纵横》(魏凤文) 北京出版社
*《时间隧道》(金斯)(翻译) 北方妇女儿童出版社
*《相对论》(泡利)(翻译) 上海科学技术出版社
《在爱因斯坦的时空旅行》(高特)(翻译) 长春出版社
《时间旅行》(布特拉尔)(翻译) 湖南科学技术出版社
《空间 —— 从相对论到 M 理论的历史》(关洪) 清华大学出版社
*《时间、空间和万物》(里德雷)(翻译) 湖南科学技术出版社
《宇宙的创生》(方励之等) 科学出版社
《轻松话引力》(纳里卡)(翻译) 湖南教育出版社
《宇宙之海的涟漪》(布莱尔等)(翻译) 江西教育出版社
《$E = mc^2$》(比尔克)(翻译) 百家出版社
《四维旅行》(普瓦德万)(翻译) 湖南科学技术出版社
《相对论导引》(鲁迈尔)(翻译) 上海科学技术出版社
《上帝的方程式》(阿克塞尔)(翻译) 上海世纪出版集团
《爱因斯坦:相对论一百年》(罗宾逊等)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《时空的大尺度结构》(霍金等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《爱因斯坦的宇宙》(加来道雄)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《引力与时空》(瓦尼安等)(翻译) 科学出版社
《抓住引力》(贡德哈勒卡尔)(翻译) 中国青年出版社

12. **关于量子力学、对称性、粒子物理、量子计算和量子信息、数学密码**

*《可怕的对称》(徐一鸿)(翻译) 湖南科学技术出版社
《量子》(高山) 清华大学出版社
*《整体性与隐缠序》(玻姆)(翻译) 上海科技教育出版社
《基本粒子物理中的对称性原理》(吉尔特等)(翻译) 高等教育出版社
《密码传奇》(基彭哈恩)(翻译) 上海译文出版社
《探幽入微之路》(殷正坤) 人民出版社
《上帝怎样掷骰子》(陈克艰) 四川人民出版社
《夸克》(弗里兹希)(翻译) 上海翻译出版公司
《量子革命》(罗森菲耳德)(翻译) 商务印书馆
《命运之神应置何方》(林德利)(翻译) 吉林人民出版社
《量子物理学》(雷)(翻译) 江苏人民出版社
*《上帝粒子》(莱德曼)(翻译) 上海科技教育出版社
*《量子计算和量子信息》(上下)(尼尔森等)(翻译) 清华大学出版社
*《寻找薛定谔的猫》(格里宾)(翻译)(海南出版社)
*《从反粒子到最终定律》(费曼等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《薛定谔的猫——玄奥的量子世界》(罗特莱因)(翻译)(百家出版社)
《对称与不对称》(李政道) 科学出版社
《量子史话》(霍夫曼)(翻译) 科学出版社
《群论与量子力学》(范德瓦尔登)(翻译) 上海科学技术出版社
《光速思考》(诺尔蒂)(翻译) 中信出版社、辽宁教育出版社
*《基本粒子及其相互作用》(杨振宁) 湖南教育出版社
《费曼处理器》(密尔本)(翻译) 江西教育出版社
*《新量子世界》(黑等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《上帝掷骰子吗?》(曹天元) 辽宁教育出版社
《亚原子粒子的发现》(温伯格)(翻译) 湖南科学技术出版社
《公钥密码学》(索洛马)(翻译) 国防工业出版社
《原子论的历史与现状》(关洪) 北京大学出版社
*《神奇的粒子世界》(韦尔特曼)(翻译) 世界图书出版公司

13. **关于超弦、超对称、大统一物理学前沿**

《爱因斯坦的大错吗》(哥尔斯密)(翻译) 吉林人民出版社
*《超越时空》(加来道雄)(翻译) 上海科技教育出版社
《六个数》(里斯)(翻译) 上海科学技术出版社
*《终极理论之梦》(温伯格) 湖南科学技术出版社
《统一之路》(丁亦兵) 湖南科学技术出版社
《超对称物理导论》(李新洲等) 复旦大学出版社
《物理学的统一之路》(李新洲) 上海科技教育出版社

《超对称》(凯恩)(翻译) 汕头大学出版社
*《寻觅基元》(特霍夫特)(翻译) 上海科技教育出版社
*《通向量子引力的三条途径》(斯莫林)(翻译) 上海科学技术出版社
*《超弦 —— 一种包罗万象的理论?》(戴维斯等)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《追寻自然之律》(李新洲) 上海科技教育出版社
*《宇宙的琴弦》(格林)(翻译) 湖南科学技术出版社
《超弦的音响 —— 自然中之最小》(格罗特里希)(翻译) 百家出版社
《超越爱因斯坦》(加来道雄等)(翻译) 吉林人民出版社
《超弦史话》(李淼) 北京大学出版社

14. 关于进化论与演化博弈

《达尔文与进化论》(斯泰福)(翻译) 吉林人民出版社
《进化思想史》(鲍勒)(翻译) 江西教育出版社
*《自私的基因》(道金斯)(翻译) 吉林人民出版社
*《适应性与自然选择》(威廉斯) 上海科学技术出版社
《地球上生命的起源》(奥巴林)(翻译) 科学出版社
《社会生物学》(弗伊)(翻译) 商务印书馆
《阅读生物学札记》(郑也夫) 中国青年出版社
*《新的综合》(威尔逊)(翻译) 四川人民出版社
*《集体选择与社会福利》(森)(翻译) 上海科学技术出版社
《理性赌局》(路易斯)(翻译) 汕头大学出版社
*《美德的起源》(里德利)(翻译) 中央编译出版社
*《博弈论与社会契约》(上下)(宾默尔)(翻译) 上海财经大学出版社
*《进化是什么》(迈尔)(翻译) 上海科学技术出版社
《非零年代:人类命运的逻辑》(赖特)(翻译) 上海人民出版社
*《很长的论点》(迈尔)(翻译) 上海科学技术出版社
《社会制度的经济理论》(肖特)(翻译) 上海财经大学出版社
*《盲眼钟表匠》(道金斯)(翻译) 重庆出版社
《生物是怎样进化的》(刘后一等) 中国青年出版社
《演化博弈论》(威布尔)(翻译) 上海三联 - 人民出版社

15. 生命科学、人类学与数理科学

《双螺旋探秘 —— 量子物理学与生命》(格里宾)(翻译) 上海科技教育出版社
《生命进化的物理观》(罗辽复) 上海科学技术出版社
*《第二重奥秘》(斯图尔特)(翻译) 上海科学技术出版社
*《生命的线索》(苏尔斯顿)(翻译) 中信出版社
*《原始文化》(泰勒)(翻译) 广西师范大学出版社
*《惊人的假说》(克里克)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《人类的起源》(利基)(翻译) 上海科学技术出版社

*《人种自传 23 章》(里德利)(翻译) 北京理工大学出版社
《细胞叛逆者》(温伯格)(翻译) 上海科学技术出版社
*《生命起源的七条线索》(史密斯)(翻译) 中国对外翻译出版公司
*《生命是什么》(薛定谔)(翻译) 湖南科学技术出版社
《药物简史》(博伊姆勒)(翻译) 广西师范大学出版社
《生物信息学浅说》(郝柏林) 上海科技教育出版社
《人类基因的历史地图》(奥尔森)(翻译) 三联书店
*《生物信息学——机器学习方法》(巴尔迪等)(翻译) 中信出版社
《人类前史》(韦尔斯)(翻译) 东方出版社
*《生物物理学:能量、信息、生命》(纳尔逊)(翻译) 上海科学技术出版社

16. 物质科学分类

《亚原子世界探秘》(阿西莫夫)(翻译) 上海科技教育出版社
《*QED*:光和物质的奇异性》(费曼)(翻译) 商务印书馆
《粒子世界探秘》(高崇寿) 湖南教育出版社
《中微子之谜》(孙汉城) 湖南教育出版社
*《软物质与硬科学》(德热纳)(翻译) 湖南教育出版社
《晶态面面观》(冯端等) 湖南教育出版社
《液晶》(柯林斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《熵》(冯端等) 科学出版社
《超导体》(章立源) 科学出版社
《放眼晶态之外》(冯端等) 湖南教育出版社
《相变和临界现象》(于禄等) 科学出版社
《极微世界探微》(张端明) 湖南科学技术出版社
《探索物质最深处》(谢诒成) 上海科技教育出版社
《微观绝唱》(江向东) 上海科技教育出版社
《超流与相变》(陆继宗等) 上海科技教育出版社
《从肥皂泡到液晶生物膜》(欧阳钟灿) 湖南教育出版社
《物理学家看生命》(罗辽复) 湖南教育出版社
*《高分子物理学中的标度概念》(德热纳)(翻译) 化学工业出版社

17. 系统论、信息论、控制论

《生命问题》(贝塔朗菲) 商务印书馆
*《一般系统论》(贝塔朗菲) 社会科学文献出版社
*《系统论、控制论、信息论经典文献选编》(庞元正等) 求实出版社
《控制论与科学方法论》(金观涛等) 新星出版社
*《信息论基础》(卡弗尔等)(翻译) 机械工业出版社
《描述复杂性》(李明等) 科学出版社

18. 耗散结构、混沌、分形、自组织临界现象、协同论与复杂性科学

《从蝴蝶效应谈起》(刘式达) 湖南教育出版社

《自然之数》(斯图尔特)(翻译) 上海科学技术出版社
《时间之箭》(柯文尼等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《虚实世界》(卡斯蒂)(翻译) 上海科技教育出版社
*《混沌的本质》(洛伦兹)(翻译) 气象出版社
*《隐秩序》(霍兰)(翻译) 上海科技教育出版社
*《分形对象 —— 形、机遇和维数》(芒德布罗)(翻译) 世界图书出版公司
*《突变理论》(阿诺尔德)(翻译) 商务印书馆
*《协同学:大自然构成的奥秘》(哈肯)(翻译) 上海译文出版社
《统计力学基础》(哈尔)(翻译) 上海科学技术出版社
《混沌:对科学和社会的冲击》(格里博格等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《分形几何 —— 数学基础及其应用》(法尔科内)(翻译) 东北大学出版社
*《从存在到演化》(普利高津)(翻译) 上海科学技术出版社
《探索复杂性》(尼科里斯等)(翻译) 四川教育出版社
*《大自然的分形几何学》(芒德布罗)(翻译) 上海远东出版社
*《混沌 —— 开创新科学》(格莱克)(翻译) 上海译文出版社
《混沌与分形 —— 郝柏林科普文集》上海科学技术出版社
《普利高津与耗散结构理论》(湛垦华等) 陕西科学技术出版社
《开创复杂性研究的新学科 —— 系统科学纵览》(魏宏森等) 四川教育出版社
《分形漫步》(凯伊)(翻译) 东北大学出版社
《探索热的本质》(申先甲) 北京出版社
《混沌学引论》(舒斯特)(翻译) 四川教育出版社
《混沌》(吕尔萨)(翻译) 科学出版社
《从抛物线谈起》(郝柏林) 上海科技教育出版社
《漫谈分形》(张志三) 湖南教育出版社
*《从混沌到有序》(普利高津等)(翻译) 上海译文出版社
《童心与发现》(梁美灵等) 三联书店
*《上帝掷骰子吗 —— 混沌之数学》(斯图尔特)(翻译) 上海远东出版社
《谈谈熵》(冯端等) 湖南教育出版社
《复杂性中的思维》(迈因策尔)(翻译) 中央编译出版社
《自然科学中的混沌和分形》(刘式达) 北京大学出版社
*《大脑工作原理》(哈肯)(翻译) 上海科技教育出版社
《混沌与和谐》(郑春顺)(翻译) 商务印书馆
*《夸克与美洲豹》(盖尔曼)(翻译) 湖南科学技术出版社
《时间与机遇》(阿尔伯特)(翻译) 吉林人民出版社
*《机遇与混沌》(吕埃勒)(翻译) 上海科技教育出版社
《时间之矢与阿基米得之点》(普赖斯) 上海科学技术出版社
《复杂系统理论基础》(欧阳莹之)(翻译) 上海科技教育出版社

《科学新领域的探索》(考夫曼)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《确定性的终结》(普利高津)(翻译) 上海科技教育出版社
《混沌学传奇》(卢侃) 上海翻译出版公司
《宇宙为家》(考夫曼)(翻译) 湖南科学技术出版社
《别有洞天》(谷超豪) 湖南科学技术出版社
《物理系统的元胞自动机模拟》(丘帕德等)(翻译) 清华大学出版社
*《大自然如何工作》(巴克)(翻译) 华中师范大学出版社
*《天遇 —— 混沌与稳定性的起源》(迪亚库等)(翻译) 上海科技教育出版社
《沙地上的图案》(波索马特尔)(翻译) 江西教育出版社
*《涌现 —— 从混沌到有序》(霍兰)(翻译) 上海科学技术出版社
《耗散结构论》(沈小峰等) 上海人民出版社
*《超循环论》(艾根)(翻译) 上海译文出版社
《混沌及其秩序》(格雷席克)(翻译) 百家出版社
《临界》(布查纳)(翻译) 吉林人民出版社
《不确定的科学和不确定的世界》(波拉克)(翻译) 上海世纪出版集团
《未来是定数吗?》(普利高津)(翻译) 上海世纪出版集团
*《小小世界》(瓦茨)(翻译) 中国人民大学出版社
《斑杂的世界》(卡特赖特)(翻译) 上海世纪出版集团

19. 天文学、天体物理、黑洞和宇宙学

《卡尔 · 萨根的宇宙》(特奇安等)(翻译) 上海科技教育出版社
《小行星》(斯万尼)(翻译) 湖南教育出版社
《宇宙》(萨根)(翻译) 吉林人民出版社
《火星:我的第二家园》(齐默尔曼等)(翻译) 江苏人民出版社
《宇宙指南》(阿西莫夫)(翻译) 江苏人民出版社
《大爆炸探秘》(格里宾)(翻译) 上海科技教育出版社
《宇宙大碰撞》(德丝尼)(翻译) 中国青年出版社
《宇宙的结构》(哈尔彭)(翻译) 中国青年出版社
《宇宙的最后三分钟》(戴维斯)(翻译) 上海科学技术出版社
《宇宙中的黑洞》(穆尔等)(翻译) 科学出版社
*《暗淡蓝点》(萨根)(翻译) 上海科技教育出版社
*《相对论和黑洞的奇迹》(考夫曼)(翻译) 知识出版社
《黑洞的热性质与时空奇异性》(赵峥) 北京师范大学出版社
《暴胀宇宙论和宇宙弦》(蒋元方等) 华东师范大学出版社
《寻访人类的太空之友 —— 地外文明》(上下)(阿西摩夫)(翻译) 科学出版社
《行星上的生命》(捷克斯基)(翻译) 江苏人民出版社
《宇宙风采》(卞毓麟) 江苏教育出版社
《黑洞和宇宙》(诺维科夫)(翻译) 江苏人民出版社

《宇宙演化》(里夫斯)(翻译) 北京大学出版社
《霍金的宇宙》(费尔津)(翻译) 海南出版社
《火星 —— 红色的行星》(卞毓麟) 科学出版社
《宇宙、地球和大气》(阿西莫夫)(翻译) 科学出版社
《天外智慧》(赫德曼)(翻译) 江苏人民出版社
《天文漫谈》(中央人民广播电台科技组科学普及出版社编辑部) 科学普及出版社
《物理学和天体物理学中的若干重要问题》(金兹堡)(翻译) 科学出版社
《太阳十讲》(胡文瑞等) 科学出版社
《宇宙》(陆埮) 湖南教育出版社
《探索外层空间》(多兰)(翻译) 世界知识出版社
《宇宙 —— 从天圆地方到类星体》(阿西摩夫)(翻译) 科学出版社
《现代行星物理学》(陈道汉等) 上海科学技术出版社
*《宇宙密码》(派格斯)(翻译) 中国科学技术大学出版社
*《行星和卫星》(卡夫曼)(翻译) 科学出版社
*《恒星和星云》(卡夫曼)(翻译) 科学出版社
*《星系和类星体》(卡夫曼)(翻译) 科学出版社
《地球的伙伴》(叶黎译)(翻译) 新蕾出版社
《现代宇宙学》(席艾玛)(翻译) 商务印书馆
《宇宙的起源》(巴罗)(翻译) 上海科学技术出版社
《新太阳系》(萨根等)(翻译) 上海科学技术出版社
《星星宇宙谁的年龄大》(格里宾)(翻译) 昆仑出版社
《星系世界》(马珥等) 湖南教育出版社
《普通天文学》(胡中为) 南京大学出版社
《地外文明探秘》(怀特)(翻译) 上海科技教育出版社
《宇宙探索》(科学美国人)(翻译) 科学技术文献出版社
《银河系》(克罗斯韦尔)(翻译) 海南出版社
*《物理天文学前沿》(霍伊尔等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《星之尘埃》(里夫斯)(翻译) 北京大学出版社
《宇宙的结局》(伊斯拉姆)(翻译) 科学出版社
《火星的故事》(摩尔)(翻译) 北京理工大学出版社
*《大众天文学》(弗拉马里翁)(翻译) 广西师范大学出版社
《宇宙索奇》(张明昌) 江苏少年儿童出版社
*《霸王龙和陨石坑》(阿尔瓦雷斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《宇宙佳音》(吴鑫基等) 上海科技教育出版社
《穿越时空》(金斯)(翻译) 江苏人民出版社
《天文漫谈》(中央人民广播电台科学技术组) 科学普及出版社
《外星生命探索》(迪克)(翻译) 清华大学出版社

《天体物理学前沿鸟瞰》(方励之) 科学技术文献出版社
*《宇宙的最初三分钟》(温伯格)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《探索火星生命》(沃尔特)(翻译) 新华出版社
《星球旅行的奥秘》(克罗斯)(翻译) 中国对外翻译出版公司
《神秘的宇宙》(彭秋和等) 科学出版社
《引人入胜的天文学》(吴智仁等) 上海教育出版社
《千亿个太阳——恒星的诞生、演变和衰亡》(基彭哈恩)(翻译) 湖南科学技术出版社
《反物质》(弗雷泽)(翻译) 上海科技教育出版社
*《时间简史》(霍金)(翻译) 湖南科学技术出版社
《普通天体物理学》(李宗伟等) 高等教育出版社
《果壳里的 60 年》(霍金等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《时空的未来》(霍金等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《黑洞与弯曲的时空》(赵峥) 山西科学技术出版社
《黑洞与弯曲时空》(卡夫曼)(翻译) 科学出版社
《黑洞、类星体和宇宙》(西普门)(翻译) 科学出版社
《宇宙的秘密》(布勃拉特)(翻译) 河北大学出版社
《宇宙生命的探索》(张庆麟) 上海科技教育出版社
*《果壳中的宇宙》(霍金)(翻译) 湖南科学技术出版社
《黑洞》(卢米涅)(翻译) 湖南科学技术出版社
《宇宙学引论》(冯麟保) 科学出版社
《热大爆炸宇宙学》(俞允强) 北京大学出版社
《物理宇宙学讲义》(俞允强) 北京大学出版社
《时间之河》(诺维科夫)(翻译) 上海科学技术出版社
《宇宙的演化》(诺维科夫)(翻译) 科学出版社
《大宇宙百科全书》(格里宾)(翻译) 海南出版社
《宇宙七大奇观》(纳利卡)(翻译) 复旦大学出版社
《宇宙飞弹》(柯莱)(翻译) 江西教育出版社
《霍金演讲录》(霍金) 湖南科学技术出版社
《第五元素》(克劳斯)(翻译) 上海科学技术出版社
《量天》(弗格森)(翻译) 北京大学出版社
《今日天体物理》(中国科技大学天体物理研究室) 上海科学技术出版社
《天文万花筒》(卢炬甫) 中国少年儿童出版社
《通古斯卡火球之谜》(弗马)(翻译) 南海出版公司
《天文物理新视野》(库特纳)(翻译) 湖南科学技术出版社
《时间简史》(普及版)(霍金等)(翻译) 湖南科学技术出版社
《追星》(卞毓麟) 上海文化出版社
《天体物理导论》(徐仁新) 北京大学出版社

《重返天文咖啡馆》(奥登瓦尔德)(翻译) 上海科技教育出版社
《万古奇观》(卡德培) 科学普及出版社
《宇宙新视野》(皮特森)(翻译) 湖南科学技术出版社
*《宇宙概说》(维利亚米诺夫)(翻译) 江苏科学技术出版社
《无限远的边缘》(梅利亚)(翻译) 湖南科学技术出版社
20. 生态学、博物学
*《昆虫学忆札》(法布尔)(翻译) 湖南教育出版社
*《自达尔文以来》(古尔德)(翻译) 三联书店
《动物趣谈》(1－4)(姚大均) 江苏人民出版社
*《所罗门王的指环》(劳伦兹)(翻译) 中国和平出版社
《趣味地理》(1－4)(姚大均) 江苏少年儿童出版社
*《生长和形态》(汤普森)(翻译) 上海科学技术出版社
《熊猫的拇指》(古尔德)(翻译) 三联书店
*《论契合》(威尔逊)(翻译) 三联书店
《昆虫的社会》(威尔逊)(翻译) 重庆出版集团
21. 关于科学方法论
《数学证明》(萧文强) 江苏教育出版社
《数学方法论教程》(徐利治等) 江苏教育出版社
《天才设题，智者解题》(皮科夫)(翻译) 现代出版社
*《数学领域中的发明心理学》(阿达马)(翻译) 江苏教育出版社
《化归与归纳类比推理》(史久一等) 江苏教育出版社
《数学抽象方法与抽象度分析法》(徐利治等) 江苏教育出版社
《中国古代数学思想方法》(王鸿钧等) 江苏教育出版社
《生命科学模型》(卢卡斯) 国防科技大学出版社
《政治及有关模型》(卢卡斯) 国防科技大学出版社
《微分方程模型》(卢卡斯) 国防科技大学出版社
《离散与系统模型》(卢卡斯) 国防科技大学出版社
*《关系映射反演方法》(徐利治等) 江苏教育出版社
*《数学与猜想》(一、二)(波利亚)(翻译) 科学出版社
*《怎样解题》(波利亚)(翻译) 上海科技教育出版社
《数学方法溯源》(欧阳绛) 江苏教育出版社
《数学脑》(巴特沃思)(翻译) 东方出版中心
《解决问题的策略》(恩格尔)(翻译) 上海教育出版社
《数学中的美学方法》(徐本顺) 江苏教育出版社
《泛系理论与数学方法》(吴学谋) 江苏教育出版社
《数学的发现》(波利亚)(翻译) 科学出版社
22. 认知心理学、数理逻辑、人工智能、计算理论与其哲学
《无心的机器》(周昌乐) 湖南科学技术出版社

《通灵芯片》(希利斯)(翻译)上海科学技术出版社
*《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》(侯世达)(翻译)商务印书馆
*《心的概念》(赖尔)(翻译)上海译文出版社
*《佛教逻辑》(舍尔巴茨基)(翻译)商务印书馆
《心灵种种》(丹尼特)(翻译)上海科学技术出版社
《近世计算理论导引》(黄文奇等)科学出版社
*《逻辑与演绎科学方法导论》(塔尔斯基)(翻译)商务印书馆
*《计算机和人脑》(冯·诺伊曼)(翻译)商务印书馆
《选择公理》(赵希顺)人民出版社
*《皇帝新脑》(彭罗斯)(翻译)湖南科学技术出版社
《走向计算主义》(李建会)中国书籍出版社
*《计算理论导引》(西普瑟)(翻译)机械工业出版社
*《禅宗与精神分析》(弗洛姆等)(翻译)贵州人民出版社
*《人工科学》(司马贺)(翻译)上海科技教育出版社
《现代归纳逻辑的发展》(熊立文)人民出版社
*《意识的宇宙》(埃德尔曼等)(翻译)上海科学技术出版社
《人工智能》(尼尔森)(翻译)机械工业出版社
*《人工智能哲学》(博登)(翻译)上海译文出版社
《智力的形成》(理查森)(翻译)三联书店
*《剑桥五重奏》(卡斯蒂)(翻译)上海科学技术出版社
《心灵之谜多面观》(松本修文等)(翻译)上海科学技术出版社
《计算与认知》(派利夏恩)(翻译)中国人民大学出版社
《宇宙、量子与人脑》(彭罗斯)(翻译)中国对外翻译出版公司
《*DNA* 计算》(泡恩等)(翻译)清华大学出版社
《逻辑的引擎》(戴维斯)(翻译)湖南科学技术出版社
《亚里士多德的逻辑学说》(王路)中国社会科学出版社
《推理的迷宫》(庞德斯通)(翻译)北京理工大学出版社
《"深蓝"揭秘》(许峰雄)(翻译)上海科技教育出版社
《当代心灵哲学导论》(海尔)(翻译)中国人民大学出版社
《可计算性与数理逻辑》(伯罗斯等)(翻译)电子工业出版社
《人工神经网络与模拟进化计算》(阎平凡等)清华大学出版社
《算法分析导论》(塞德格威克等)(翻译)机械工业出版社
*《心,脑与科学》(塞尔)(翻译)上海译文出版社
《认知心理学》(斯坦恩伯格)(翻译)中国轻工业出版社
《认知科学哲学导论》(哈瑞)(翻译)上海科技教育出版社
《可能世界与智慧》(王震宇等)机械工业出版社
*《算法导论》(考门等)(翻译)机械工业出版社

《语言哲学》(陈嘉映) 北京大学出版社
《蚁群优化》(道里戈等)(翻译) 清华大学出版社
23. 科学之美
《美与科学革命》(麦卡里斯特)(翻译) 吉林人民出版社
《心灵的标符》(罗特斯坦)(翻译) 吉林人民出版社
*《莎士比亚、牛顿和贝多芬》(钱德拉塞卡)(翻译) 湖南科学技术出版社
《艺术与物理学》(史莱因)(翻译) 吉林人民出版社
*《对称》(外尔)(翻译) 上海科技教育出版社
*《爱因斯坦 · 毕加索》(米勒)(翻译) 上海科技教育出版社
《艺术与宇宙》(巴罗)(翻译) 上海科学技术出版社
《天体的音乐》(詹姆斯)(翻译) 吉林人民出版社
《魔镜》(恩斯特)(翻译) 上海科技教育出版社
《数学与艺术》(彼得生)(翻译) 上海教育出版社
*《教堂中的几何图案》(菲尔德)(翻译) 上海教育出版社
《伊斯兰艺术与建筑中的几何图案》(菲尔德)(翻译) 上海教育出版社
《造房贴砖中的几何图案》(菲尔德)(翻译) 上海教育出版社
《罗马马赛克中的几何图案》(菲尔德)(翻译) 上海教育出版社
《布艺设计中的几何图案》(菲尔德)(翻译) 上海教育出版社
《天地有大美》(法米罗)(翻译) 上海世纪出版集团
《埃舍尔魔镜》(张诃) 陕西师范大学出版社
24. 现代科学与宗教及东方传统哲学
《混沌七鉴 —— 来自易学的永恒智慧》(布里格斯等)(翻译) 上海科技教育出版社
《当科学遇到宗教》(巴伯)(翻译) 三联书店
《湍鉴》(布里格斯等)(翻译) 商务印书馆
*《物理学之"道"》(卡普拉)(翻译) 北京出版社
《科学与宗教》(布鲁克)(翻译) 复旦大学出版社
《宗教与科学》(罗素)(翻译) 商务印书馆
25. 最新补遗
《法医学 —— 从纤维到指纹》(扬特)(翻译) 上海科学技术文献出版社
《现代天文学 —— 拓展宇宙》(扬特)(翻译) 上海科学技术文献出版社
《数学 —— 描绘自然与社会的有力模式》(亨德森)(翻译) 上海科学技术文献出版社
《通讯与广播 —— 从有限语言到无限网络》(亨德森)(翻译) 上海科学技术文献出版社
《人工智能 —— 大脑的镜子》(亨德森)(翻译) 上海科学技术文献出版社
《数学丑闻》(帕帕斯)(翻译) 上海科技教育出版社
《人的意识》(布莱克摩尔)(翻译) 中国轻工业出版社
《伟大的物理学家》(上下)(克劳普尔)(翻译) 当代世界出版社

《数学与人类文明》(蔡天新) 浙江大学出版社
《中国古算解趣》(郁祖权) 科学出版社
《算法与代数学》(花拉子米)(翻译) 科学出版社
《莉拉沃蒂》(婆什迦罗)(翻译) 科学出版社
《计算之书》(斐波那契)(翻译) 科学出版社
《和算选粹》(关孝和)(翻译) 科学出版社
《算术之钥》(卡西)(翻译) 科学出版社
《"有限世界"时代的来临》(雅卡尔)(翻译) 广西师范大学出版社
《差异的颂歌》(雅卡尔)(翻译) 广西师范大学出版社
《图说四色问题》(许寿椿) 北京大学出版社
《数学　我爱你》(赖默尔等)(翻译) 哈尔滨工业大学出版社
《从迪利克雷到维斯卡尔迪》(刘培杰) 哈尔滨工业大学出版社
《从哥德巴赫到陈景润》(刘培杰) 哈尔滨工业大学出版社
《预知社会》(鲍尔)(翻译) 当代中国出版社
《智慧 智力 创造力》(斯滕博格)(翻译) 北京理工大学出版社
《牛顿传记五种》(丰特奈尔等)(翻译) 商务印书馆
《算法设计》(克莱因伯格等)(翻译) 清华大学出版社
《计算机程序设计艺术》(克努特)(翻译) 国防工业出版社
《爱因斯坦的私生活》(瓦伦坦)(翻译) 中国工人出版社
《牛顿、爱因斯坦和相对论 —— 改变世界的方程》(弗里奇)(翻译) 上海科技教育出版社
《最迷人的数学趣题》(温克勒)(翻译) 上海教育出版社
《控制论》(维纳)(翻译) 北京大学出版社
《最优结构图》(胡一凡) 上海科学技术出版社
《生物信息学算法导论》(琼斯等)(翻译) 化学工业出版社
《计算机模拟与决策支持》(赵玮) 上海科学技术出版社
《爱因斯坦传》(里沃夫)(翻译) 海燕出版社
《经济学中的实验室实验 —— 六种观点》(罗斯)(翻译) 中国人民大学出版社
《素数论》(特能鲍姆等)(翻译) 清华大学出版社
《合作的进化》(阿克塞尔罗德)(翻译) 上海世纪出版集团
《物理与头脑相遇的地方》(柯尔)(翻译) 长春出版社
《数学与头脑相遇的地方》(柯尔)(翻译) 长春出版社
《坎特伯雷趣题》(杜德尼)(翻译) 上海科技教育出版社
《希腊思想和科学精神的起源》(罗斑)(翻译) 广西师范大学出版社
《薛定谔演讲录》(薛定谔)(翻译) 北京大学出版社
《当代西方科学哲学述评》(舒炜光等) 中国人民大学出版社
《激励理论》(拉丰等)(翻译) 中国人民大学出版社

《数学与自然科学之哲学》(外尔)(翻译) 上海世纪出版集团

《你不知道的宇宙大爆炸》(席林)(翻译) 广西师范大学出版社

《认识宇宙学》(柯林斯)(翻译) 外语教学与研究出版社

《复杂性 —— 一种哲学概观》(雷舍尔)(翻译) 上海科技教育出版社

《一路投奔奇迹 —— 爱因斯坦的生命和他的宇宙》(克拉普莱斯等)(翻译) 国际文化出版公司

《科学的反革命》(哈耶克)(翻译) 译林出版社

《逻辑学导论》(柯匹等)(翻译) 中国人民大学出版社

编后语 读书是一件极私人的事,不存在所有人必读之书,读书也是一件隐秘之事,不可大庭大嗡.以往许多读书节目,请几位所谓名人,开列几份颇受争议的推荐书目,结果多半是虎头蛇尾.读书有些像到饭馆吃饭,店家推荐的,多半不会吃,一个真正的读书人是有主见的,读什么很难有共性,但有一点似有共识,就是上排行榜的畅销书一定不要读,另外还有人给自己规定,有些人写的所有书都不读,有几类书所有人写得都不读,似有道理.本文不是个推荐书目,纯粹是一种资讯提供,悉数列出,爱读不读,悉听尊便.

一封读者来信

尊敬的刘培杰先生：

您好！很高兴收到您的回信，并到书店看了您的新作品．细看了451～468页．全书翻了一遍．

果然您如实地写出很多人的数学探索，反应了当前的一些数学动态，从数学家到数学爱好者，同时也表露了您的想法，我以为您为了中国数学写成了两大本书，其贡献应该说是很大的．大数学家欧拉一生中写了886篇著作，成了划时代的大数学家，可谓贡献之大．然而被哥德巴赫一个问题问住了，中国象棋中叫做“将军”，历史注定，欧拉是失败的数学家．我在您的新书468页的“4点”和498页的第4行“所有这些人的致命弱点，是不懂历史，愚蠢地把时间和精力白白浪费掉了”．很显然你是指向那些“哥猜”求解者的．

其实不懂历史，浪费时间和精力的人是谁呢？在中国的现实中，恰恰是背离了华罗庚数学思想的人，绝对不是“哥猜”求解者．因为华先生有这样的教导：“‘难’也是如此，面对悬崖峭壁，一百年也看不出条缝来．但用斧凿，能进一寸进一寸，得进一尺进一尺，不断积累，飞跃必来，突破随之．”

面对世界数学难题．面对尚不曾公认解答出来的哥德巴赫猜想，允许解答不了，也允许解答有错误和缺陷，也允许在解答中有这样那样的偏差．允许陈氏、王氏、潘氏等的猜想误认为解答，总而言之，世界上数学难或不难的问题（欧拉“解答”了的素数问题和七桥问题），据我所知，大部分都曾真正完整而准确地解答出来，总概括为数论与图论的概念，也存在不同的说法．如您所说：“很复杂的问题”，“几句话是说不清楚的”．但也可以简单扼要到“是与非”两个字，“哥猜”虽难，也可确定是可解与不可解的问题．

在世界数学难题面前，无论学生、教师、教授、数学家还是数学爱好者，最起码的“是非”和“人生意义”概念就在于去解答，支持解答，不解答，反对解答．那里另有“宽容”，“迷途知返”之说，至于“要尊重社会分工，让数学家们走自己的路，我们别再瞎掺和了”，要说尊重社会分工，现在中科院数学所的条件比建国初期华罗庚先生回国建所时要好不知多少倍，却不去解答，不去做支持解答的工作，甚至于在全国大中院校说什么：“没有新的数学工具和新的数学方法．”给“哥猜”求解者还戴上“民科”的高帽子，反对解答．从2000年以来我亲身经历，年复一年地克制着自己，保持清醒的头脑，谦虚谨慎地做我想做的事．我也不是“民科”，也不是“哥迷”．只是见“数学之妙”也．

在中国，按理说不该发生，既是华罗庚先生的学生、接班人，却偏偏做背离华罗庚数学思想、数学方向的事情．“对这一古老难题，中科院数学所目前还没有攻坚的打算．”（2002/03/06《北京晚报》）您要的尊重社会分工，怎么个尊重？数学题解答主要在于有没有真正解决问题，有理有据，说得清楚，讲得明白，甚至于要回答各种疑问．“哥猜”

虽难，也只有一题，不可能社会分工所有数学家们都做出来，这就要有一个人先做出来，如果说尊重社会分工，要求数学家们（包括教师、教授和数学爱好者）来参与批改、审查和鉴定，变成全社会共同的知识．可以应用于方方面面，成为各行各业，各学科，各领域的才能和本事．我的历史看法是：数学要不是经历两百多年的这一次“欧拉数学危机”，也许数学不会被排除在诺贝尔奖之外，近代爱因斯坦和丁肇中都很关注数学，可想而知．我的研究表明，理论数学是应用极其深广的数学，可以破除“哥猜”没有用的错误观念．

当然您书中也写了这样的情况（最近庞加莱问题上类似），虽未见结论，知道有“APB定律，平方法(181)”未能相信是否有进展．然“哥猜不过是一个井蛙之见……”显然是错误的．因为：①“哥猜”是伟大的，揭示了“欧拉数学危机”；② 即使 APB 定律是正确的（具体不知道），很了不起，那也是在“哥猜”之后的发现，岂可凌驾于“哥猜”之上，也许是欧拉数学之中的观念．哥德巴赫猜想之所以伟大，不但是“难”，而且还在于为什么“难”．“欧拉数学危机”在表面上看，只是大数学家欧拉解答不了这么个简明扼要的数学问题，实质上是揭示了欧拉数学，是不经过严格证明（实变数恒等式），是不严密（七桥问题）、不严谨（拓扑公式）、不完整（素数问题）的，是感性的验证性数学．

既然话说到这个份上，我也坦率地告诉您，我对数学研究只有十年，已告一段落，诸多问题已经可迎刃而解，心境已经宽松多了；外界的问题在我来说，要么自我鉴定的解答出来，要么很明确的理解．看了您的信和书之后，以上的意见供您参改，我喜欢交流，也告诉您关于我个人对“哥猜”的结论：① 哥德巴赫定理的偶数是大于等于 8 的大偶数；② 三线相交图上的交点就是每个大偶数的两个素数之和，可推理证明每个偶数都有三线相交点；③ 表达式 $M/4P_n$ 大于等于 1，证明了每个大于等于 8 的偶数都有一个“纯素数对”，即都是两个素数之和．这是我 2000 年 12 月 15 日成稿《数学是中国人的特长 —— 纪念华罗庚先生九十诞辰 —— 证明哥德巴赫猜想》的结论．也在 2002 年 5 月 30 日成稿《哥德巴赫定理的为什么》这是极为易懂的证明了哥德巴赫猜想的数学原理 —— 依据《数的数对大定理》．其实又是数的总和公式

$$\sum_{0}^{m} m = m \times (m + 1)/2$$

谁都知道数学中从 1 加到任何大数的“总和数”是启蒙数学，想不到会是哥德巴赫猜想解答的最基础的原理．所以我的稿件命名为《哥德巴赫定理的为什么》．这两个成熟的稿件，我一直是公开的，也许是数学家觉得很容易懂而平凡，看不上眼；其实我觉得是确凿无疑的证明，无论权威数学家理睬不理睬，认可不认可，要自信在数学上讲理，确凿无疑就可以．深信世界上的一切都讲究一个“理”字．

对“哥猜”在近两年内，我重新核查命题及其由来，也对外公开，唯一新“素数定理”，为了全面进行核查鉴定，要在世界上经最严格确定之后，我想这涉及三百多年前法国数学家费马先生的“小定理”，是在 1729 年 12 月 1 日哥德巴赫写信要欧拉证明的，欧拉经三年努力，1732 年验算得出 F5 不是素数，否定了费马素数公式，于是世界数学陷入了找不到素数规律性的“欧拉数学危机”中，欧拉的研究报告称：数学家们迄今不能发现素数序列的规律，并且我们有一切理由相信有些奥秘是人类永远无力探索的．（G·波利亚．数学

与猜想.第99-100页)现在是说素数有规律,所以是重新回答277年前哥德巴赫的问题,要严格、谨慎地面对四至十位的数学家讲出来,甚至在大会上讲出来,是非常严峻的,一定得讲清楚,讲明白.否则就不公开,反正我已经发现了"素数定理",权威数学家不要,也就不公开好了,我不想名与利.其他基本上可以说我都已公开出去了.当然我知道自己公开出去的稿件得不到理睬,更谈不上发表.为了数学,不知是否可以请您帮助做两件事情:第一件是我想要华罗庚先生的《堆垒素数论》与《数论导引》的书,以及王元写的《华罗庚传》及其华先生的演讲之类的书与文献.第二件是我想要德国Volke教授在1996年给数学所的《哥欧通信录》中文译印件的复印件.我的目的是为了对照核查与鉴定自己10年来的数学研究,无论别人怎么看,我自己这样做才是最重要的.您肯帮助我吗?信中有不对的地方请批评,我也不需要你的"宽容".数学上我爱好自己,也爱好自在.

致以

敬礼!

金朱法　2006-7-4

改于2006-8-12,再改于2006-8-20

再及:信传真后,有些后悔,觉得可能伤着您的自尊心.我不该用"败笔","最严重的败笔"的字句,在此表示歉意,并重新寄信.接上次信中我以为历史终究是要真实而严格地前进的,一旦"哥猜"公认解答出来的时候,田某教授将何以面对大学生呢?故在您的书中还是给自家留点余地,别像杨某和田某那样把自己封闭了.在上面我的说法中有不当的地方请同样指出,让我们成为数学上的好朋友,好吗?

金朱法　2006-8-20

编后语　*自从本文集出版以来,收到大量读者来信,每辑都会选择性地登上几篇,世界之所以美好,在于它的多样性,人也是如此,多样意味着丰富,不同的认知方式和看问题的角度使我们感到"事实远比想象更离奇",我非常渴望具有"民科"们的执著、自信和无穷的精力,但总也想不出何以致此,这真是人类精神世界的一个未解之迷.*

胡桢与哥德巴赫猜想[①]

刘华杰

受访人:胡桢(上海耐火材料厂退休职工)

时　间:2003年5月23日至29日

刘(本文作者):非常感谢您接受采访,我们以前有过一点联系,正如您所说,主要是认识上的不同,不涉及个人恩怨.我做此采访也是想求得不同观念之间的理解,也想让世人了解民间科学爱好者是如何工作的.这暂不涉及对错问题.

首先您是否愿意以真名进行采访并在将来正式发表出来?至于用真名或用笔名都按您本人的意见办.

胡:对于是否愿意以真名接受采访,确实存在着一个问题,因为我的真名久已不用,如今户籍上所用的是乳名.我是贵字辈,名叫胡贵樑,胡桢的网名就是据此而来.如今户籍上所用之名是胡祥福,是为了逃避学校的追踪而改,因为我当学徒时足岁只有十三岁半,属于童工.所以,您只能从我的乳名和网名中挑选一个了.

刘:请您用两三句话概括一下您目前的"科研进展"以及主流数学界对您的看法.

胡:目前主流数学界对我的看法,我并不知晓,因为我从不向传统媒体投稿.但在网上有的人认为,若我的观点成立,将是数学上的灾难;因为我的观点中有许多涉及了基础数学,尤其是解析数论,我从根本上予以了否定.我认为,从自然数列中所获得的函数,只能应用于自然数列中,焉能到处滥用!哥德巴赫猜想是加法关系中的一道习题,自有其本身的规律,不是可以从自然数列的函数中获得解析的.纵然是自然数列中的孪生素数问题,由于所要求的情况不同,自然数列中素数分布的函数也是无法求取的.我的观点,有人赞同,也有人反对,但并非是主流科学界的人,因为主流科学界并不关注网上的讨论.

刘:我想我们可以慢慢进行.可否先介绍一下您的成长、工作经历?

胡:我生于1945年10月,1951年2月启蒙于弄堂里的混合班,9月转入上海勖爱小学读二年级,1956年9月就读于上海浦光中学.1959年2月辍学,到北京水暖二厂当学徒,1980年调入上海耐火材料厂工作,2000年11月退休.

我是一个辍学的初中生,如果按文凭来讲,只能算是一个有小学文凭的人,而且这样的文凭也已被我丢了.应该说,上学时我并不是一个好学生,经常地开红灯,虽然没留过级,但也只是勉强地读下去.小时候,只知偷着玩,并不喜欢读书.辍学,给我的感觉是轻

① 摘自刘华杰著.中国类科学.上海交通大学出版社,2004.

松，可以不用做作业了．真正让我认识到不能浑浑噩噩地虚度一生的时刻，是在参加工作之后的事，大约于17岁左右的时候．但当时并没对自然科学感兴趣，所习的是哲学和政治经济学．这是因为我的出身不好，在学校时就被内定为政治上不可靠分子，一直受到歧视，这造成了我自小就具有逆反的心理．为了出人头地，我必须了解社会，掌握一些如何立足于社会的知识．故而，我选择了哲学和政治经济学．可以说，对于当时的社会而言，我应该是一个内在的危险分子．

"文化大革命"开始时，我20岁刚刚出头，在逆反心理的驱使下，我参加了造反派组织，成为我厂造反派组织中的笔杆子之一．作为造反派组织中的笔杆子，必须揣摩报纸杂志所发表的文章之意向，且结合我厂的实际情况，撰写大字报、发言稿、广播稿等，这就让我学会了如何分析文章中的精神实质，化成为自己的语言．也许就是由于在"文化大革命"中的锻炼，使我在无人教导的情况下，学会了自习．

说实在的，在二十七八岁之前，我对自然科学一点兴趣都没有，所看的书籍全都是文哲类的或者是小说，我对自然科学感兴趣，应该是被逼无奈的事．由于"文化大革命"中造反派的没落，我也是受冲击的人之一．痛定思痛，让我明白了政治的危险性，我用矛盾论中的主要矛盾方面的知识剖析了"文化大革命"，看到了主要矛盾的转化之可怕性，原来的动力若不能适应于新的形势，就会转化成为被打击的一方面，于是，我卖掉了所有的文哲类的书籍，且发誓，从今之后，再也不碰此类的书．在"文化大革命"的后期，我当了一名逍遥派．

但是，已被激发的大脑已无法停顿下来，心里想的总是看书，而当时又没有小说之类的闲书可看，为了麻痹神经细胞，我就买了些自然科学类的书，让大脑不至于处在一片空白之中．最初购买的是理论力学的书，发现自己对于其中的数学知识一窍不通，根本就无法阅读，由此认识到，欲阅读此类的书，必须学好数学．于是，我购买了一套前苏联斯米尔诺夫所著的《高等数学教程》，从第一卷到第五卷，通读了一番．也许在我的基因中具有某些数学细胞之类的构造，在对高中的数学不求甚解的情况下，阅读这套高等数学教程却并不觉得太费劲．可能是得益于该书中没有习题，而我是只取其理，勿求其实，从未另觅其他习题做之，因为本来就是为了消磨时光而为．应该说，我对于科学知识，没有认真难待过，只是为了不让自己感到空虚，在没有其他书本可阅读的情况下，不得已而为之．

正是由于自己没有任何的压力，只对自己感兴趣的东西予以自习，且加上胡思乱想，所以，我的数学知识很不规范．也许正是如此，使我未受规范的知识所束缚，而是自以为是地学一些东西．

刘：您是从什么时候开始从事"数学研究"的？您为什么选择了数论的难题作为主攻的方向？是否受到当时关于陈景润先生研究哥氏猜想的媒体宣传的影响？

胡：真正让我感到必须在有生之年中有所作为的，是在获知了世界上存在着哥德巴赫猜想之后的事，而这一切，正是受媒体宣传陈景润先生的事迹之影响．开始时也只是出于好奇，并没有什么远大的理想，只是觉得，有此题作为消遣，也不枉我自习了数学的一番劳苦．其实，在我欲解哥德巴赫猜想时，我对数论一无所知，甚至连数论这一名称也没听说过．之所以选择数论作为我主攻的方向，就是因为这个哥德巴赫猜想．

我是在1978年4月20日开始对哥德巴赫猜想作研究的，可以说，开始时我并不是用数学的方法，而是运用了哲学的思维．对于数学，我并无很规范的知识，但对于哲学，却是有着很深刻的教训；因为在“文化大革命”中吃过亏，也就熟谙了矛盾论中的一些法则．而这一切，均是出于一次偶然的谈话之中．我是一个车工，每天下班前，要打扫加工下来的铁屑，以保持工作场所的清洁．这段时间，车间里所有的机器都关掉了，是彼此闲谈的好时刻．有一天，我与一位师兄谈起了陈景润先生，而我对陈景润先生的了解，也就是听说过这个名字，且不会比这三个字有更多的内容获知．我的师兄就说，他有一张报纸，上面登有徐迟先生的报告文学，并说可以借我一阅；第二天，他就将这张《光明日报》给了我．从此后，我就开始了研究哥德巴赫猜想之生涯．

大约花费了我两个月的心血，终于让我找到了解决哥德巴赫猜想的钥匙．于1978年6月20日，我给北大数学系寄出了我的第一份所谓的论文．应该说，这是一份小学生的答卷．因为，该篇拙文所用的是哲学上的语言且添加了些四则运算，并无什么数学论证之类的痕迹．但用集合论解哥德巴赫猜想的基本框架，已在该篇拙文中确定，且最终的数值，也已用四则运算算了出来．可想而知，拙文是被退了回来，因为其根本无法说清道理．由于对自己采用否定之否定法则来解哥德巴赫猜想的思路十分自信，所缺乏仅仅是数论知识，所以，我学习数论，乃是带着已解决了的哥德巴赫猜想之问题，在数论的书中寻找一些定理和术语，仅此而已．

刘：北大数学系当时正式把稿件退给您了？后来您还向什么刊物投过稿？是否参加过数学方面的学术会议？投稿或者学术交流过程中您受到的待遇是怎样的？

胡：1978年底，我曾走访过中科院数学研究所，一位约四十多岁的接待人员仅看了拙文的首页，说我用摩根定律将加法关系 $M = a + b$ 中的两个自然数相加化成为对单一的自然数之研究，有点小聪明，也就将拙文退还给我．并说，不久后陈景润先生就会出一本书，让我届时好好地阅读，就去看他的参考消息，不再理睬我了．

1982年，经华东理工大学当教授的亲友帮助，我的拙文送给了华东师范大学一位退休的数学老教授．他似乎有点名气，是我亲友的老师，俩人看上去很热乎．老教授答应我让他留校的学生审阅．同时送上去的另一篇批驳素数的出现概率为零之拙文，没过几天就退了回来；而那篇解哥德巴赫猜想的拙文一直在留审，大约将近有一年的时间后，我的亲友将消息传来，华师大准备将我的拙文发表在该校的杂志上．喜悦的余波尚未消逝，我的亲友又将消息传来，我的拙文未通过政治上的审查，理由是：陈景润先生是受国家保护的．有了这两次的失败，从此之后，我再也不相信这所谓的科学共同体，情愿让拙文束之高阁，勿作投稿之举．

至于数学方面的学术会议，从未参加过．

刘：您在网上提到曾经与一位副教授合作过，向国外的学术刊物投过稿，可否稍详细地介绍一下情况？包括结果．

胡：这是2002年9月份的事，在《教育在线》的旧版论坛中，有一个署名p5的先生，撰文劝说在该论坛中用初等数论解哥德巴赫猜想的人，以免浪费精力．对于他的劝说，我以胡思之的网名予以反驳．正当我辩兴旺盛时，收到了p5先生电子邮件，问我是否就是胡

桢.他说,仔细分析了我用胡桢之名写的那篇解哥德巴赫猜想的文章,认为很有道理.并说,是否愿意合作,将其翻成英文向国外投稿?在我表示同意之后,他告诉我,他姓汪,是一位青岛海洋大学的副教授,研究海洋生物的,但对数学很感兴趣,曾在其学校的校报上发表过数学论文.

他认为我的拙文用引理的方式,不能将问题讲清楚,准备予以修改,并对我的解之正确性作验证.验证的结果发现,尽管这一般之解可以很好地反映出两个奇素数之和的起伏性,但正误差太大.我告诉他,一般之解是在取消了取整之步骤的基础上获得的规律性,若要对有限值作验证,就必须恢复取整之步骤.对于哥德巴赫猜想而言,所采用的逐步淘汰原则与$\pi(x)$有异,是二阶的逐步淘汰.他采用了我的二阶逐步淘汰原则验证后有了比较满意的数据,也就最后定稿,并附上了验证的数据及图表.

他将用英文写的文章向美国《科学》杂志投了稿,结果是被退了回来,还附上了一句很有趣的评语,连审查的资格都未获得.由此,那位汪副教授认为,在哥德巴赫猜想的问题上,国外的比中国的更糟,中国还将其当回事,而国外的根本就不将其当回事.

刘:您认为大约在什么时候,自己的研究工作取得了突破,您的主要研究方法是什么?

胡:我对哥德巴赫猜想的研究取得突破的时间就在1978年6月份,我的主要研究方法是集合论.开始时,我只是对两个加法公式

$$M = np = (n - m)p + mp$$

和

$$M = nq + r = (n - m)q + mq + r$$

作代数上剖析,什么替代、消元等,都无济于事.此时,我想到了《实践论》,必须将偶数表为两个自然数之和的情况都一一列举,从中寻找规律.于是,我就将6至100的偶数表为两个奇素数之和的情况在数学小方格上制成图表,每天对着图表作遐想,终于让我悟出了道理.

刘:您读过的主要数学著作和论文可否列出一些?举例哪些对您最有启发?

胡:我读过的主要数学著作就是斯米尔诺夫所著的《高等数学教程》丛书,但对研究哥德巴赫猜想最有帮助的是库洛什所著的《一般代数学讲义》.斯米尔诺夫的著作让我懂得了极限、无穷等概念,而库洛什的著作让我懂得了良序化.说实在的,搞通我思想的乃是《一般代数学讲义》中的良序化之链,而且也正巧,在接触哥德巴赫猜想问题之前,我刚阅读了《一般代数学讲义》这本书,印象比较深.当我对着图表发呆时,突然间就来了这样的灵感,何不模仿一下该书中对自然数集N所作的良序化之链,也对加法关系$M = a + b$中的集合作良序化?如此,一切问题均迎刃而解了.

刘:您与青岛海洋大学的汪先生合作,英文文章为什么要投《科学》这样的杂志,据我所知,它很少刊登数学方面的进展.您是否打算继续向国外其他的数学杂志投稿?您能否再谈一谈,国外杂志社拒绝的可能的理由.

胡:我对英文一窍不通,所以,从未想过要将拙文翻成英文向国外的杂志投稿.与汪先生的合作,就是因为他懂英文,可以将拙文翻成英文进行投稿.至于为什么要向《科学》这样的杂志投稿,说实在的,由不得我做主.因为,我对国外到底有哪一些杂志并不知情,

一切全都拜托于汪先生，而且，第一作者的署名也是汪先生；成功与否，全凭汪先生的努力.国外杂志社对拙文拒绝的可能理由我不知道.只是在投稿失败后，汪先生告诉我，他们认为很有趣；也就是说，认为拙文很可笑.退稿的原因究竟如何写的，汪先生并没有告知，告诉了我也不懂.

我不懂外文，所以，不打算再向国外的杂志投稿.

刘：您是从什么时候开始上因特网宣传您的研究结果的?为什么要走这条路，您认为这有效果吗?

胡：我是于1999年9月9日开始在因特网上宣传我的拙见的.开始时，只在我的主页上做宣传，结果发现不太理想，因为访问量实在太少.自购买了电脑后，我花了三个月的时间，申请主页，申请论坛和留言簿，编写内容，好不容易将主页搞定，却无人访问，只有《无穷大工作室》的周先生在留言簿上留下了一句话.于是，我决定放弃个人主页，采取打出去的方法，在人多的论坛中宣传我的拙见.

我之所以要在因特网上宣传拙见，而不是进行投稿，主要原因就是对主流社会感到失望.如前所言，我的拙文曾通过了技术性的审查，却未能通过政审这一关，而且，所说的理由是为了保护某人的名誉.主流社会以这样的态度对待知识，我宁可让拙见烂在肚子里，也不愿低三下四地去讨好主流社会.

我认为，在因特网上宣传我的拙见，已经达到了我的目的.本来，我就没想过要数学界来承认我的拙见，我之所以要在因特网上做宣传，乃是为了给后人留下一丝踪迹，解哥德巴赫猜想可以用良序化的方法解决.若我不在互联网上做宣传，那无人知晓我的想法.而今，已有许多人知道了我的观点，且有许多地方转载了我的拙文，应该说，我已达到了预料的效果.

刘：《人民日报》社办的人民网上的论坛好像您以前经常去，也贴过许多东西，版主还为您建立网上“文集”.在这之前，您还到哪些论坛与网友交流过?

胡：在去人民网之前，曾去过由杨学友先生主持的哲学论坛，如何在论坛上加贴的方法就是杨先生教会我的.之后，又到了由王、吴两位先生共同主持的“统一论坛”，该论坛是讨论物理的，要将相对论与量子力学统一起来.因为见到“统一论坛”中只有“斑竹”自己在谈论物理，其他人所加之帖都与物理无关，于是乎，我决定站在反面的角度说话，让论坛对物理之话题热闹起来.其实，我对物理乃是一窍不通，但我的作为确实使得论坛归结于物理的讨论上.当我离开“统一论坛”拜访人民网的读书论坛时，已有许多物理爱好者相聚于该论坛中.

刘：在因特网上，针对您的话题，您所遇到的网友大致有哪些类型?是否有专业数学家回答您的问题或者与您讨论?他们是否向您提出过好的建议?

胡：这是一个不言而喻的话题，对于我所解的哥德巴赫猜想，不关心的人总是不置可否，而关心的人总是分成两类，一类赞同，一类反对.在《北京青年报》的论坛中，有一网友在我的帖子后跟帖说：“胡桢先生，我在多处论坛都曾见到了您的帖子.我曾和同事们一起讨论过您的东西，得出的结论也是一半对一半的.支持的观点是您在方法上是有创见的，是适用的.反对的意见是你的方法在使用中最终触及了数学赖以维持其合理性的

基础,就是说,如果你的方法为合理,即导致很多类似于群论这样的基本理论瘫痪.代价是非常大的."我想,这应该是所有关心我的拙见之人可分的类型.

至于专业的数学家,迄今仍未遇到过.我想,假设让我遇上了,也只能是这两种情况,或是赞同,或是反对.若说有谁向我提出好的建议,也就是让我好好地写一篇稿件,进行投稿.而我对于投稿,完全没有兴趣.

刘:请概括地谈一下,您自己认为在"数学研究"方面取得了哪些方面的"进展"?

胡:很简单,就是从哥德巴赫猜想之解中分清了集合的基数之大小.但是,此一辨清,所涉及的数学问题是很多的,关系到数学的基础.再有,就是孪生素数的问题,与哥德巴赫猜想之解的方法相同,但有别于哥德巴赫猜想.一言以蔽之,筛法的原理是一致的,但随命题的情况之不同,必须区别对待.

至于四色问题,说实在的,应该不能被称做是数学上的问题,因为它根本不需要用数学就可明辨之.

刘:您家里人怎样看待您的研究工作?是否支持?孩子现在做什么,听说在读大学?您现在除了研究和宣传数学工作外,一般都做哪些事情?

胡:其实,我的行为举止并无任何的异常,家里人根本就感觉不到我在研究些什么.对于自己所解的哥德巴赫猜想,我认为,实乃是一件很自然的事.因为,当我在接触哥德巴赫猜想这一命题之前,刚刚阅读过《一般代数学讲演》这本书,而该书所讲述的内容,正好是解哥德巴赫猜想所必须具备的知识,通俗地讲,也就是瞎猫遇到了死老鼠,碰巧了.而我也一直认为,哥德巴赫猜想其实只能被当做中学生的一道课外习题,只是人们尚未认识到解其的方法而已.据说,陈景润先生在解哥德巴赫猜想时,用掉了大约二麻袋的草稿纸,而前段时间所盛传的广东王来生先生更神,言其用去的草稿纸约有半吨之多.说实话,我没有这样的业绩,当我自认为已解出了哥德巴赫猜想时,所用掉的草稿纸,应该不会超过二十张.所以,我周围的人,根本就不可能发觉我在做什么.至多是认为我无聊,没事可干,只好在纸上乱画.调到上海工作也有20年,但该单位里的人,没有一人知道我曾解过哥德巴赫猜想.

我的儿子大学已经毕业,学的是生物.他对于数论并无兴趣,所以,我也不与他讨论哥德巴赫猜想,一切随其所欲.

我的生活极其普通,每天的电视剧是必看的,且一直要看到深夜.若有小说书看,我会一刻不停地将其看完,速度之快,常使人咋舌;未退休时,单位里的武打书基本上都被我看遍.应该说,我并非是一个可以搞研究工作的人,七情六欲,遍遍皆存;仅仅是偶怀逸兴,拾遗了哥德巴赫猜想之解,因为其本来就不应该是一道难题.

刘:您读的数学论文多不多?陈景润的论文您阅读是否有困难?

胡:一篇数学论文也没看过,更不用说陈景润先生的论文.老实说,我之批评陈景润先生的 $p(1,2)$,其实并不是针对陈景润先生的,而是针对解析数论的.但由于目前在哥德巴赫猜想的问题上,公认的结论是陈景润先生的 $p(1,2)$ 为最佳,若不说一下陈景润先生,会让人认为这最佳的结论是无懈可击的.我批的是用减法关系 $x-p$ 来解哥德巴赫猜想,认为它是错误的前提,而陈景润先生所用的前提恰恰正好是 $x-p$;有此名人效应可

民科天地

利用,何乐而不为呢?其实,对于陈景润先生的论文,除了在徐迟先生的报告文学中所提到的一些外,我是一无所知.

刘:您说"一篇数学论文也没看过,更不用说陈景润先生的论文".您认为,不需要读前人的论文吗?您认为哥德巴赫猜想可以完全重新起炉灶并一举攻克,比如您本人?

胡:我没说不需要读前人的论文,而是说我没读过前人的论文.因为我阅读数学书籍,并非是为了研究,而是为了消遣.所以,从来就不订阅数学杂志,也就无从阅读数学论文.这主要是因为当时没有其他的书可看,只好以数学充数了.对于哥德巴赫猜想,我认为,必须另起炉灶重开锅,才能予以攻克.

数论学家之所以说尚未找到解决哥德巴赫猜想的方法,就是因为用这所谓的素数定理根本就无法计算加法关系中的两个奇素数之和的分布情况.但数论学家面对这样的谬误,并不是进行反思,问一下究竟错在哪里?恰恰相反,为了维护已有的成就,而将哥德巴赫猜想束之高阁.

刘:您是否曾尝试过研究一些相对容易的数学问题?因为毕竟多数数学家是从研究小题目开始的.

胡:从未有过这样的尝试.因为,我本来就不是一块搞研究工作的料,对于数学知识,知之甚少,根本就不认为自己可以研究些什么.我之所以要对哥德巴赫猜想作研究,纯粹是为了消磨时光,实在是闲得没事可干.当时,我单身一人在外谋生,住的是集体宿舍,业余时间,除了看书打牌,再无其他的消遣.由于儿子刚刚出世不久,心里总是记挂着,感觉上很不好受.为了不去想这些让人心烦的事,只好觅些可分心的事干,哥德巴赫猜想正好撞在这枪口上.谁知歪打正着,竟然让我解了出来,从此后,一发不可收拾了.

刘:说实在的,我与许多人一样,不认为您真的做出了突破性的工作.但我深深了解您的执著.所以好像是在去年,我曾建议您写一部关于数论历史或者哥德巴赫猜想研究史的科普书或者系列科普文章,不知您对那一建议持怎样的看法?

胡:许多人否定我的拙见,这并不会让我感到奇怪,因为,拙见毕竟是没有获得公认的知识.我之所以如此地执著,是因为自信我的拙见乃是正确的.去年您曾建议我对哥德巴赫猜想写些科普类的东西,显然,这是您高估了我的能力.尽管我自信已解出了哥德巴赫猜想,但这并不等于我对哥德巴赫猜想之事很了解,可以达到为其写科普的程度.解出哥德巴赫猜想,仅仅是技术性层面上的事,而写科普类的东西,为了生动,必须要全面地了解哥德巴赫猜想的历史.而我除了从徐迟先生的报告文学中知晓陈景润先生的$p(1,2)$外,还知道些什么呢?一无所知也.所以,对于我而言,写科普类的东西其实要比解出哥德巴赫猜想更难,连勉为其难之词也不敢存有.

刘:您的经历对于人们了解何谓数学,数学界如何运作,在社会学和传播学的意义上讲非常重要,我想知道您是否有同行,您对同行是怎样看待的?我指的同行是,与您类似,也关注大的数学问题,并非常执著,但不被主流学界认可.

胡:如果您所指的是"哥迷"们,这不用我说,应该是很多的.但在现实生活中,我从未遇到过,只是在网上有所接触.确实,人若入迷,一般是很难自拔的.在互联网上,有"教育在线"和云南大学的"东陆论坛",为哥德巴赫猜想开设了专题的论坛,聚集了不少的

"哥迷".但在彼此磨合的过程中,还未曾见到有谁放弃自己的观点而赞同他人的.尽管如此,但只要有争辩,总会有一天辩出一个是非曲直的.我认为,凡是参与者,虽然有许多人的观点存在着明显的错误,但也是研究哥德巴赫猜想之解的先行者.

刘:您对您的成果最终被社会、被数学界认可,有怎样的估计?前途光明还是黯淡?您对数学界肯定有一些看法,那么您认为要改变的是您本人,还是数学界,应当如何改变?可能性有多大?

胡:对于本人的拙见,我丝毫不怀疑其最终被数学界所认可的事,仅仅是时间上的问题,前途必定是光明的.但以目前的情况而言,拙见被公认,应该是不太可能的.如前所言,拙见所涉及的是基础数学,关系许多著名数学家的理论,有许多地方对当今的数学理论是致命的.譬如,康托尔定理、哥德尔的可构成性定理等;更有甚者,有可能将整个的解析数论取消,以还数论之本来的面目.如此重大的分歧,在毫无沟通的情况下,是不可能有什么改变的.鹿死谁手?应该有逐鹿之举,而不是以势压人.我将希望寄托于后人,届时,在一些谬误的见解使得数学上危机四伏的情况下,自会有人发现,原来于21世纪时,已有人指出了其中的谬误.

刘:您认为科学界(数学界)对待民间科学(数学)爱好者应当更宽容一些吗?如果是,那么您认为这是否会使科学(数学)的大厦变得十分不稳定?

胡:这不是一个宽容的问题,对于错误的认知,任何时候也不应该宽容,无论持有该错误认知的人是什么样的身份.因为,只有正确的知识才能使人类的社会前进.问题在于,是谁掌握了正确的知识,是民间的还是专业的?以哥德巴赫猜想为例,前段时日,有许多数学家对此发表了看法,然而,这许多的话语是那些数学家经过实践研究后得出的还是随心所欲的信口雌黄?应该是后者.因为那些数学家根本就不研究哥德巴赫猜想,而且对于民间用初等数论来解哥德巴赫猜想的观点一无所知,有什么资格做出这样的评说?难道就因为是挂着数学家的牌子,也就可以全然不顾自己是否真的了解其中的实质,而随意地下定义吗?我想,这决非是科学的态度.正是由于中国的数学界存在着这许多的不以实践真谛而说话的数学家,才造成了有许多的民间人士因此而发难,使得数学的大厦变得十分地不稳定.如果中国数学家的话无懈可击,怎会有这许多人反其道而行之?难道民间的人士全都是吃饱了没事干,尽找些不可行的事干?

刘:您对"数论"这一数学子学科有怎样的评论?像费马大定理以及黎曼猜想这样的问题,您是否有兴趣?从您的眼光看,怀尔斯证明了费马大定理,是否可信?

胡:数论,作为一门研究自然数性质的学科,其是数学中的子学科,自有其应得的地位.但其中的解析数论,实乃是谬误认知的产物.

以我的眼光看,怀尔斯证明的费马大定理,并不可信;我想,在论坛中,您已见到了我对此事的评说.我认为,费马大定理是三角函数中的一道习题,而怀尔斯先生却是用椭圆函数在解费马大定理,其正确性难道不应该受到置疑吗?也许怀尔斯先生的定理已是无懈可击的,但其决非是在对费马大定理求解.因为,三角函数只有一个焦点,而椭圆函数有两个焦点,它们的数据能一样吗?

至于黎曼猜想,恕我直言,其是导致解析数论之错误的根本;如果没有黎曼猜想,也

许数论学家也不会犯到处滥用素数定理这样的错.以我所认识的,对于素数的分布情况,唯有用集合论的方法才能求之,故而,对于这个黎曼猜想,兴趣索然.

刘:您从来没有向您的孩子透露过您从事的"数论研究"吗?

胡:并非如此.我的亲人们都知道我说自己已解出了哥德巴赫猜想,但也仅仅是知道了而已,因为他们对此都无兴趣.而且,我的行为举止很正常,与他们相处得十分融洽,可以说,根本就看不出我在研究.您知道,我在人民网的读书论坛中,经常与别人掐架,也可佐证,我对数论的研究,并非是陷入了忘我的境界,而仅是兴趣所致,空闲时稍为客串一下而已.

刘:交往中(包括因特网),是否有人就您数学证明的细节指出过错误,比如某一步骤的推导是错误的?

胡:这是必然的事.因为人之认识不同,不可能都趋于一致,总会有人说我的某些细节有误.但我对于这样的质疑,也必然地要进行争辩,以阐明自己的观点.上网约有四年的时间,这样的争辩不断地发生,但迄今为止,尚未有人能驳倒我的拙见;相反,却有人被我所说服.

刘:在您心目中,数学是什么?您一定把数学当做生活中一个部分,这部分数学并没有得到承认,这是否影响您的日常生活或者情绪?

胡:以前,数学对于我而言,仅仅是一种消遣,根本就没想到自己会有所发现.而今,数学确实已成为我生活中的一部分,因为,我已认为自己可以对数学有所作为;但这并不影响我的日常生活和情绪.我这个人比较想得开,不属于我的东西,决不强求.尽管我自信已解决了哥德巴赫猜想,也只是在事在人为的思想支配下,宣传自己的拙见,从未有过一定要在有生之年中,获得世人承认的想法;所以,生活起居,一切均很正常.如果没有互联网,我想,拙见一定会随我的死亡而无人知晓.因为,自从遭遇了在华师大投稿失败的挫折后,我就放弃了让拙见发扬光大的念头,转而开始对电脑有了兴趣,想从小就培养儿子学电脑.早在儿子读小学二年级的时候,就买了台娃娃电脑教儿子编程,但儿子只对玩游戏有兴趣,白费了我一番心血.

刘:从您这样的民间科学爱好者角度看,您希望"科学传播"领域多做些什么?科学社会学或者科学传播学是否应当重视你们这样的民间科学爱好者"共同体"?

胡:传播科学,应该是以科学知识为内容,而不是以什么共同体为对象.如今在社会上,将研究科学的人分成为科学共同体的与民间的,这本来就是不科学的分类.我认为,只有专业的与业余的、主流的与支流的区分,而无科学共同体的与民间的区分.

刘:您一定知道朱海军,你认为他是成功的吗?我一直认为朱是一个有趣而执著的人,一直想见他一面,但他就在这个时刻突然去世了.

胡:朱海军先生的大名,如雷贯耳,而且在读书论坛中,也见过他所发的帖子.他成功了吗?也许是出了名.但出名并非一定是留芳千秋,也有可能是遗臭万年的.对于朱海军先生的帖子,实在是不敢恭维;但死者为大,也就不必多说了.

刘:看得出来,您颇自信,一定认为自己是个理性主义者、实在论者.最近您在忙什么?还准备从事数论研究吗?可否介绍一下您的计划?

胡:我除了在网上宣传自己的拙见,以便让其发扬光大外,再无其他事可干,因为我认为,自己唯有此事是值得做的.至于计划,说实在的,没有.我并非是一个勤奋的人,胸无大志,只是在偶然之中解出了哥德巴赫猜想,总算不枉在人间走上一趟.对于自己的能力,我是心明肚明,不可能再有什么新的作为,适可而止,应该是我最佳的选择.所以,集中精力在网上宣传我的拙见,为后人留下些许踪迹,是我唯一可做的事.

刘:幸福的人生!您上网的总时间一定不少,接触的 BBS 和人物更是多种多样,以您的经验,您如何评价这一新媒体?

胡:其实,我上网的时间并不算长,总共也只有三年半多一点时间;而且,很长一段时间里只登陆于读书论坛,最近才离开读书论坛,到处去走走.尽管如此,毕竟也是有些时日了,总有一点经验可谈.我认为,在网上,不乏有为之人,但更多的是消磨时光的人.就从这一点而言,民营的网站比之官方的更出色,因为他们会翻新花样吸引人.若结合我的兴趣,勿作泛泛之谈,则是政府机构的网站迄今尚未适应互联网之新媒体,还在睡大觉.

2002 年 6 月,我曾拜访过中国数学会的网站,因为获知该网站开辟了"数学网页"之窗口,专门收集发表在互联网中的数学论文.诚然,当时确实见到了这篇开场白,并且是信以为真.但是,时至今日,再拜访该网站,主页仍在宣传数学家大会;打开"数学网页"之窗口,依旧是这篇开场白,一个字也未改动过.须知,时间都快过去一年了,如此办事效率,实在是令人震惊,而这就是被称做是某类科学共同体中的最高机构之网站.

以我愚见,凭借互联网,确实使一些人出了名.但在中国,从未利用这新的传播方法促使科学技术的快速推进;因为在一些科学家的眼中,互联网是下里巴人的玩意儿.记得曾有报道说,在国外,有一科学家将论文首发于互联网上,同样是获得了承认,且为了该篇论文中的观点还闹腾了一番.而在中国,这样的事情是不会发生的,因为中国科学家根本就不将网上发表的文章当一回事.中国的互联网,应该是文艺一统天下,因为可以变换成钱.

刘:我们的采访已经进行了约一周的时间,非常感谢您的合作.

以上从侧面或者反面为科学传播研究提供了一份有趣的材料,他人也可以利用这样的材料进行社会学、人类学等研究.

也许,利用这样的材料我们可以更好地领会现代社会中什么叫做"遵守规则",以及(不)遵守规则的含义、后果,从而了解现代科学(数学)是怎样运作的,为什么它们不接受民间科学(数学)爱好者.再进一步,"规则"是什么?"谁"通过"什么"办法制定"规则"?这便进入数学哲学了.

留下一个问题:胡先生一直在努力地宣传着自己的观点,相反没有人愿意对他的观点进行系统的反驳,如何评估他对科学传播的影响呢?

蒋春暄黎鸣现象和中国民间数学

龙之心

1　引　言

近年，有两个数学狂人把中国数学界闹得沸沸扬扬．这两个狂人，一个是数学狂人蒋春暄，声称解决了三大数学难题的哥德巴赫猜想和费马大定理，一个是哲学狂徒黎鸣，声称解决了三大数学难题的四色地图定理．两个人都是业余数学家，我们不妨称为蒋春暄黎鸣现象（此前已有蒋春暄现象之说）．对他们的成果，至今未见有职业数学家著文表态、但已有反伪科学的打假人士如方舟子等人表示怀疑，甚至称之为“伪科学”．

（注：称为数学家是要有门槛的．刘华杰建议“民间科学家” 比较贴切）

我们在此把这个事情扩展开来看一看，因为这个事情不只是两个人的事，而是涉及几万、几十万业余数学、业余科学的研究者和爱好者，所以我们应当认真地慎重地加以思考，考察一下这件事情的内部究竟蕴涵着什么．

2　先说说日常层面的几个问题

每一个公民都有搞数学研究的权利——对数学文章的评判要靠数学——创造一个和谐的学术环境，可以争鸣，但不应当搞内耗．

首先说明，本文不对蒋春暄黎鸣的数学成果是否正确表态，那是数学权威们的事情．但无论其成果是否正确都不影响本文下面的论析．

这里先就蒋春暄黎鸣们的业余研究的日常层面蕴意，谈几点看法．

(1) 在一个公民自由、言论自由的国度里，任何一个人，无论他是数学家还是普通人，都可以对数学进行研究，这是他的权利，这是一个不争的事实．一个普通人，即使不是数学家，即使要进攻的是人类几百年的难题，那也是他的自由．旁的人，可以不相信，可以对他的结果表态或不肯表态，这也是他们的自由；但是不可以嘲笑，不可以打击．事实上，这两人就已受到了数学之外的种种压力，这里有普通人，也有著名人士．

对业余研究者，有的人一再劝告：不要把时间和精力放在数学名题这样不可能的事情上．可是生活中就有这样的人，他们认为这是在面对世界难题之于人类智慧的挑战．他

们乐于把这当做自己的兴趣和消遣,这也没什么不好.

(2) 一个公民,对自己的研究成果,发表还是不发表,在网上发表还是在平面媒体上发表,在国内发表还是在国外发表,这也是他的权利和自由.我们不能因为论文在国外发表就轻视它或重视它,也不能由它所发表的刊物够不够什么 SCI 检索级的学术刊物而断定它是否成立.不去看其证明过程正确与否而单去看什么杂志,纠缠发表杂志的身份是没有意义的.

(3) 两个业余学者的论文可能正确,也可能不正确.如果正确,是对中国数学和人类数学的一个贡献.这应该是令人高兴的事,而不应该是让人害怕的事.如果真的是业余数学家解决了数学名题,这也很正常,历史上这样的事并不罕见.如果这两个业余数学家的证明是错误的,这也正常.其中可能他们的某个概念、某个思想对人有所启示,这还是有益的.即使整个论述是全然无用的,那么对别人、对中国数学也并无损失.总之,这是有利而无害的.

(4) 一个人如果进行了几年几十年的研究得到的成果,就会把它视同自己的儿子,备加保护和珍爱,这是人之常情.在他的"儿子"受到攻击的时候,他的举止和言辞有些激烈或过当,也可以理解.特别是在这个成果还没有被证明是错误的时候.我们应当首先看到他们几十年的辛苦,看到他们的研究精神,而不必计较他们维护自己成果时的个别言辞而讥之以"狂妄".

(5) 既然他们的文章还没有证明是错的,既然他们在内心中认为自己是正确而不是明知自己错误而故意说是正确,既然他们并没有拿自己文章去谋取物质上的私利、去害国害民,那么就和伪科学有本质的不同,不能说是伪科学、骗局、骗子.进一步说,即使在他们的论文被证明是错误的之后,也不能说是伪科学,那也只是科学错误.这是科学研究进程中常有的现象.

在蒋春暄黎鸣现象上,这里想从三方面说话.

一是对蒋春暄、黎鸣来说,既然你们把论文拿出来,就是让大家评论,让专家鉴定的.因此,大家提出批评,甚至激烈批评,那都是题中应有之义.拒绝批评,即使有几百万人叫好,那也并不证明文章正确.如果批评的结果证明文章局部有错,那就修正补充,重新来过,休整后再战;如果证明文章从根本上错了,那就坦然承认,向科学俯首,这没有什么可羞的.

二是对于批评者来说,学术批评还应着眼于数学上的审视,这方面应当严格.在科学上,对就是对,错就是错,不讲什么感情.巴不得人家失败的心理要不得,离开数学搞人格评判的批评要不得.试想,一个60多岁甚至70多岁的老人,搞了几十年的研究,碍着别的人什么了?重要的是相互理解.

三是对管理部门来说,要重视专业科学研究人员的工作,为他们创造有力的研究环境的同时,也要扶持群众性的、民间的研究活动.职业工作者和业余爱好者,都是科学发展的动力.摆在我们面前的重要的问题是:中国当前的科学技术研究工作还很弱,大家应该共同创造一个和谐的学术环境,同心同德、齐心协力把中国的科学搞上去,可以搞学术上的争鸣,而不应当是搞内耗、窝里斗.

下面,想就数学上、哲学上的几个问题作进一步的分析.

3 一个没有证明的命题

是不是属于"初等方法""高等问题",这是一个没有证明的命题——解决四色地图问题的数学家的说法——点猜测的历史教训.

在对待民间数学家的问题上,一个普遍的现象是,有些人还没看人家的论文,甚至认为压根就不用看,就直接断定:(证明)肯定是错的,(解决这问题)是不可能的.他们认为民间数学家只会初等的方法,而初等的方法解决高等问题是不可能的.

他们乐于引用数学大师华罗庚的一句话:"人是可以上月球的,但是骑着自行车上月球是不可能的."华罗庚先生这句话是完全正确的.正因为它是正确的,许多人也就把这句话当做回应业余数学研究者的撒手锏.

可是他们并没有正确地运用这句话.如果要正确地理解这句话,就要弄准两点:一是所要讨论的问题的确是业已证实是属于"月球"的难题;二是业余研究者所用的方法的确是初等方法的"自行车".

如果"月球"和"自行车"都已证实,那么的确可以对文章看都不用看,就下结论说:这肯定是错的,是不可能的.

例如,有研究者拿论文说,我光用加减乘除和有限次开方,可以求得任意5次方程的解.那么,专家说:我不用看论文,你是错的.专家是对的,因为对于加减乘除和有限次开方这"自行车"而言,5次任意方程的确是"月球",这已有群论做出了证明.

假如,有研究者拿论文说,我用圆规和无刻度的直尺,经有限次操作,可以3等分任意角.那么,专家说:我不用看论文,你是错的.专家也是对的,因为3等分任意角对圆规直尺而言,也是"月球",这也早有理论证明.

可是,就在四色地图猜测上,在费马大定理上,有谁能够说:哪些数学家在哪些论文中业已证明,用初等方法是不可能解决这样定理的!迄今并无这样的论证.

既然尚无人证明,那么这就是一个还未证明的命题.

没证明,那么一切就都有可能.

于是,这样的论证:

"因为用初等方法不能解决高等问题,

你用的是初等方法,

所以你的论证是不能成立的."

就不是可以随意使用的辩论武器.因为所要讨论的问题是否属于"用初等方法不能解决高等问题"这个命题中的"高等问题"和"初等方法"是尚未证明的,你把它当做已证明的命题来使用,这在哲学上叫先验论,在逻辑上叫大前提不充分,在推理上叫四名词错误.

我们还是拿四色地图问题来说,1976年数学家阿佩尔和哈肯用电子计算机花了

1 200小时证明了四色地图定理.这是一个震动世界的数学成就,可是这两个数学家却从来未说:四色地图问题用初等方法不可能解决;恰恰相反,他们说的是:"四色定理的简短证明说不定有一天会找到,也许是一个聪明的高中生找到的.但是,也可以想象,这样的证明是不可能出现的."看吧,他们就没把话说得那么绝对,这才是科学的态度.

我们再看一个著名的问题:点猜测问题.点猜测问题是:几个点的点图,任意两点之间都连有直线,那么不可能在每条直线上都是3个点或3个以上的点.这是一个挑战人类上百年的数学名题,难倒了几代数学家.可是最后如何呢?说来也许会出乎被它难倒的几代数学家之意外,它竟被人用完全初等的方法,用短短的两页就漂亮地解决了!

难道这个点猜测问题的历史教训还不够深刻吗?幸好当时的数学大师并没有对这个数学难题如同我们这几年某些人那样发表言论:忠告用初等方法企图解决点猜测的业余研究者们,我们已用解析几何、有限几何、微分几何、拓扑论等高级理论和高级方法试过了,你们想用初等方法更是不可能的,别枉费气力了.他们没有这样说.

但是今天仍有人在变相地发表着类似的言论.

现在,我们再谈谈"自行车"问题.自行车是比喻初等方法,那么,是不是凡民间数学家所使用方法注定是初等方法呢?毋庸讳言,业余者因基础所限,大多是初等方法,但是这并不绝对,业余者中的天才并不缺乏奇思妙想和超级才能,他们往往能提出创造性概念和新颖方法.上面所说的解决3等分任意角和5次方程问题的高等方法和理论,就是民间数学家伽罗华提出来的.伽罗华的群论是数学上的一个里程碑式的贡献.由此可见民间学者并不都是"自行车",他们也能创造登上月球的"火箭".

民科天地

以上可见,所谓"高等问题""初等方法"之说是一个未经证明的命题,拿这样并不肯定成立的命题作为否定业余研究者劳动成果的大前提,不是科学的态度.业余数学研究者的论文是否成立,还是要靠对其论文做数学本身的评判.

4 又一个没有证明的命题

"拉马努金的时代结束了",这又是一个没有证明的命题——数学的历史是谁创造的——业余研究者对数学发展的贡献.

近几年,有这样一个逐渐流行的说法:在当今的大科学时代,业余研究者是不可能有什么作为的.于是,凡是对业余数学研究者的文章,有的人事先就有这样的推论:

"因为在当今时代业余研究者是不可能有作为的,

你是业余研究者,

所以你的论文是不可能成立的."

这个三段论证,又是以一个全称肯定型的大前提作为论证基础,可是它成立吗?如果说,我们在上一节所说的那个"用初等方法解决不了高等问题"这个命题,还是个数学命题,在有些情况下这个命题是可以证明的,那么这个"业余研究者在当今时代不可能有作为"这个命题,就不仅是一个数学命题,而且是一个哲学命题了.这个命题只能是提出者

自己的"感觉"和臆想,它不仅是没有证明的,而且是不可能证明的.

这个说法是怎么来的,笔者不清楚,最早笔者是在2002年3月20日央视的《时空连线》中听到的.在这一期《我来解哥德巴赫猜想,行吗》节目里,中国科学院数学研究所的李福安数学家说:"业余爱好者不要把精力放到不可能的事情上,在当今的数学研究上,拉马努金的时代已经结束了."

拉马努金(1887—1920)是个天才的数学爱好者,直到27岁时应邀到剑桥大学学习,此前他醉心于数学研究,写了大量笔记.在大学学习3年后因病回国,住医院2年后去世.他的3个笔记本和手稿至今有美国著名数学家在研究.这里,"拉马努金"就是业余数学家的代称."拉马努金的时代结束了",这是一个全称判断,是说在一切大的数学问题上,业余数学研究者有所作为的时代过去了.

为什么业余研究者在数学上有所作为的时代结束了,这位数学家没有说,但是反伪科学的斗士方舟子在《方舟在线》一书中说了:"在科学高度专业化的今天,没有经过系统的科学训练,对具体的科学问题是不可能有什么高见的."他提出的理由是因为"科学高度专业化"、"没有系统的科学训练",基于此,所以业余研究者不可能再有"高见"!这就完全否定了业余研究者对当今科学的话语权.

那么,就请证明"业余研究者对当今科学不可能有高见"这一命题为什么是成立的."业余研究者有作为的时代结束了"是从哪一年开始的?为什么这一年就成了历史转折的关键点?

因为"科学高度专业化",所以业余者就被淘汰,这理由并不充分.如果说高能物理需要几个工厂式的实验室和电子对撞机,这种专业化业余者无法企及,那么对数学仍然存在个体可以"关起门来研究"的情况,例如,怀尔斯解决费马定理就是个人秘密研究了7年.至于知识理论的专业化,任何一个时代的人,站在自己时代的立场上,都觉得自己的时代是高度发展的.远的欧几里得、丢番图的时代不说,在欧拉(1707—1783)、高斯(1777—1855)、希尔伯特(1862—1943)的时代,当时的人都认为其时的数学已经高度发展,已经是"高度专业化",那么为什么还出现了伽罗华(1811—1832)和拉马努金?为什么在拉马努金之后的几十年还出现了陆家羲?

关于系统训练,这当然是重要的,但是这不排除例外和独辟蹊径.当今的高竞技体育的训练已是高度科学化,没经过高级教练的业余者并不乏民间出来的冠军,如象棋上仍有非科班的"绿林好汉"陶汉明成为特级大师,长跑上仍有"赤脚大仙"成为奥运冠军.

这里,问题的实质涉及一个社会哲学基本问题,就是历史是谁创造的?或者再限制一下,数学的历史是谁创造的?在数学的历史上,没有人否定数学家的贡献,但是也不应该否定数学家以外的广大人群的贡献.数学的历史,不仅仅是数学家自己解决数学问题的历史,更是数学家和人民群众包括群众中业余数学爱好者共同创造的历史.这个历史不会是从某一天起就突然中断了,变成了数学家自己的单边事情,而更多的人只能在一边看着.

业余数学研究者对数学的贡献是多方面的,我们不说《九章算术》《几何原本》从根本上说来自于人民群众的生产实践,这里仅就具体的数学问题来说,历史上从来就不乏

业余者的奉献.

(1) 业余者在自己的生活、实践或研究中提出数学问题. 例如四色地图问题就是由地图绘制者古斯里提出的，费马大定理是律师费马提出的，著名的拉姆齐问题是由青年逻辑学家拉姆齐提出的.

(2) 业余者提出了新的概念和方法，为难题的最终解决添砖加瓦，如业余数学爱好者、律师肯普就在四色地图问题上提出了正规地图、可约构形、不可避免集等概念，而最后解决这个问题的数学家阿佩尔和哈肯就使用了这些概念.

(3) 有的业余数学研究者可以大部分或完全地漂亮地解决重大数学问题. 如伽罗华解决了 5 次以上方程求解问题，陆家羲解决了科克曼女生问题的斯坦纳大集定理.

职业数学家和业余研究者都是数学发展的动力. 这个历史一直在延续，可以断言即使 100 年以后，这个历史也不会改变，仍会有业余研究者在数学上作出贡献的事例出现.

在我国，历史唯物主义讲了几十年，如今仍有人漠视和排斥民间群众，而美国著名杂志《科学》上却有科学家强调："科学要对默默无闻的业余爱好者开放." 这倒是很令人深思.

5　圈里人的权威和排他

圈里人具有公认的权威——圈里圈外界限不是绝对的——圈的延续可能带来的思维定式和退化——贡献者是圈里人，阻力也是圈里人.

"圈里人"是和"业余者"相对的说法. 笔者第一次听到"圈里人"的说法，也是在前述 2002 年 3 月 20 日央视《时空连线》中.

圈里人的说法很广，比如有娱乐圈，娱乐圈里还有相声圈. 有个"数学圈"是个好事，对于圈里人，它是一种学识素养、专业水平的评价，可以提供学术的交流和协作，圈里人掌握本专业的论文是否成立、可否发表的话语权和生杀予夺大权. 这是对圈里人的学识和权威所赋予的应有权利. 费马大定理解决者怀尔斯的论文，只有 10% 的职业数学家能读懂，可是那读不懂论文的 90% 的职业数学家以及更多的业余数学家和一般老百姓也都承认是对的，这就是对圈里人的权威的公认.

什么是数学界的圈里人呢?可能指数学研究所、知名大学数学系的职业数学家，特别是数学上的专家、权威和泰斗们. 正由于圈里人拥有当今最高的学识水平和威望，所以人们对他们寄予了最大的希望，在所有的重大数学成果中绝大部分是他们的劳动，这也是公认的.

可是，是不是圈里人就包打了天下，圈外的所有人就无所作为了呢?据报道，现今世界专门研究哥德巴赫问题的圈里人仅仅二三十人，那么是不是这些人没解决此问题，全世界的人就都没戏，甚至连像律师肯普那样贡献一砖片瓦的资格都没有?

当初，研究费马大定理的圈里人也就不到百人，而安德鲁·怀尔斯恐怕还不属于这圈里人之列. 因为他此前没发表过这个题目的论文，甚至在出名前的 7 年里，他仅发表一

些关于双曲线的小论文.可是最终解决费马问题者却就是这个当初并不属于圈里人的人.

佩雷尔曼,当初是属于圈里人的,可是他退出了圈,成了一个地道的民间的隐士,就连他的论文也是在网上而不是在一级权威刊物上发表的,可是世界还是承认他解决了庞加莱猜想,并授予他菲尔兹奖(他拒绝领奖).

我们进一步再说,普通的中学物理教师陆家羲,不就是一个典型的圈外人吗?但是他的数学研究获得了国家1987年自然科学一等奖!

再进一步说,据统计,现有数学难题达10万多,难道每一难题都经过了职业数学家的充分研究吗?这里面是不是还有业余者的一定天地?

圈里人和圈外人,以至业余爱好者和专家权威的界限并不是绝对的.华罗庚作为药铺学徒是一个无名的业余数学爱好者,他发表了一篇《苏家驹之5次方程不能成立的理由》,被数学家熊庆来发现并请到清华任教,以后又到英国深造,终于成为世界一流的数学家.倘若当初华老没能发表那篇文章(在今天能得以发表吗?),没得到熊庆来的青睐(圈外人如今能被重视吗?),那么华老就是一个圈外的业余研究者.

相对于圈里人,圈外人自然有许多劣势,这就使他们的成功必定是小概率.但是小概率不等于0.圈外人自有圈外人的优势.他们目标专一,坚定不移.几十年如一日,废寝忘食的学习和思考,足以弥补基础之不足和系统训练之不足,因此"愚者千虑,终有一得"的可能性是存在的.

圈里人讲究门第、学派和宗师.高学位,系统的专业训练,学派的方法和绝活,培养了圈里人的成就和权威.他们代表着正统和主流.但是,同一圈的延续,也往往带来学院式的定势惯性和园艺式的思维,带来近亲繁殖的退化.

一个学派在刚建立的时候大都是虎虎有生气的,但渐渐就有可能变得拘谨和保守.就像发现毕达哥拉斯定理的兄弟会一样,但是他们过分地看待自己的成就,以致把发现无理数的新人投入河里淹死.

用一个新的方法解决某问题非常有效,可是久久沿用就可能潜力殆尽.当初维诺格拉多夫用三角和法证明了任一奇数可以分解为3个素数之和,震动了全世界,沿至华罗庚,至陈景润,继续求解任一偶数可以分解为2个素数之和的问题,这时这方法在这个问题上的效力就已达到极至,不用新的方法已势必不可能.这个时候,就需要注人新的思维.

当年17岁、两次没考上大学的伽罗华递交了2篇关于5次方程根式解的论文,在柯西、泊松、傅里叶3位院士手下都未获通过,泊松甚至认为"简直莫名其妙,不可理解".这里,既有对初学者的居高临下,也有对新思维的保守排斥.

历史已经多次证明,对数学的发展作出巨大贡献的是圈里人,对数学的发展造成阻力的也是圈里人.

圈里人和圈外人之间,本来应该是互相促进,相辅相成的.圈外人需要圈里人的扶持、指导和认定,圈里人需要圈外人的野性思维和虎虎生气.这是一个多元的、共生的、和谐的世界.

6　数学界为什么集体失语

崭新的科学思想在当时不被理解几乎是规律——高斯的智力酸葡萄——科学杂志发表文章应该是"无罪推定".

蒋春暄的事情已经多年了,黎鸣的事情时间也不短,尽管他们强烈要求数学专家们对他们的文章发表具体的学术性意见,但至今中国的数学界实际上一片沉默.据报道,1998年,中国科学院院长方毅同志曾主持召开对蒋春暄论文的研讨会,但是,这不能算是对蒋春暄论文的学术鉴定.因为学术论文的规范审查是要有学术结论的文字意见和专家亲笔签名的.况且时过8年多,研究工作可能有新的变化.安德鲁·怀尔斯1993年6月在剑桥做了具有历史意义的报告,但后来却发现是有错误的,这并不妨碍他1994年10月最终解决这问题.

为什么中国数学界集体缄默?

原因之一,数学家们有自己的研究课题.他们要发表意见,就要先认真地研究审阅业余者的论文,这需要花费相当的时间,他们舍不得拿出这些时间,甚至认为为一个极大可能并不成立的论文花费过多的时间没有必要.当年,有人问希尔伯特为什么不研究哥德巴赫猜想,希尔伯特回答说:"为了研究这个问题,我必须先拿出3年的时间做准备.这个时间对他来说是太长了."这就是说,要审查顶尖水平的论文大致也需要相当的准备时间.

原因之二,数学家也是分领域的.这就像体育运动员一样,都是世界冠军,游泳、短跑和铅球,大不相同.数学的领域也是一样.一个领域的尖端课题,另一个领域的即使是专家也不好发表意见.

原因之三,对于和现有理论体系完全不同的创造性新思想,即使是顶尖权威看不懂,在历史上也是常有的事情.泊松看不懂伽罗华的群论,因为它不像他那个时代的其他数学思想一样,只是描述一个单个的量的变化,而是描写一群量的总体性质.康托尔提出超穷数的概念时,他的老师以及几乎所有数学家都认为荒诞不经,怎么一个集合的一部分竟和这个集合本身一样多!巨大的压力使康托尔住进了精神病院.

一个崭新的革命性的科学思想在当时的时代一定时间不被理解,这几乎是个规律.

原因之四,因为顾虑看不懂或不一定完全看得懂,许多时候就压根不肯看、不看,用藏拙来避免尴尬.进一步的,可以避免历史笑话.因为眼下你说是错的,倘若以后历史证明是对的,那将是多么不光彩的事.所以缄默是最明智的.数学家之王高斯对业余数学家之王费马的问题就不屑一顾,他从不碰费马大定理,他说:"我几乎没有什么兴趣,因为我可以很容易地写下许多这样的命题,人们既不能证明它们又不能否定它们."你看他装得冠冕堂皇,很可能他过去尝试过但失败了,所以人们认为他这是"智力上的酸葡萄".数学王子高斯尚且如此,何况他人哉!

原因之五,嫉妒,笔者不愿提起这个词但又不能不提起.有的人的心理就是:倘若这

个证明被推翻了，那么一切就都好说了；但是倘若证明成立了呢，挑战人类几百年的大数学难题，要是被希尔伯特，被歌德尔，被图灵解决了，那我们心安理得；可是被默默无闻的业余爱好者解决了，我们圈里人多么没面子．你错了，你丢脸；你对了，我才不给你挣口袋．

可能由于以上种种原因，就出现了业余研究者的确有价值的论文既无人肯定也无人否定的尴尬局面．

蒋春暄先生的论文写出以后，国内的数学杂志不给发表，数学家们还以此为由说：你未发表当然就不能审查．国内得不到发表拿到国外，在美国和德国的数学杂志上得以发表．（试想，如果将来证明蒋先生的论文是对的，那时中国数学界将如何面对？）在国外发表了，数学家们又说发表的杂志不够级别同样不予审查，那么佩雷尔曼的文章发表在网上，不更不够级别吗？怎么人家就可以审查还可以颁奖？蒋先生应邀到某大会上做学术发言，有人去阻临时取消；有的报纸要发专门文章，有人去阻撤下；有的大学要搞蒋先生的论题研究，又变卦取消．由此可见，在桌面上的数学讨论尚未见到，暗地里的活动却来往频频．

我们不明白，就假定这暗地里的活动所讲的是有道理的，那么为什么不把这个道理摆到桌面上，就像当年华罗庚写出《苏家驹之5次方程解法不能成立的理由》一样，写一篇《蒋春暄之费马大定理证明不能成立的理由》，发表在《数学学报》上，那么蒋氏不就哑口无言了吗？何必东奔西走四处游说．现在蒋氏的论文早已发表，尚无人批驳，正有否定或质疑的首发权．

我们不明白，假如同样的一篇文章，不是出于默默无闻蒋先生之手，而是出于鼎鼎大名的数学大师陈省身、丘成桐之手，还会这样无人理睬吗？恐怕早就组织审阅了，唯恐晚一天误了首创权．可是假设的同样文章出自无名者手里，难道其数学内容和价值就变了吗？

我们还不明白，中国科学院组织审查一篇文章就这么困难吗？又不是大规模的重复试验，需要设备和资金，这仅仅是一篇推理文章！在不长的时间就可能审查完毕，何苦闹得三十年来国内国外沸沸扬扬．

我们更不明白，蒋氏的文章怎么在国内就不能发表，非要发到国外去．国内发出了又怎么样？无非是将来有一天证明它是错的，错的又怎么了？只要在发表当时尚未发现错误，这就是正常的程序．历史上关于著名的数学问题的证明发表后若干年发现错误的事情还少吗？就拿欧拉方阵问题来说，1901年彼得尔森的拓扑证明5年后被指出错误；1910年维尔尼克的代数证明12年后被指出错误；麦克尼许的拓扑证明20年后被指出错误．可见害怕某论文以后会被证错而不敢发，并不是科学的态度（只要发表当时未发现错误）．

由此我想指出现在一些科学专业杂志的一个值得商榷的理念，就是他们确认"必须是对的"才能发表．"必须是对的"应是科学理论确认的标准，而不应是科学杂志文章发表的标准．科学杂志发表文章的标准应是"未发现错误"．因为很多时候，有的理论，一时还不能确认是对的还是错的，尤其那些原创的革命性的理论，例如伽罗华的群论和康托尔的超穷集．依照"必须是对的"之观点，这些学说就会被拒之门外．"未发现错误"，将来

可能是错的，但也可能是对的．科学杂志应当允许探索与争鸣，这是科学上坚持百花齐放的表现．"没证明是对的就不予发表"，实际上就是"没证明对的就是错的"，这相当于法律上的"有罪推定"；"没发现错的"，就可能是对的，这才是"无罪推定"．因为科学杂志上是可以探讨的，所以应该取"无罪推定"来衡量稿件．这样说来，对于一时判断不明是对是错的文章就可以放它一马．

7　十叹陆家羲

论文石沉大海——痛失首创权——门德尔松的一句话——走时的富有和贫穷．

陆家羲，当代中国业余数学研究者的形象代表！

陆家羲（1935—1983），上海人，毕业于吉林师范大学物理系，包头9中物理教师．他在校学习期间就研究并解决了世界著名的一百三十余年的数学难题科克曼女生问题（1961），毕业后继续研究，进一步推广，得到了不相交斯坦纳三连系大集定理．然而，正当他业余研究巅峰之际，却猝然早逝．他的研究成果，他的钻研精神，他的遭遇，令人浩叹．

目标如一．陆家羲在校期间，就确立了自己的业余研究目标．他30年如一日，矢志不移．如果说，数学难题是山巅，他就在崎岖小路的攀登上不畏劳苦；如果说，那是地狱，他来到地狱门口不惧生死．有的职业科学家今天经济，明天中医，后天喜马拉雅山．可他不，定下钻位就钻探下去，夜以继日，废寝忘食，不达目的，决不罢休．八千尺，一万尺，一万二千尺！终于打出油来！这就是陆家羲，一叹！

业余奋进．陆家羲在繁重的中学教学之余，回到家来，在沉重的家庭负担之中搞数学，谈何容易！八小时之外，有人打麻将，有人神聊；打麻将、神聊无人说什么；可搞数学却有人说不自量力，不务正业，尤其搞世界数学名题更是不知天高地厚．如果一个业余文学创作者业余写书，并不见得有作家出来著文劝阻说，别把精力用到不可能的事情上．而数学就真的那么高人一头吗？为什么有人一再阻止？陆家羲捅破了这个神秘的屏障！他证明：这个领域业余者是可以进入的，是可以有作为的，数学不是垄断业！二叹！

隔行攻坚．陆家羲是学物理的，对数学是业余，可是在他眼里，隔行不隔理．遇到理论缺失，就补，他攻克群论，拿下组合论，经年累月，手胼足胝，终于在这一课题的专业知识、系统训练和研究深度上，不仅超过了硕士、博士，也超过了职业数学家和院士，因为他达到了当时世界的顶尖！在这个事实面前，还有谁能说：业余者没有专业知识"，"不可能有高见"？三叹！

孤身冲阵．时下的科学研究讲究团队协同、大兵团作战．不是常见这样的情况吗？课题刚一上马，研究还未进行，就先请求课题基金，拨专款；搭班子，购设备；派人出国取经，请人前来讲学；研究进展尚无一步，种种排场已经轰轰烈烈．可是业余者如陆家羲，不要国家一分钱，单枪匹马，孤灯孑影，宵衣旰食，呕心沥血．一个拼死血战的战士，抵得上一排养尊处优的绅士！四叹．

发稿无门．正因为陆家羲是个草根，所以他的论文即使写出来，即使是正确的，也无

人问津.无论走到哪里,到处是一片怀疑的目光:你?一个中学教师,要解决世界百年数学难题?无论走到哪里,到处是客气而冷漠的推脱之辞,无人喝彩,甚至无人理睬.中国科学院数学研究所,《数学学报》,《中国数学通报》,一片沉默.无人肯定,也无人否定,这是对待业余者的可以不承担后果和责任的最明智策略.陆家羲1961年以来多次修改、多次投稿的论文,27年得不到发表,至今也没在数学专业杂志上刊登.他的科克曼系列和斯坦纳系列的论文先后寄到北京,都石沉大海!几十年的心血啊,面临湮没!对于业余者来说,还有什么更大的痛苦!五叹!

墙外花香.国内得不到发表,不得已拿到国外去.当时国际上有专家称斯坦纳系列的研究难以突破,"离问题解决还很遥远",可是陆家羲宣告:他解决了.设在美国加利福尼亚大学的国际性杂志《组合论杂志》收到他的论文的当年及隔一年,分两次予以集中发表,计100页,达10万字,给予了很高评价.时隔不久,中国在大连召开首届组合数学讨论会,请加拿大多伦多大学的门德尔松教授和滑铁卢大学的郝迪教授前来讲学.门德尔松惊讶地问:"请我讲学?讲组合数学?你们中国不是有陆家羲博士吗?"陆家羲?谁是陆家羲?大会组织者茫然不知.还有什么比这更羞辱!还有什么比这更悲哀!陆家羲啊!六叹!

身无长物.陆家羲作为中学教师,不是权贵,不是名家,他只是个草根.他不要金钱,不要享受,只想解题.他不求名声,不求地位,只想攻关.当门德尔松邀请他去多伦多大学的时候,他婉拒了,因为他想着祖国.当门德尔松的一句话把他推进中国组合数学大会的时候,他拮据得没有路费,现向学校基金会借钱.当他会后回家不久,终于崩断生命琴弦的时候,留给妻女的只有400元债务,没着落报销的单据和5箱书.还有什么?除了没完成的斯坦纳系列论文,什么都没有了.带着学识的富有和债务的贫穷而去,这就是你,陆家羲!七叹!

痛失首创.陆家羲早在1961年就完全解决了科克曼系列问题,可是得不到发表,稿件现在已经找不到了.那么就拿已经找到的完整论文来说吧,也是在1965年(后经严格审查,论文完全成立),仍是未得以发表的.可是世界公认第一个解决科克曼系列问题的威尔逊和乔得赫里的论文,却是1971年发表的.看,整整比陆家羲晚了6年,一个重大的科学成果的首创权就这样失去了!是我们中国人不聪明吗?不是!那么是什么?八叹!

后人难及.陆家羲在猝然去世的时候,他所证明的不相交斯坦纳三连系大集定理还遗留6个数值(141,283,501,789,1 501,2 365)的大集没有解决,但是陆家羲自己在大连的全国首届组合数学学术会上宣布,他已经解决了这个问题,即将成文.可是他从大会上回来不久,就猝然辞世.那以后,全世界都要攻克这6个数,可是纵然有陆家羲的手稿及24页的提纲做参照,纵然有最先进的电子计算机作为辅助工具,甚至纵然有团队的协同合作,但是在多少年内,竟还是未攻下其中哪怕最小的一个数!要知道陆家羲全凭一个人的徒手计算啊,他有着怎样的大脑和毅力啊!九叹!(这个数现已被荷兰数学家用另外的方法解决)

仍为异类.陆家羲为着他热爱的事业,鞠躬尽瘁,死而后已.正如人们所说:他正当巅峰之刻,累死了!他虽然受尽了苦难和磨难,但他终于攀登到了顶峰,他让全世界看到并承认了他的成果,他赢得了国外数学家的尊敬和高度评价,他获得了1987年中国科学技

术创造性成果最高奖:国家自然科学一等奖!但是,且慢,至今在一些人的眼里,他还不是数学家,只是个业余研究者,是个爱好者,他"缺乏专业知识和系统训练",他对"数学不可能有高见",他仍然是"已经结束的拉马努金时代"的不可能有作为者!就是说,无论你取得什么成果、什么成就,你仍然在另册!十叹!

末了,赋《叹陆家羲》诗一首:

生前何其寞寞,死后方得哀荣.终究还是异类,让人扼腕长恸!

但愿陆家羲生前所受的磨难不再发生.

但愿中国民间数学家能够受到扶持和重视,和职业数学家一道为中国科学共同出力.

编后语 一个现代社会同一个传统社会的一大区别就是,掌握话语权和社会资源的制订社会游戏规则的体制内人士能够说出这样一句理性的话,那就是:"我强烈反对你的观点,但我誓死捍卫你说话的权力."

一个现代多元社会,很少有如数学公理般绝对正确的,不证自明的观点和理论,一切皆有可能,所以让每个人发出自己的声音很重要,但这样做的代价是信息泛滥,主义林立,"熵"值增大,但这是必须的,"民科"似弹簧,越压它越强,不如让他们也拥有自己的一片小天地,自说自话,自娱自乐,"自生自灭",这也是体制内人士应有的胸怀和眼界.

函数的定义

彭海祥

新中国成立前开明青年丛书中的《数学的园地》一书对引起中学生的"数学趣味"来说曾经起过一些作用，今天没有时间也没有必要对这本书作全面的评价，我只拿里面逗人发笑的戏文做成的关于函数的定义的例子，给予适当的批评作为本文的引子.

该书的作者举例说："我可以告诉你，现在的社会中，女子就是男子的函数"，他接着解释说，"女子的地位是随着男子的地位变的.有一个穷书生讨了一个有钱人家的女儿做老婆，因此，平日就以怕老婆出了名，后来他的运道亨通了，进京朝考，居然一榜及第；他身上披起了蓝衣，许多人侍候着，回到家里，一心以为这样可以向他的老婆复仇了，哪知老婆见了他仍然是神气活现的样子，他觉得这未免有些奇怪，便问：'从前我穷，你向着我搭架子，现在我做了官，为什么你还要搭架子呢?' 她的回答很妙：'愧煞你是个读书人，还做了官，'水涨船高'，你都不晓得吗?'" 作者进一步解释说："船的地位就是水的涨落的函数，说女子是男子的函数，也就是同样的理由，在家从父，出嫁从夫，夫死从子，这已经有点像函数的样子了，但还嫌粗些，我们无妨再精细一点说.女子一生下地来，父亲是知识阶级或官僚政客，她就是千金小姐；若父亲是挑粪担水的她就是丫头.这个地位一直到了她嫁人以后才得到改变，这时改变也很大，嫁的是大官僚，她便是夫人；嫁的是小官僚，她便是太太；嫁的是教书匠，她便是师母；嫁的是生意人，她便是老板娘；嫁的是 x，她便是 y；y 总是随着 x 变的，自己全不做主；这种情形，和'水涨船高'真是一样，所以我说：'女子是男子的函数，y 是 x 的函数.'"

我们无意拿婚姻法来检查这里面的错误的观点，我们只要从现代数学的本身来看，便发觉这其间是有问题存在的."女子的地位是随了男子的地位变的" 这不是函数的依赖性的定义吗?函数不常表示实际的依赖性，这是我们大家都知道的，比方函数 $f(x)=|i|$ 并不随 x 而变，若拿依赖性去说明它，学生会拒绝接受的，现代数学采用对应概念去定义函数，那便是：

给定了两个集合 X 和 Y，对于集合 X 的每一个元素 x 可依某一规律使对应集合 Y 的某一元素 y，假如这个对应关系建立了，我们就说在集合 X 上确定了一个函数，记作 $y=f(x)$.

由这个定义可见确定一个函数有三种要素：(1) 变数值的集合(即定义域)X；(2) 函数值的集合(即值域)Y；(3) 对应关系，由它可使每一个变数值对应一个完全确定的函数值.

变数值 x 又叫做原像，对应的函数值 $f(x)$ 又叫做像，函数关系叫做写像.

例如平面上每一点 x 可使对应一点 y，y 代表 x 在某一直线上的正射影，函数的定义域是平面上所有点的集合，变数值——原像——是平面上的点，函数值的集合即值域充满整个射影轴，函数把平面上所有的点写像于射影轴上所有的点.

编后语　这是解放初期的数学杂志上刊登的一篇小文. 这里重新挖掘出来的意义在于说明即使数学这样纯而又纯的学科也不能脱离社会大背景而孤立存在. 一个时期的数学带有那个时代的深刻印迹.

在近代中国，时代先驱者们逐渐认识到，国家要富强，民族要独立，必须提高国民素质，而国民素质的提高靠教育，这种思想的形成经历了从"兵战—商战—学战"到"教育救国"的过程.

1890 年的鸦片战争，使一向以"天朝大国"自居的中国人猛醒. 人们痛定思痛，思索着战胜西方列强的良策. 魏源提出了"师夷长技以制夷"的策略，以为师夷的重点在于"一战舰，二火器，三养兵练兵之法". 据有关学者统计，1821 ~ 1861 年至少有 66 位知名人士赞成中国必须采用西方的军舰和枪炮，1840 ~ 1861 年，中国至少出版了 22 部关于西方武器的新著作.

但其后郑观应等人认识到：习兵战不如习商战. 他在《盛世危言》一书中说："故兵之并吞，祸人易觉；商之掊克，敝国无形." 及至康有为和梁启超则开始察觉到教育是问题的关键. 康有为认为："中国之弱由于学之不讲，教之未修，故政法不举." 梁启超则指出："世界之运，由乱而进于平，胜败之原，由力而趋于智，故善自强于今日，以开启民智为第一义.""亡而存之，废而举之，愚而智之，弱而强之，条理万端，皆归本于学校."

到了孙中山时代，认识又有新变化，认识到科学之重要性. 他说："夫科学者，统系之学也，条理之学也. 凡真知特识必从科学而来也，舍科学而外之所谓知识者，多非真知识也."（孙中山全集. 第 6 卷，第 200 页）

而科学之首即为数学，如法国数学家 R·托姆所说："目前，在一门科学中引进数学方法，已被认为是重要一步，因为这意味着走向严密，走向概念上和数值上的精确，从而为人们采取行动提供更为广阔的天地.（R·托姆. 突变论：思想和应用. 第 136 页）

由拣石子得到的定理

闵嗣鹤

1

有一种由两个人玩的游戏是这样：任意在地面上放两堆石子，由两个人轮流着拣起石子来，每次拣的时候要遵守下面的规则：

（甲）如果只动一堆石子，就可以从那堆里拣出任意多个石子来.

（乙）如果要动两堆石子，虽然从每一堆里所拣出石子的数目也没有限制，但从两堆里所拣出石子的数目必须相同.

遵守上面两条规则，两人轮流着拣石子. 首先把地面上石子拣光的人算赢.

这是很简单而有趣的一种游戏. 像许多游戏一样，表面上，谁胜谁负好像全靠运气；事实上，它是有着一定的玩法或秘诀的，遵守那个秘诀去玩，在适当情形下就可以保证赢得最后的胜利.

让我们大家来想一下，到底那个秘诀是什么？我们会看到在这个游戏里面隐藏着许多数学的定理.

为简便起见，我们可以用(m,n)来代表一堆石子数目是m，另一堆石子数目是n的情况.

如果地面上两堆石子的数目相同，显然先拣的人一定赢，因为他按照（乙），可以一下把石子拣完. 换言之，两堆石子数是(n,n)时，先取的必胜.

其次，让我们讨论有一堆只含一个石子的情形，即$(1,n)$. 当另一堆石子数n或1的时候，不用说，先拣的人必胜. 如果两堆石子数是$(1,2)$，这时如果某甲（先拣的）把任何一堆石子取尽，某乙就可以把另一堆取尽. 如果甲从第二堆里取一个，乙就可以把两堆同时拿完. 最后，如果甲从两堆各拿一个石子，还要剩下一个乙去拿. 这样看来，先拣的人反而要输了. 为清楚起见，我们可以把上述四种玩法制成四个表：

	甲	乙	
1	0	0	
2	2	0	

	甲	乙
1	1	0
2	0	0

	甲	乙
1	1	0
2	1	0

	甲	乙
1	0	0
2	1	0

以上各表中，第一直行记原来两堆石子数，最上一横行注明取石子的人，在甲（或乙）字

下一直行记由甲(或乙)取过石子后所剩下的两堆石子数,甲(或乙)每次所取石子的数目没有列在表上,但是很容易从所剩石子数推算出来.

如果第一堆有1个石子,第二堆有3个以上石子,这时先拣的人一定能赢.这因为他可以从第二堆里拣出几个石子,使它只剩两个.这时两堆石子数变成(1,2),由前面的讨论知道已经把其他一人陷人必输的情况.由此我们发现了一件事实,就是在第一堆石子数是1的情形之下,只有当第二堆石子数是2时先拣的人才有必输的可能.因此,(1,2)这一对数目是有其特别意义的.我们可以管这一对数目叫做先输小组,表明谁先碰到了它,谁就要输.(当然(2,1)和(1,2)是一样的)同样,我们可以管先拣者必胜的情形叫做先胜小组,表明谁先碰到了它,谁就可以必胜.例如(n,n)是先胜小组,而当$n\neq 2$时,$(1,n)$也是先胜小组.

讲到这里,我们可以发现一个原则,如果要争取胜利,应该把石子数变成先输小组,这样就陷对方于必败之地.

如果第一堆石子数是2,另一堆石子数大于1,先拣的人可以把第二堆石子数变成1,故$(2,n)$,$n>1$,是先胜小组.当然(2,0)也是先胜小组.因此,在$(2,n)$这种情形之中只有一个先输小组,那就是(2,1).

进一步,让我们来讨论$(3,n)$的情形.显然,当$n\leqslant 3$时,$(3,n)$是先胜小组.(3,4)也是先胜小组,因为从每堆取两个石子之后,就变成了先输小组(1,2).但(3,5)却是先输小组,这可以从以下各表看出来:

(1)甲先动第一堆的情形:

	甲	乙
3	0	0
5	5	0

	甲	乙
3	1	1
5	5	2

	甲	乙
3	2	2
5	5	1

(2)甲先动第二堆的情形:

	甲	乙
3	3	0
5	0	0

	甲	乙
3	3	2
5	1	1

	甲	乙
3	3	1
5	2	2

	甲	乙
3	3	0
5	3	0

	甲	乙
3	3	1
5	4	2

(3)甲先同时动两堆的情形:

	甲	乙
3	2	2
5	4	1

	甲	乙
3	1	1
5	3	2

	甲	乙
3	0	0
5	2	0

当$n>5$时,$(3,n)$是先胜小组,因为先取的人可以把它变成先输小组(3,5).由此可

知,在$(3,n)$情形中只有一个先输小组(3,5).其余都是先胜小组.

仿照以上的方法去进行,我们可以逐步推出以下的先输小组

$$(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15),(11,18),\cdots$$

到这里,我们当然要发出以下几个问题:

(1) 怎样求出一切的先输小组呢?

(2) 除先输小组之外,是否都是先胜小组呢?

(3) 碰到了先胜小组时,怎样才能保证最后的胜利呢?

要解决第一个问题,先要知道下面两排数是怎样形成的:

1	3	4	6	8	9	11⋯
2	5	7	10	13	15	18⋯

第一我们要看出在以上两排数之中,每一个在下面的数都比在它以上的数大,而且他们之间的差数恰好组成自然数串

$$1,2,3,4,5,6,7,\cdots$$

看出这件事实之后,我们只要猜出第一排的数是怎样形成的就够了.不管单凭观察以上两排数也好,还是利用以前求先输小组的经验也好,读者都可以试着猜测一下:第一排数是怎样形成的?

结果你会发现,第n个先输小组里面的较小一个数(也就是上面所说第一排数中之第n个)恰好是以前各先输小组里面所未曾出现的正整数中之最小者.例如(6,10)中之6在(1,2),(3,5),(4,7)内都没有出现.把(1,2),(3,5),(4,7)内的数按大小排列就得

$$1,2,3,4,5,7$$

这里面所缺的正整数中最小的一个恰好是6.又如把前五个先输小组(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13)中的数按大小排列,就得

$$1,2,3,4,5,6,7,8,10,13$$

所缺数目中最小的是9,这正是第6个先输小组中较小的一个数,其余一个是$9+6=15$.按照上述规则,第8对先输小组应该是(12,20).

上面所说不过是一个猜想,我们还要证明那个猜想的正确性,这要在下节里面讨论了.

2

在这节里我们先讨论下面两个数串

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & \cdots & a_n & \cdots \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 & 18 & \cdots & b_n & \cdots \end{matrix} \qquad ①$$

其中,a_n是前$n-1$个小组$(1,2),(3,5),\cdots,(a_{n-1},b_{n-1})$中所未出现的正整数中之最小

者，而 $b_n = a_n + n$. 我们要证明下面几个事实：

定理1 在①内只有正整数，而且每一个正整数必在①内出现一次且只出现一次.

证明 (1) 由定义显见①内只有正整数，假如有的正整数不在①内出现，这种不出现的正整数中一定有一个最小的，设为 N. 依假定 $1,2,\cdots,N-1$ 一定都在①内出现，所以当 n 相当大时，$1,2,\cdots,N-1$ 这些数一定在前 $n-1$ 个小组 $(1,2),(3,5)\cdots,(a_{n-1},b_{n-1})$ 内全体出现. 因此 N 是前 $n-1$ 个小组中所未出现的正整数中之最小者，依定义 $a_n = N$. 这和假设相矛盾，所以每一个正整数必在①内出现一次.

(2) 因 a_n 是前 $n-1$ 个小组内未出现的正整数中之最小者而 $a_n - 1$ 则是前 $n-2$ 个小组内未出现的正整数中之最小者，故 $a_{n-1} < a_n$. 又因 $b_{n-1} = a_{n-1} + n - 1, b_n = a_n + n$，故 $b_{n-1} < b_n$. 依定义 a_n 是前 $n-1$ 个小组中所未出现的数. 又因 $b_n > a_n$ 及 $b_n > b_{n-1}$，故 b_n 大于前 $n-1$ 个小组中任何一数，故 b_n 也是前 $n-1$ 小组中所未出现的数. 由此可知一切小组中的数没有相同的.

定理2 如果把任一小组 (a_n,b_n) 中的一个数换成一个较小的正整数或者从两数中同时减去一个(小于 a_n 的)正整数，所得到的小组一定不在①内(而且也不是(0,0)).

证明 假设所得到的小组是 (a'_n,b'_n). 在前定理的证明中已经证明

$$1 < 3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

$$2 < 5 < \cdots < b_n < b_{n+1} < \cdots$$

故若 $a'_n = a_n, b'_n < b_n$ (或 $a'_n < a_n, b'_n = b_n$)，则 (a'_n,b'_n) 不能在①内出现. 又若 $a'_n = a_n - d, b'_n = b_n - d$，则 $b'_n - a'_n = b_n - a_n = n$. 因 $b_k - a_k = k$，故 (a'_n,b'_n) 也不能在①内出现.(显然 (a'_n,b'_n) 不能是(0,0))

定理3 若 (a,b) 不在①内则常可用下述方法之一化成①内的小组，或者化成(0,0).

(1) 从 a 内减去一个正整数；

(2) 从 b 内减去一个正整数；

(3) 从 a 和 b 内减去相同的正整数.

证明 设 $a \leqslant b$. 由定理1，a 必在①内出现. 若 $a = b_n$，则可自 b 减去 $b = a_n$，得 (b_n,a_n) 或 (a_n,b_n) 这个小组. 若 $a = a_n$ 而 $b > b_n$，则可自 b 内减去 $b = b_n$，得 (a_n,b_n) 这个小组. 最后，若 $a = a_n$ 而 $b < b_n$，设 $b - a = k < n$，则可自 a 及 b 内同时减去 $a_n - a_k$，得 (a_k,b_k) 这个小组.(当 $k = 0$ 时，(a_0,b_0) 即为(0,0))

现在可以解答1最后所提出的问题了.

定理4 一切在①内的小组

$$(1,2),(3,5),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$$

都是只输小组，任何其他小组 (a,b) 都是先胜小组.

证明 由定理3，我们可以把 (a,b) 变成①内一个小组. 如果能证明①内只含先输小组，就可以推出 (a,b) 一定是先胜小组. 因此我们可以用算学归纳法，只证明定理的前半就够了.

我已证(1,2)是先输小组.假定①内前 $n-1$ 小组(1,2),(3,5),…,(a_{n-1},b_{n-1}) 都是先输小组.今将证 (a_n,b_n) 也是先输小组.若某甲遵守游戏规则,把 (a_n,b_n) 变成 (a',b'),则由定理2,(a',b') 不在①内.由定理3,某乙可以把 (a',b') 变成①内一个小组 (a_k,b_k) 或(0,0).根据游戏规则知道 $a_k \leqslant a' \leqslant a_n, b_k \leqslant b' \leqslant b_n$.又由定理2的证明中看到

$$1 < 3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

$$2 < 5 < \cdots < b_n < b_{n+1} < \cdots$$

故 $k < n$.依假定 (a_k,b_k) 是先输小组,所以 (a_n,b_n) 也是先输小组.故①内所含小组

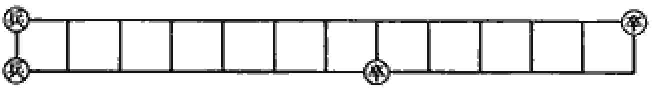
$$(1,2),(3,5),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$$

都是先输小组.

现在可以回答1最后所提出的第三个问题了.当我们碰到先胜小组时,应该运用定理3证明中所说的方法,把先胜小组变成先输小组.对方第二次取过石子之后,必留下一个先胜小组.我们可以再把它变成先输小组,这样,最后胜利就属于我们了.

当我们碰到先输小组时,按理说我们是应该输的.但若对方不懂得上述方法,在我们随便取去少数石子之后,对方一定很难把两堆石子变成先输小组,只要他有一步失手,胜利就还是我们的了.

玩这种游戏的时候,也可以不用石子而用平常的象棋棋盘.如图,一方有两卒,一方有两兵,走时可按下面的规则:



(甲)只动一子时可以随便进多少步,但不得超过对方的棋子.

(乙)同时动两子时,必须进同数步,也不得超过对方的棋子.

用上述方法把对方逼得不能前进者为胜利.上图事实上相当于(6,11)这个先输小组.

又若在拣石子时,规定拣最后一个石子的算输而不算赢,我们容易看出,在这种情形下,先输小组应该是

$$(0,1),(2,2),(3,5);(4,7),(6,10),(8,13),\cdots$$

换句话说,改变了规定之后,就要把以前的第一个先输小组(1,2)换成(0,1),(2,2)两个小组,自(3,5)以下各先输小组都不必改变.在新规定下的玩法和先前的法,在原则上没有什么差别,所以不再细说了.

3

在上节里面虽然讲过怎样逐项写出①内各先输小组的方法,但遗憾的是,并没有替 a_n 和 b_n 找出一个表示他们的公式来.在这节里面,我们要讨论表示 a_n 和 b_n 的极有趣的公

式.

我们常用$[x]$表x的整数部分,例如$[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3$.有了这个记法,我们就可以写出下面的定理:

定理5 在①内的(a_n,b_n)可以用下式表之,即

$$a_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right],b_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right],n=1,2,\cdots \quad ①$$

让我们先来验算一下:我们很容易算出$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+2.33\cdots}{2}=1.61\cdots$,当$n=1,2,3,\cdots$时可以算出

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]=1,3,4,\cdots$$

$$\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]+n=2,5,7,\cdots$$

在未证上述定理之前,最好先证下列较富普遍性的定理.在这里还要引用一个特殊的记号$[x]^-$.它的定义是这样:当x非整数时,$[x]^-$表示x的整数部分,而当x为整数时$[x]^-$表示$x-1$.换句话说,$[x]^-=[x]$或$[x]-1$视x非整数或整数而定.例如$[\pi]=[\pi]=3$而$[2]^-=[2]-1=1$.

定理6 若$\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1$,则每一正整数在下列两串数

$$[\alpha_m],m=1,2,3,\cdots$$
$$[\beta_n]^-,n=1,2,3,\cdots \quad ②$$

中恰好出现一次的必要而且充分的条件是

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \quad ③$$

例如$\alpha=\beta=2$,则当$n=1,2,3,\cdots$时

$$[\alpha_n]=2,4,6,8,10,\cdots$$
$$[\beta_n]^-=1,3,5,7,9,\cdots$$

证明 (1)若N为正整数,则适合不等式

$$0<\alpha_m<N+1,0<\beta_n\leqslant N+1 \quad ④$$

的正整数m与n数目之和为

$$\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]^-+\left[\frac{N+1}{\beta}\right] \quad ⑤$$

上式在下列两数之间

$$\frac{N+1}{\alpha}+\frac{N+1}{\beta}-2,\frac{N+1}{\alpha}+\frac{N+1}{\beta}$$

求$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\theta$,则上两数为

$$(N+1)\theta-2,(N+1)\theta$$

若$\theta<1$,则当N甚大时,$(N+1)\theta<N$,即⑤式之值小于N.这表明在②内其值

数海钓沉

不超过 N 的项不到 N 个.由此可知前 N 个正整数之中一定有不在②内出现的.

若 $\theta > 1$,则当 N 甚大时,$(N+1)\theta - 2 = N + (\theta - 1)N + \theta = 2 > N$,即⑤式之值大于 N.故在②内其值不超过 N 的项比 N 个多,由此可知,在前 N 整数中至少有一个在②内出现不只一次.

以上证明了 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ 是必要条件.

(2) 设 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,则⑤可写作

$$\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]^{-} + \left[N + 1 - \frac{N+1}{\alpha}\right] = \left[\frac{N+1}{\alpha}\right]^{-} + \left[N - \left[\frac{N+1}{\alpha}\right]\right]^{-} =$$

$$\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]^{-} + N - \left[\frac{N+1}{\alpha}\right]^{-} = N$$

故在②内其值不超过 N 的项数为 N.同时其值不超过 $N-1$ 的项数为 $N-1$.其值为 N 的项数是1.这证明了条件的充分性.

定理5的证明 在③内令 $\beta = \alpha + 1$,则得

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

由定理6,每一正整数恰好在以下两串数

$$a'_m = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{3}m\right], b'_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right], m, n = 1, 2, \cdots \qquad ⑥$$

内出现一次,故以上各数互不相等,显然

$$a'_m < a'_{m+1}, b'_n < b'_{n+1} \qquad ⑦$$

而

$$b'_n = a'_n + n > a'_n \qquad ⑧$$

在前 $n-1$ 小组 $(a'_1, b'_1), \cdots, (a'_{n-1}, b'_{n-1})$ 内未出现的正整数中,如果最小的是 s.则 a'_n 必定等于 s.这因为:否则 a'_n 必大于 s,而由⑦及⑧,s 就不能在⑥内出现了.前面已算出 $a'_1 = 1, b'_1 = 2$,由2开头所述(1)的定义得 $a'_n = 1, b'_n = b_n$,这正是所需要的结果.

4

在本节里我们要讨论定理6的一部分的推广.

定理7 设

(1) $\alpha(1) \geqslant 0, \beta(1) > 0$;

(2) 在 $x \geqslant 1$ 时 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 x 的严格递增函数,换句话说,$x'' > x' \geqslant 1$ 时,常得 $\alpha(x'') > \alpha(x'), \beta(x'') > \beta(x')$;

(3) 若 $\alpha^{-1}(x)$ 及 $\beta^{-1}(x)$ 分别为 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 的逆函数(或称反函数),则

$$\alpha^{-1}(x) + \beta^{-1}(x) \equiv kx, k \text{ 为正整数}$$

在以上三条件下,每一正整数一定在以下两串数

$$[\alpha(n)],\quad n=1,2,\cdots$$
$$[\beta(n)]^-,\quad n=1,2,\cdots \qquad ①$$

内恰好出现 k 次，而 0 则恰好出现 $k-1$ 次.

证明 适合

$$\alpha(n)<N+1\quad ,N\text{ 为整数}$$

或

$$\beta(n)\leqslant N+1$$

的正常数 n 就是适合

$$n<\alpha^{-1}(N+1)$$

或

$$n\leqslant\beta^{-1}(N+1)$$

的正整数.这种正整数显然共有

$$[\alpha^{-1}(N+1)]^-+[\beta^{-1}(N+1)]$$

由(3)，上式又可写成

$$[\alpha^{-1}(N+1)]^-+[k(N+1)-\alpha^{-1}(N+1)]=$$
$$[\alpha^{-1}(N+1)]^-+[k(N+1)-[\alpha^{-1}(N+1)]^-]=$$
$$k(N+1)-1$$

这就是在 ① 内其值不超过 N 的项数.若 $N>0$，则在 ① 内其值不超过 $N-1$ 的项数应该是 $kN-1$.故在 ① 内其值为 N 的项数是

$$k(N+1)-1-(kN-1)=k$$

若 $N=0$，则在 ① 内其值为 N 的项数显然是

$$[\alpha^{-1}(1)]^-+[\beta^{-1}(1)]=k-1$$

推论 若 α,β,γ 都是正数，则每一正整数在以下两串数

$$\left[\alpha\left(\frac{n}{\beta}\right)^{\gamma}+n\right],\left[\beta\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}+n\right]^-,n=1,2,\cdots$$

出现一次.

这个推论留给读者去证明了.

编后语 本篇文献是应一位青年读者之邀刊登的，不查文献、闭门造车是制约中国初等数学研究水平的重要因素，造成低水平重复，多而不强的虚假繁荣.不尊重他人劳动，不了解研究进展是研究者的大忌，现在年青一代已有了非常可喜的开端.